當大衍求一術結合 EXCEL 與 MAPLE

李政豐

一. 楔子

大約在西元前300年, 西方偉大的古希臘數學家歐幾里得 (Euclid) 發明了整數的輾轉相除法, 西元一千七百多年, 瑞士著名的數學家尤拉 (Euler) 發明了二元一次整係數方程式的整數解 (俗稱尤拉解法)。

在東方中國南宋年間 (約西元一千二百多年), 誕生了一位大算學家秦九韶, 這位聰明機智的數學巨星, 出生在四川省, 當時這個天府之國, 時常遭受蒙古軍隊的侵略, 他在兵荒馬亂的艱苦環境中成長, 精通曆法、測量、賦稅、經濟、軍事、營建等經世濟國之道, 他綜合所學, 著作「數書九章」十八卷, 在這本偉大著作的『大衍類』, 用到了比尤拉解法更快速的「大衍求一術」, 他只利用輾轉相除法的一系列商數, 搭配簡單的演算法則, 就能算得二元一次整係數方程式的一組整數解 (俗稱格子點座標)。[1, p.282]

大衍求一術數學思想的起源, 乃是「孫子算經」裡的『中國剩餘定理』, 孫子算經的作者、年代已不可考, 但可判定是漢朝以後 (約西元220年以後) 的產物。[2, p.25、107]

八百多年之後的今天, 由於資訊科技的進步, 在21世紀精準計算的年代, 縱然上述方程式的整數解不難求得, 但是他們創造的演算法則, 仍處處顯露人類科學智慧的才華, 在目前具備功能強大的優良軟體的輔助下, 更襯托出中國古代數學家思考的條理、細密、巧妙與精緻。

本文利用「大衍求一術」, 以 EXCEL 來求得 $ax+by=1$ $(a,b\in N)$ 的一組整數解, 再求得 $ax+by=c$ 的參數式解, 進而解答中國剩餘定理的一個例題。最後以 MAPLE 程式來求得 $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$, ($f(x)$、$g(x)$ 是兩個互質的實係數多項式) 的一組多項式解 $a(x)$, $b(x)$。

尤其讓人高興的是, 多項式解的係數, 竟然是與手算的精準數一模一樣, 而不是浮點數, 並且計算神速, 算式漂亮, 看完這些結果, 真令人慨嘆 MAPLE 的偉大。古今相互輝映, 道盡科學文明的歷史足跡。

撰寫本文的目的, 在拋磚引玉, 激起高中數學老師與學生, 對數學演算法則與數學工具軟體研究的興趣, 摒除繁雜的計算, 讓數學變得更簡單、生動、有趣, 也藉此緬懷中國古代數學家秦九韶, 對宋元黃金時期數學演進的偉大貢獻。

二. 預備知識

在導入主題之前, 我們先介紹幾個基本而重要的定理, 往後的說明, 都必須以這些定理作爲論證的基礎。

整數除法原理: 對任意正整數 a, b, 必存在唯一的一組整數 q, r, 使得 $a=b\times q+r$, 其中 $0\le r<b$。

整數輾轉相除法原理: 設 a, b, q, r 爲整數, 且滿足 $a=bq+r$ 則 $(a,b)=(b,r)$。

多項式除法原理: 對於實係數多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$, $g(x)\neq 0$, 必存在兩多項式 $q(x)$ 與 $r(x)$, 使得 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

多項式輾轉相除法原理: $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲兩多項式, $\deg f(x)\ge \deg g(x)$, 若 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$, 則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式, 就是 $g(x)$ 與 $r(x)$ 的最高公因式。

另外要先說明的是, MAPLE 有很多類的計算方式, 我們所採用的是符號計算 (symbolic calculation), 它所呈現的數字都是精準數, 就跟我們手算的結果相同, 既自然又眞實。

三. 本文

當兩個自然數 a, b, 且 $(a,b)=1$, 我們要找方程式, $ax+by=1$ 的整數解時, 秦九韶的大衍求一術, 對解這個問題有兩個重要的貢獻:

(1) 數書九章所說的「以少除多, 遞互除之」, 就是利用歐幾里得的輾轉相除法, 求得這個 gcd $=1$

(2) 在大衍求一術中, 他只利用輾轉相除法的一系列商數, 搭配簡單的演算法則, 就能算得 $ax+by=1$ 的一組整數解。

甲. 舉例說明大衍求一術列表的演算法則

例1. 求 $35x+8y=1$ 的一組整數解。

解答: 由 $(35,8)=1$, 用橫式輾轉相除法求得一系列的商數, 再把商數用 q_i 替換

$$\begin{array}{rcl} 35=8\times 4+3 & & 35=8\times q_1+3 \\ 8=3\times 2+2 & q_1=4,\ q_2=2,\ q_3=1,\ q_4=2 & 8=3\times q_2+2 \\ 3=2\times 1+1 & \text{代入左式} & 3=2\times q_3+1 \\ 2=1\times 2+0 & \Longrightarrow & 2=1\times q_4+0 \end{array} \qquad \text{(A式)}$$

由右邊 (A 式) 倒數第二列的餘數1開始往上逆推

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2q_3 \\
&= 3 - (8 - 3q_2)q_3 \\
&= (-1)^1(q_3)(8) + (-1)^2(q_3q_2 + 1)(3) \\
&= (-1)^1(q_3)(8) + (-1)^2(q_3q_2 + 1)(35 - 8q_1) \\
&= (-1)^2(q_3q_2 + 1)(35) + (-1)^3[q_1(q_3q_2 + 1) + q_3](8) \qquad \text{(B式)}
\end{aligned}$$

將 (B 式) 最後一列 [ ] 中的式子, 按相乘的項數由多到少, 再按足碼由大而小的順序, 整理成巢狀結構

$$[q_1(q_3q_2 + 1) + q_3] = [q_3q_2q_1 + q_3 + q_1] = [q_3(q_2q_1 + 1) + q_1]$$

則所得到 $35x + 8y = 1$ 的一組整數解是

$$\begin{aligned}
x_0 &= (-1)^2(q_3q_2 + 1) \\
y_0 &= (-1)^3[q_3(q_2q_1 + 1) + q_1]
\end{aligned}$$

如果不理會解答的正負符號, 我們可將求解的過程, 利用簡單記憶的方式, 列出一個巢狀結構的運算表格

表一

		q_1	q_2	q_3
1	0	1	q_2	q_3q_2+1
0	1	q_1	q_2q_1+1	$q_3(q_2q_1+1)+q_1$

它的演算法則是

1. 第2列第1、2、3行的位置分別塡 1、0、1。
2. 第3列第1、2行的位置分別塡 0、1。
3. 第2列第4行起往右一整列的每一格演算法則都是: 上方×左方+左前方。
4. 第3列第3行起往右一整列的每一格演算法則都是: 最上方×左方+左前方。
5. 解答正負符號的決定規則: 如表一所示; 倒數第二列的最後一行是 $q_3q_2 + 1$, 此行最上方是 q_3, 足碼爲3, 則 $x_0 = (-1)^{3-1}(q_3q_2 + 1)$, 最後一列的最後一行是 $q_3(q_2q_1 + 1) + q_1$, 則 $y_0 = (-1)^3[q_3(q_2q_1 + 1) + q_1]$, x_0 與 y_0 恰好差了一個負號。

如果把 $q_1 = 4$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$ 代入所作成的表格是

表二

		4 (q_1)	2 (q_2)	1 (q_3)
1	0	1	2	3
0	1	4	9	13

(B 式) 最後一列, 或表一最後一行, 所代表的一組整數解是

$$x_0=(-1)^2(q_3q_2+1)=+3$$
$$y_0=(-1)^3[q_3(q_2q_1+1)+1]=-13$$

亦即表二最後一行所代表的一組整數解是

$$35(+3)+8(-13)=1$$

如果我們再把 $q_4=2$ 也放進去, 則表格最後一行的最後兩數, 是方程式的係數 35 與 8:

表三

		$4(q_1)$	$2(q_2)$	$1(q_3)$	$2(q_4)$
1	0	1	2	3	8
0	1	4	9	13	35

它代表的是 $35(-8)+8(+35)=0$。
爲什麼會有這個結果? 其實是在 (A 式) 最後一行的餘數 0, 逆推回去的結果, 我們將它證明如下: 由 (A 式) 最後一列最後一行餘數 0 開始往上逆推

$$\begin{aligned}
0&=2-1q_4\\
&=2-(3-2q_3)q_4\\
&=(-1)^1(q_4)(3)+(-1)^2(q_4q_3+1)(2)\\
&=(-1)^1(q_4)(3)+(-1)^2(q_4q_3+1)(8-3q_2) \qquad \text{(C式)}\\
&=(-1)^2(q_4q_3+1)(8)+(-1)^3[q_2(q_4q_3+1)+q_4](3)\\
&=(-1)^2(q_4q_3+1)(8)+(-1)^3[q_2(q_4q_3+1)+q_4](35-8q_1)\\
&=(-1)^3[q_2(q_4q_3+1)+q_4](35)+(-1)^4\{q_1[q_2(q_4q_3+1)+q_4]+(q_4q_3+1)\}(8)
\end{aligned}$$

將 (C 式) 最後一列 [ ] 與 { } 中的式子, 按相乘的項數由多到少, 再按足碼由大而小的順序, 整理成巢狀結構

$$\begin{aligned}
&[q_2(q_4q_3+1)+q_4]\\
=&[q_4q_3q_2+q_4+q_2]\\
=&[q_4(q_3q_2+1)+q_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{q_1[q_2(q_4q_3+1)+q_4]+(q_4q_3+1)\}\\
=&\{q_4q_3q_2q_1+q_4q_1+q_2q_1+(q_4q_3+1)\}\\
=&\{q_4q_3q_2q_1+q_4q_3+q_4q_1+q_2q_1+1\}\\
=&\{q_4(q_3q_2q_1+q_3+q_1)+(q_2q_1+1)\}\\
=&\{q_4[q_3(q_2q_1+1)+q_1]+(q_2q_1+1)\}
\end{aligned}$$

則所得到的這一組整數解是

$$\begin{aligned}
x_0&=(-1)^3[q_4(q_3q_2+1)+q_2]\\
y_0&=(-1)^4\{q_4[q_3(q_2q_1+1)+q_1]+(q_2q_1+1)\}
\end{aligned}$$

即 (C 式) 最後一列所代表的是 $35x_0+8y_0=0$。
若暫時不理會解答的正負符號 (因爲我們常見的二元一次不定方程式, $ax+by=1$ 係數 a、b 可正可負), 我們利用上面的演算法則, 列出一個巢狀結構的運算表格

表四

		q_1	q_2	q_3	q_4
1	0	1	q_2	q_3q_2+1	$q_4(q_3q_2+1)+q_2$
0	1	q_1	q_2q_1+1	$q_3(q_2q_1+1)+q_1$	$q_4[q_3(q_2q_1+1)+q_1]+(q_2q_1+1)$

比對表三與表四

$$\begin{aligned}
&q_4(q_3q_2+1)+q_2=8\\
&q_4[q_3(q_2q_1+1)+q_1]+(q_2q_1+1)=35
\end{aligned}$$

證畢。

例2. 求 $5723x+4171y=97$ 的一組整數解。

解答: 爲了確定它是否有整數解, 先檢查 (5723, 4171)| 97, 是否成立?
第一步: 先用直式輾轉相除法算得 $(5723,4171)=97$。
第二步: 把方程式兩邊同除 97 得到一個同義方程式 $59x+43y=1$。
第三步: 用橫式輾轉相除法求得一系列的商數

$$\begin{aligned}
59&=43\times1+16\\
43&=16\times2+11\\
16&=11\times1+5\\
11&=5\times2+1\\
5&=1\times5+0
\end{aligned}$$

把 $q_1=1$, $q_2=2$, $q_3=1$, $q_4=2$, $q_5=5$ 代入大衍求一術的運算表格, 得到

表五

			$16(r_1)$	$11(r_2)$	$5(r_3)$	$1(r_4)$	$0(r_5)$
			$1(q_1)$	$2(q_2)$	$1(q_3)$	$2(q_4)$	$5(q_5)$
59 的係數	1	0	1	2	3	8	43
43 的係數	0	1	1	3	4	11	59

(1) 觀察倒數第二行的最後兩數, 它代表的是 $(59)(-8)+(43)(11)=1$ 取正負號的規則是: 8 在 q_4 的這一行, 它的足碼 (index) 是 4, 故取 $x_0=(-1)^3(8)$, $y_0=(-1)^4(11)$。如果忘了取正負號的規則, 要湊出滿足常數是 1 的一組解也很容易。

(2) 觀察最後一行的最後兩數, 它在 q_5, 足碼是 5 的這一行, 它代表的是 $(59)[(-1)^4(43)]+(43)[(-1)^5(59)]=0$。

(3) 再觀察倒數一、二行的最後兩數, 它的交叉相乘積的差是 1 或 -1。它代表的是 $(59)(8)-(43)(11)=-1$。

(4) 觀察倒數第三行的最後兩數, 它代表 $(59)[(-1)^2(3)]+(43)[(-1)^3(4)]=5$, 5是倒數第三行最上方的餘數 r_3。

乙. 將大衍求一術的演算法則, 寫成 EXCEL 程式如下:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	秦九韶的大衍求一術						
3	a,b是兩個互質的自然數, 求ax+by=1 的整數解,請在紅字體下方填入a,b						
4	下方填a	下方填b	GCD	互質的a	互質的b		
5	59	43	1	59	43		
6							
7	被除數	=	除數	×	商	+	餘數
8	59	=	43	×	1	+	16
9	43	=	16	×	2	+	11
10	16	=	11	×	1	+	5
11	11	=	5	×	2	+	1
12	5	=	1	×	5	+	0
26			q1	q2	q3	q4	q5
27			1	2	1	2	5
28	1	0	1	2	3	8	43
29	0	1	1	3	4	11	59

圖一

結合了大衍求一術與 EXCEL, 使得求二元一次不定方程式的整數解變得更簡單, 也引起學生

操作學習的一點樂趣。

[附註] 非常感謝數播審稿師長的提示, 在清華大學數學系全任重老師的網站
http://poncelet.math.nthu.edu.tw/chuan/123/test/rnplussn.htm
用 lotus 123 設計了大衍求一數的簡單表格, 具有與圖一相同的功能。

例3. 求 $10x + 14y = 20$ 的所有整數解。

解答:

第一步: 先算得 $(10, 14) = 2$。

第二步: 把方程式兩邊同除 2 得到一個同義方程式 $5x + 7y = 10$, 如果常數項不能被最大公因數 2 整除, 則方程式沒有整數解; 因爲如果 x, y 是整數, 則 $10x + 14y$ 也是整數, 而且一定是 (10,14) 的倍數。

第三步: 先求解 $5x_0 + 7y_0 = 1$, 用橫式輾轉相除法求得一系列的商數;

$$5 = 7 \times 0 + 5$$
$$7 = 5 \times 1 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$

表六

		$0(q_1)$	$1(q_2)$	$2(q_3)$	$2(q_4)$
1	0	1	1	3	7
0	1	0	1	2	5

觀察倒數第二行, 我們得到的方程組解是

$$5(+3) + 7(-2) = 1. \tag{D式}$$

即 $x_0 = +3$, $y_0 = -2$。

第四步: 將 (D 式) 兩邊各乘上同義方程式的常數 10, $5(+3\times 10)+7(-2\times 10) = 1\times 10$, 我們得到同義方程式 $5x+7y = 10$ 的一組解; $(x, y) = (30, -20)$ 直線 $5x+7y = 10$ 的斜率是 $\frac{-5}{7}$, 如果由整數解 $(30, -20)$ 的格子點開始, 沿著直線出發, x 座標前進 7 格, y 座標就下降 5 格。因爲 7 與 5 互質, x 座標前進不到 7 格, y 座標下降的格子數就不是整數, 因此所有整數解是:

$$\begin{cases} x = 30 + 7t \\ y = -20 - 5t \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 是整數。}$$

丙. 秦九韶如何用大衍求一術來解決中國餘數定理問題?

例4. 有一個自然數, 以三除之餘二, 以五除之餘三, 以七除之餘二, 此自然數最小是多少?

解答:

(1) 某數以三除之餘二, 以五除之餘三, 故可假設

$$\text{某數} = 3x+2 = 5y+3. \qquad \text{(E式)}$$

由 $3x+2=5y+3$, 移項得 $3x+5(-y)=1$, 由大衍求一術的計算

$$\begin{aligned} 3 &= 5\times 0+3 \\ 5 &= 3\times 1+2 \\ 3 &= 2\times 1+1 \\ 2 &= 1\times 2+0 \end{aligned}$$

表七

		$0(q_1)$	$1(q_2)$	$1(q_3)$	$2(q_4)$
1	0	1	1	2	5
0	1	0	1	1	3

觀察最後二行的最後二列

$$\begin{aligned} & 3(2)+5(-1)=1 \\ \text{與}\qquad & 3x+5(-y)=1 \qquad \text{比較} \end{aligned}$$

得到一組整數解 $(x,y)=(2,1)$。由 $3x+5(-y)=1$ 的斜率是 $\frac{3}{5}$, 且 3, 5 互質。得到直線上格子點的參數式 $\begin{cases} x=2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$ 其中 t 是整數, 把 $x=2+5t$, 或 $y=1+3t$ 代入 (E 式) 得某數$=8+15t$。

(2) 我們可把原命題改寫成『某數以十五除之餘八, 以七除之餘二』, 故可假設

$$\text{某數} = 15x+8 = 7y+2. \qquad \text{(F式)}$$

移項得

$$15x+7(-y)=-6 \qquad \text{(G式)}$$

我們先計算

$$15x_0+7(-y_0)=1 \qquad \text{(H式)}$$

由直式輾轉相除法

$$15 = 7 \times 2 + 1$$

$$7 = 1 \times 7 + 0$$

表八

		$2(q_1)$	$7(q_2)$
1	0	1	7
0	1	2	15

觀察最後二行的最後二列得到 $15(1)+7(-2)=1$, 將上式乘上 (G 式) 的常數項 -6 得到 $15(-6)+7(12)=-6$, 與 $15x+7(-y)=-6$ 相比較得到一組整數解, $\begin{cases} x=-6 \\ y=-12 \end{cases}$, 由直線 $15x+7(-y)=-6$ 的斜率是 $\frac{15}{7}$, 得到所有格子點座標 $\begin{cases} x=-6+7t \\ y=-12+15t \end{cases}$ 其中 t 是整數, 把參數式中的 $x=-6+7t$, 或 $y=-12+15t$ 代入 (F 式) 得到某數$=-82+105t$, 將 t 取 1, 即得到最小的某數 23。

上面解法, 是爲不熟悉大衍求一術的高中同學所設計的求解過程, 其實有些方程式的一組解答, 用目測就能看出來, 那就省略了列表計算的麻煩。

丁. 用 MAPLE 解大衍求一術

當 $f(x)$、$g(x)$ 是兩個互質的實係數多項式, 要如何找到一組多項式解 $a(x)$, $b(x)$, 滿足方程式 $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$。我們在唸代數的時候, 相信都有這個經驗, 要求得上述方程式的一組多項式解, 且係數是精準數 (不是浮點數), 使用輾轉相除法逆推, 用手算一題幾乎要浪費一小時的時間。學了程式語言之後, 雖然寫程式, 也能很快的求得一組多項式解, 但是得到的係數卻是浮點數, 那種感覺, 脫離了數學的精確與完美, 總是若有所失。直到用了 MAPLE 程式, 這種數學的感覺被找回來了。底下是大衍求一術的 MAPLE 程式。

大衍求一術的新工具: MAPLE

$f(x)$, $g(x)$ 是互質的實係數多項式, 求兩多項式 $a(x)$, $b(x)$ 滿足 $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$

先把所有數據歸零

```
> restart;
> i:=1:k:=1:
```

請您在 $f(x)$: 之後輸入被除式 $f(x)$, 在 $g(x)$: 之後輸入除式 $g(x)$

```
> f (x) :=3*x^4+x^3+1;
```

$f(x) := 3x^4 + x^3 + 1$

```
> g (x) :=2*x^3+2*x^2+x-1;
```

$g(x) := 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

如果 $f(x)$ 與 $g(x)$ 不互質, 我們要除掉它們的最高公因式

```
> f (i) (x) :=f (x) /gcd (f (x) ,g (x) ) ;
```

$f(1)(x) := 3x^4 + x^3 + 1$

```
> g (i) (x) :=g (x) /gcd (f (x) ,g (x) ) ;
```

$g(1)(x) := 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

先找商式跟餘式

```
> q (i) (x) :=quo (f (i) (x) ,g (i) (x) ,x) ;
```

$q(1)(x) := \frac{3}{2}x - 1$

```
> r (i) (x) :=rem (f (i) (x) ,g (i) (x) ,x) ;
```

$r(1)(x) := \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

輾轉相除, 求得一系列的商式跟餘式

```
> for i from 1 by 1 while degree (r (i) (x) ) >0 do
        f (i+1) (x) :=g (i) (x) ;
        g (i+1) (x) :=r (i) (x) ;
        q (i+1) (x) :=quo (f (i+1) (x) ,g (i+1) (x) ,x) ;
        r (i+1) (x) :=rem (f (i+1) (x) ,g (i+1) (x) ,x) ;
  end do;
```

$f(2)(x) := 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

$g(2)(x) := \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

$q(2)(x) := 4x - 16$

$r(2)(x) := -1 + 41x$

$f(3)(x) := \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

$g(3)(x) := -1 + 41x \quad q(3)(x) := \frac{1}{82}x + \frac{103}{1681}$
$r(3)(x) := \frac{103}{1681}$

取得商式的數目

```
> k:=i;
```
$k := 3$

用大衍求一術的演算法則求 $a(x)$ 與 $b(x)$

```
>b (1) (x) :=simplify (q (1) (x) ) ;
  b (2) (x) :=simplify (q (2) (x) *b (1) (x) +1) ;
  for i from 3 by 1 to k do
      b (i) (x) :=simplify (q (i) (x) *b (i-1) (x) +b (i-2) (x) ) ,
  end do;
```
$b(1)(x) := \frac{3}{2}x - 1$
$b(2)(x) := 6x^2 - 28x + 17$
$b(3)(x) := \frac{3}{41}x^3 + \frac{44}{1681}x^2 - \frac{14}{1681}x + \frac{70}{1681}$

```
> a (1) (x) :=1;
  a (2) (x) :=simplify (q (2) (x) *a (1) (x) +0) ;
  for i from 3 by 1 to k do
      a (i) (x) :=simplify (q (i) (x) *a (i-1) (x) +a (i-2) (x) ) ,
  end do;
```
$a(1)(x) := 1$
$a(2)(x) := 4x - 16$
$a(3)(x) := \frac{2}{41}x^2 + \frac{84}{1681}x + \frac{33}{1681}$

把 $a(x)$ 與 $b(x)$ 簡化再降冪排列

```
> a (x) :=sort (simplify (a (k) (x) /r (k) (x) * (-1) ^ (k-1) ) ) ,
```
$a(x) := \frac{82}{103}x^2 + \frac{84}{103}x + \frac{33}{103}$

```
> b (x) :=sort (simplify (b (k) (x) /r (k) (x) * (-1) ^ (k) ) ) ;
```
$b(x) := -\frac{123}{103}x^3 - \frac{44}{103}x^2 + \frac{14}{103}x - \frac{70}{103}$

列印出 $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ 的各項 $a(x)$, $f(x)$, $b(x)$, $g(x)$, 1

```
> print (a (x) ,f (1) (x) ,b (x) ,g (1) (x) ,1) ;
```
$\frac{82}{103}x^2+\frac{84}{103}x+\frac{33}{103},\ 3x^4+x^3+1,\ -\frac{123}{103}x^3 - \frac{44}{103}x^2+\frac{14}{103}x - \frac{70}{103},\ 2x^3+2x^2+x-1,\ 1$

[附註] 非常感謝數播審稿師長的提示, MAPLE 中設有指令 gcdex, 可以直接計算上面式子的 $a(x)$、$b(x)$。

MAPLE⟶工具列的 HELP⟶TOPIC SEARCH⟶點選 gcdex⟶APPLY

Calling Sequence

gcdex (A,B,x,'s','t')

gcdex (A,B,C,x,'s','t')

> gcdex (f (1) (x) ,g (1) (x) ,1,x,'s','t') ;

> s,t;

$$\frac{82}{103}x^2+\frac{84}{103}x+\frac{33}{103},\quad -\frac{123}{103}x^3-\frac{44}{103}x^2+\frac{14}{103}x-\frac{70}{103}$$

戊. 大衍求一術的一般化證明

對所給兩個自然數 a, b 由輾轉相除法

$$a=bq_1+r_1 \tag{1}$$

$$b=r_1q_2+r_2 \tag{2}$$

$$r_1=r_2q_3+r_3 \tag{3}$$

$$r_2=r_3q_4+r_4 \tag{4}$$

$$\vdots$$

如果令 $r_{-1}=a$, $r_0=b$

則有

$$r_{i-2}=r_{i-1}q_i+r_i \qquad \text{的關係存在, 其中 } i\in N\text{。}$$

由 (1)

$$r_1=a+(-q_1)b \tag{A}$$

由 (2)

$$\begin{aligned} r_2&=b-r_1q_2\\ &=b+(-q_2)[a+(-q_1)b]\\ &=(-q_2)a+[(-1)^2q_2q_1+1]b \end{aligned} \tag{B}$$

由 (3)

$$\begin{aligned} r_3 &= r_1 - r_2 q_3 \\ &= (a + (-q_1)b) + (-1)q_3[(-q_2)a + ((-1)^2 q_1 q_2 + 1)b] \\ &= ((-1)^2 q_2 q_3 + 1)a + ((-1)^3 q_1 q_2 q_3 + (-1)q_3 - q_1)b \\ &= [(-1)^2 q_3 q_2 + 1]a + [(-1)^3 q_3(q_2 q_1 + 1) - q_1]b \end{aligned} \tag{C}$$

由 (4)

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 + (-1)q_4 r_3 \\ &= (-q_2)a + ((-1)^2 q_2 q_1 + 1)b + (-1)q_4\{[(-1)^2 q_3 q_2 + 1]a + [(-1)^3 q_3(q_2 q_1 + 1) - q_1]b\} \\ &= [-q_2 - q_4 + (-1)^3 q_4 q_3 q_2]a + [(-1)^2 q_2 q_1 + 1 + (-1)^4 q_4 q_3(q_2 q_1 + 1) + (-1)^2 q_4 q_1]b \\ &= (-1)[q_4((-1)^2 q_3 q_2 + 1) + q_2]a + \{q_4[q_3(q_2 q_1 + 1) + q_1] + (-1)^2 q_2 q_1 + 1\}b \end{aligned} \tag{D}$$

如果我們將它列成一個表格如下:

表九

<table>
<tr><th colspan="8">大 衍 求 一 術</th></tr>
<tr><td colspan="2">衍序</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">每衍執行值</td><td>餘數值</td><td>$r_{-1}(a)$</td><td>$r_0(b)$</td><td>r_1</td><td>r_2</td><td>r_3</td><td>r_4</td></tr>
<tr><td>商數值</td><td></td><td></td><td>q_1</td><td>q_2</td><td>q_3</td><td>q_4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">每衍回饋值</td><td>a 係數</td><td>1</td><td>0</td><td>(α_1)
1</td><td>(α_2)
$-q_2$</td><td>(α_3)
$(-1)^2 q_3 q_2+1$</td><td>(α_4)
$-q_4((-1)^2 q_3 q_2+1)$
$-q_2$</td></tr>
<tr><td>b 係數</td><td>0</td><td>1</td><td>(β_1)
$-q_1$</td><td>(β_2)
$(-1)^2 q_2 q_1+1$</td><td>(β_3)
$(-q_3)[(-1)^2 q_2 q_1+1]$
$-q_1$</td><td>(β_4)
$q_4[q_3(q_2 q_1+1)+q_1]$
$+(-1)^2 q_2 q_1+1$</td></tr>
</table>

表九中 a, b 係數計算的演算法則是:

1. 衍序 $-1, 0, 1$ 所對應的 a 係數分別放 $1, 0, 1$。
2. 衍序 $-1, 0$ 所對應的 b 係數分別放 $0, 1$。
3. 其餘 a 係數右方每一空格的演算法則都是: $(-1)\times$上方$\times$左方$+$左前方。
4. 其餘 b 係數右方每一空格的演算法則都是: $(-1)\times$上二格$\times$左方$+$左前方。

如果令衍序 i 所對應的 a 係數爲 α_i, b 係數爲 β_i, 則由上面 (A)、(B)、(C)、(D) 式可得 $r_i = \alpha_i a + \beta_i b$。

底下我們想將表九 a 係數、b 係數的計算作一般化:

由 $r_{i-2} = r_{i-1}\cdot q_i + r_i$, 則當 $i \geq 1$ 時

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-2} + (-1)q_i r_{i-1} \\ &= (\alpha_{i-2}a + \beta_{i-2}b) - q_i(\alpha_{i-1}a + \beta_{i-1}b) \\ &= (-q_i\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2})a + (-q_i\beta_{i-1} + \beta_{i-2})b \end{aligned}$$

亦即 $r_i = \alpha_i a + \beta_i b$。

將一般化的結果列成一個表格是:

表十

大衍求一術								
衍序		$\cdots$	$i-2$	$i-1$	i	$\cdots$	$n-1$	n
每衍執行值	餘數值	$\cdots$	r_{i-2}	r_{i-1}	r_i	$\cdots$	r_{n-1}	r_n
	商數值	$\cdots$	q_{i-2}	q_{i-1}	q_i	$\cdots$	q_{n-1}	q_n
每衍回饋值	a 係數	$\cdots$	α_{i-2}	α_{i-1}	(α_i) $-q_i\alpha_{i-1}+\alpha_{i-2}$	$\cdots$	(α_{n-1}) $-q_{n-1}\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}$	(α_n) $-q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$
	b 係數	$\cdots$	β_{i-2}	β_{i-1}	(β_i) $-q_i\beta_{i-1}+\beta_{i-2}$	$\cdots$	(β_{n-1}) $-q_{n-1}\beta_{n-2}+\beta_{n-3}$	(β_n) $-q_n\beta_{n-1}+\beta_{n-2}$

由輾轉相除法原理:

$$a, b \in N \quad \text{若} \quad a = bq + r \quad \text{則} \quad (a, b) = (b, r)。$$

如果我們把 a 當被除數, b 當除數, 由整數的除法定理, $b > r \geq 0$, 當我們繼續作有限次輾轉相除;

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4 \\
&\vdots \\
r_{i-2} &= r_{i-1} q_i + r_i \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n
\end{aligned}$$

則有	$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) \cdots$
且存在某個自然數 n, 使得	$r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots > r_{n-1} > r_n = 0$
此時	$(a, b) = r_{n-1}.$

四. 結語

當我們坐在飛機上悠閒的往下看, 似乎很難體會到我們的祖先, 遠度重洋、千里跋涉, 篳路藍縷、以啓山林的那種艱苦心境。

但是, 當我們今天使用 EXCEL 與 MAPLE 去解決大衍求一術的問題時, 我們卻能發自內心的感受到中國古代數學家的的睿智與光芒, 大概是亙古不變的演算法則, 在提攜我們堅實的邁步向前。這眞是數學與其他科技一個很大的差別。

本文是我們網路數學素材課程的一篇報告, 在撰寫過程中, 交通大學應數系黃大原老師, 給我很多寶貴的意見與指導, 尤其是最後完整的證明與表格, 黃老師將它呈現得更加完美, 使我們的學習, 融合著快樂與充實, 教學與互動, 既感性又溫馨, 在此特地敬表感謝之意。

參考文獻

(1) 黃武雄、杜時然 (民69)。中西數學簡史。台北: 人間文化事業股份有限公司。
(2) 李人言 (民79)。中國算學史 (七版)。台北: 台灣商務印書館。
(3) 高級中學數學編輯小組李恭晴等 (民74)。基礎數學統合 (上册)。台北: 國立編譯館。
(4) 洪維恩 (民90)。數學魔法師。台北: 碁峰資訊股份有限公司。
(5) 莫宗堅。韓信點兵。科學月刊第一卷第一期。
(6) 清華大學數學系全任重老師的網站:
http://poncelet.math.nthu.edu.tw/chuan/123/test/rnplussn.htm

—本文作者任教於竹南高中—