棣美弗定理與 Euler 公式

林琦焜

『*The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.*』

— J. Hadamard (1865–1963) —

數學裡有許多迷人的公式能夠知道它的來源, 瞭解其內涵並有深刻的体會, 雖然花點時間但絕對是値得的。引用高斯 (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855) 的商標, 即一幅畫其中有一棵樹, 上面只結了七個果實, 下面寫著 "雖少卻熟透", 所謂 "抓一小把而心安理得, 遠勝過雙手滿捧卻勞碌捕風"。在三角函數與複數理論中最重要的公式, 我個人認爲是 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

這是 Euler 在 1748 年所發表。若 $\theta = \pi$ 就是

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Euler (1707-1783) 非常喜愛這個公式, 並宣稱這是最美麗的數學公式, 他熱愛到將這公式刻在皇家科學院的大門上。這式子有 $1, 0$ 分別是乘法, 加法這兩個基本運算系統的單位元素, 整個數字系統最根本的概念, 還有三個運算方法 — 加、乘與次方。另外還有兩個特別的數: 指數 e 與圓周率 π, 再加上 i 這個虛數單位 (i 顧名思意是取虛數 imaginary number 的第一個字母, 這是 Euler 第一個提議, 但卻是高斯使得代表 $\sqrt{-1}$ 的符號 i 廣被使用, 他將 $a + ib$ 命名爲複數 (complex number) 而稱 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 爲範數 (norm))。i 的幾何意義是旋轉, 將 x 軸轉換到 y 軸。關於這個事實人們有這麼一段笑話:

『*You have reached an imaginary number. If you reguire a real number, please rotate your telephone by* 90^0 *and try again.* 』

您撥的是虛號 (虛數), 如果您要撥實號 (實數) 請將您的電話旋轉 90 度後再重撥。

歷史上第一個給出複數之幾何表示的學者是挪威數學家 Casper Wessel (1745-1818) 之後 Jean Robert Argand (1768-1822), J. Warnen 和高斯 (Gauss) 等人也相繼獨立發表了複數的幾何表示。其中以高斯的工作對於後代的數學產生普遍的影響。實際上 Euler 並不是憑空想像推導出 Euler 公式, 在他之前法國數學家棣美弗 (de Moivre, 1667-1754) 就在 1722 年提出著名的棣美弗定理 (1.1), 由棣美弗定理加上極限的概念可推導出 Euler 公式。除此之外, 棣美弗也是機率論的創始者之一, 今天我們所說的常態分配 (normal distribution) 或高斯分配事實上是棣美弗先發現的, 關於其生平讀者可參閱「毛起來說三角」([4]) 一書。

1. 棣美弗定理

從歷史的發展而言, Euler 公式與棣美弗定理

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \tag{1.1}$$

有直接密切的關係, 令 $\varphi = \frac{\theta}{n}$ 則

$$\cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n \tag{1.2}$$

這等式對所有的正整數 n 都成立, 所以可以考慮 $n\to\infty$ 的情形, 由三角函數之性質

$$\cos\frac{\theta}{n}\approx 1,\quad \sin\frac{\theta}{n}\ \approx\ \frac{\theta}{n},\qquad n\gg 1,\quad \frac{\theta}{n}\approx 0$$

可以合理地猜測

$$\cos\theta + i\sin\theta = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n = e^{i\theta} \tag{1.3}$$

這就是 Euler 公式! 在這裡我們已悄悄地承認極限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ 對於複數 x 也成立。

我們從三角公式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (畢氏定理) 開始, 因式分解可得

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x)$$

令右式的兩個函數分別是

$$f(x) = \cos x + i\sin x,\qquad g(x) = \cos x - i\sin x \tag{1.4}$$

f, g 之關係爲

$$f(x)g(x) = 1,\qquad g(x) = f^*(x)$$

則棣美弗定理告訴我們 f 滿足函數方程

$$f(x)f(y)=f(x+y), \qquad [f(x)]^n=f(nx) \tag{1.5}$$

但根據我們對於函數的瞭解, 具有這個性質的函數就是指數函數 (exponential function) 所以可以大膽假設 f 就是指數函數

$$f(x)=\cos x+i\sin x=e^{Kx} \qquad (K\text{待求})$$

我們可以驗證看看

$$e^{Kx_1}\cdot e^{Kx_2}=e^{K(x_1+x_2)}, \qquad (e^{Kx})^n=e^{K(nx)}$$

與 (1.5) 不謀而合, 現在決定 K 是甚麼? f 對 x 微分

$$\frac{df}{dx}=Ke^{Kx}=-\sin x+i\cos x=i(\cos x+i\sin x)$$

因此 $K=i$, 換言之

$$f(x)=\cos x+i\sin x=e^{ix} \tag{1.6}$$

這正是 Euler 公式。同理對於函數 $g(x)$ 也有類似的公式:

$$g(x)g(y)=g(x+y), \qquad [g(x)]^n=g(nx) \tag{1.7}$$

$$g(x)=\cos x-i\sin x=e^{-ix} \tag{1.8}$$

將正負兩者合併

$$(\cos x\pm i\sin x)^n=\cos nx\pm i\sin nx$$

設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 則棣美弗定理的一般式爲 $(n=0,1,2,3,\ldots)$

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{1.9}$$

實際上棣美弗定理對於負整數也成立, 假設 $1/z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 則

$$1=z\cdot z^{-1}=r\rho[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]$$

所以

$$r\rho=1, \quad \theta+\varphi=2n\pi \quad \Longrightarrow \quad \rho=\frac{1}{r}, \quad \varphi=-\theta+2n\pi$$

故

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=r^{-1}(\cos\theta-i\sin\theta)=r^{-1}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

再由歸納法結論

$$z^{-n} = (1/z)^n = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] \tag{1.10}$$

2. 指數函數

既然 Euler 公式本質上就是指數函數 e^x 之解析延拓 (analytic continuation) 的問題, 我們就從指數函數的角度來探討 Euler 公式。基本上指數函數 e^x 有兩個定義方式

(A) $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$

(B) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(A) 我們模仿 (A) 的定義方式將 x 換爲任意的複數 $z = x + iy$

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{2.1}$$

首先將 $1+\frac{z}{n}$ 表爲極式

$$1+\frac{z}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n} = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \tag{2.2}$$

其中

$$r_n = \sqrt{(1+\frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2}, \qquad \tan\theta_n = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{y}{x+n} \tag{2.3}$$

所以由棣美弗定理得知 (假設極限存在)

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} r_n^n(\cos n\theta_n + i\sin n\theta_n) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.4}$$

所以現在的問題就是決定 r, θ 這兩個極限

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n^n = ? \qquad \theta = \lim_{n\to\infty} n\theta_n = ? \tag{2.5}$$

直觀而言

$$r_n = \sqrt{(1+\frac{x}{n})^2 + \frac{y^2}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}} \approx \sqrt{1+\frac{2x}{n}}, \qquad 1 \ll n$$

因此由指數的定義可以證明

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^x \tag{2.6}$$

另外因爲 $\theta_n \to 0\,(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cdot\cos\theta_n=1$$

所以

$$\theta=\lim_{n\to\infty}n\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}\cdot n\tan\theta_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}\cdot\frac{y}{1+\frac{x}{n}}\right)=y \tag{2.7}$$

定理 **2.1.** 已知 $z=x+iy$ 則

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{2.8}$$

如果 $z=iy$ 就回到 Euler 公式。由這個定理可容易證明函數方程。

系 **2.2.** 指數函數 e^z 滿足函數方程

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}\qquad z_1,z_2\in\mathbb{C} \tag{2.9}$$

證明: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 則

$$\begin{aligned}e^{z_1+z_2}&=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}\\&=e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\big)\\&=e^{x_1}\big(\cos y_1+i\sin y_1\big)\cdot e^{x_2}\big(\cos y_2+i\sin y_2\big)\\&=e^{z_1}\cdot e^{z_2}\end{aligned}$$

這個函數方程 (functional equation) 是指數函數的基本性質但是直接由定義是不容易證明的, 不信你可以試看看。

(B) 從分析的角度而言, 利用冪級數來定義指數函數是最自然不過的了

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad z=x+iy \tag{2.10}$$

在複變函數理論我們將這類可以表爲冪級數的函數稱爲解析函數 (analytic function), 因爲是無窮級數所以必需先討論收斂性問題。對於複數要比較大小最自然的就是選取其模 (modulus) 或範數 (norm)

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$$

其實就是平面向量 (x,y) 之長度, 因為 $|z^n| \le |z|^n$, 所以

$$|e^z| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

這個不等式告訴我們對所有的複數 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \infty$, e^z 都是有定義的 (即收斂), 而且可證明其收斂半徑 $R=\infty$, e^z 不僅是解析函數, 更是一全函數 (entire function)。逐項微分

$$\frac{d}{dz}[e^z] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z \tag{2.11}$$

也就是說 $w = e^z$ 滿足微分方程 (且是唯一解!)

$$\frac{dw}{dz} = w, \qquad w(0) = 1 \tag{2.12}$$

同理可證

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(e^{z+\xi}e^{-z}) &= \frac{d}{dz}\Big(w(z+\xi)w(-z)\Big)\\ &= w'(z+\xi)w(-z) - w(z+\xi)w'(-z)\\ &= w(z+\xi)w(-z) - w(z+\xi)w(-z) = 0\end{aligned}$$

因此 $e^{z+\xi}e^{-z}$ 是一常數函數, 所以(令 $z=0$)

$$e^{z+\xi}e^{-z} = e^{\xi}e^{-0} = e^{\xi} \tag{2.13}$$

令 $\xi = 0$ 則

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

利用這個關係式 (2.13) 兩邊乘 e^z 就是指數函數的加法運算法則

$$e^{z+\xi} = e^z \cdot e^{\xi} \tag{2.14}$$

等式 (2.14) 告訴我們指數函數 e^z 滿足函數方程

$$f(z+\xi) = f(z)f(\xi) \tag{2.15}$$

我們也可以由 Taylor 展開式來證明函數方程。令 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 逐項微分

$$f^{(n)}(z) = f(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(z+\xi) &= f(z) + \frac{f'(z)}{1!}\xi + \frac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\xi^n + \cdots \\
&= f(z)\Big[1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{\xi^n}{n!} + \cdots\Big] \\
&= f(z)f(\xi)
\end{aligned}
$$

這個著名的函數方程可追溯至法國數學家 Cauchy (Cours d'Analysis 1821)。在實數的情形, 他證明 $e^{\alpha x}$ 是唯一的連續函數滿足函數方程 (2.15), 在後來的研究更證明, 在有限區間時, 指數函數 $e^{\alpha x}$ 是唯一滿足 (2.15) 的可測函數 (measurable function)。

令 $z = iy$ 代入定義 (B) 就是 Euler 公式

$$
e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} = \cos y + i \sin y \tag{2.16}
$$

利用函數方程可得更一般的公式

$$
e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{2.17}
$$

我們可以驗證 e^z 滿足所有在實數情形的指數函數之性質而且更豐盛, 例如

$$
e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \tag{2.18}
$$

e^z 是一個週期函數其週期爲 $2\pi i$ (虛的週期!) 這個性質在實數是不存在的。

3. 微分方程

從微分方程的角度來看 Euler 公式也是很自然的。令 $z = x + iy$ 爲任意複數, 由指數之性質我們期待

$$
e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \tag{3.1}
$$

e^{iy} 這項是全新, 如果我們希望指數的運算法則對於複數也成立的話, 那麼第一要務就是釐淸 e^{iy} 是什麼! 由微分方程而言這相當於 (姑且將虛數 i 視爲一個實數)

$$
f(y) = e^{iy} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{df}{dy} = if, \quad f(0) = 1 \tag{3.2}
$$

$f(y)$ 不可能是實數, 因此令

$$
f(y) = g(y) + ih(y) \tag{3.3}
$$

代回微分方程 (3.2)

$$\frac{df}{dy}=g'(y)+ih'(y)=if(y)=-h(y)+ig(y)$$

實部等於實部, 虛部等於虛部, 所以

$$g'(y)=-h(y),\quad h'(y)=g(y)$$

所以 g, h 都滿足二階微分方程

$$g''(y)+g(y)=0,\qquad h''(y)+h(y)=0$$

g, h 之差異可由 $f(0)=1$ 來決定

$$f(0)=g(0)+ih(0)=1\quad\Rightarrow\quad g(0)=1,\quad h(0)=0$$

但這還不夠因爲 g, h 都滿足二階微分方程由 g, h 之關係可得

$$g'(0)=-h(0)=0,\quad h'(0)=g(0)=1$$

整理一下 g, h 滿足二階微分方程的初始值問題

$$\begin{aligned} &g''(y)+g(y)=0, &&g(0)=1,\quad g'(0)=0\\ &h''(y)+h(y)=0, &&h(0)=0,\quad h'(0)=1 \end{aligned}\tag{3.4}$$

由二階微分方程的理論可以證明 $g(y)=\cos y$, $h(y)=\sin y$, 這就是 Euler 公式

$$f(y)=e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

前面的推導過程中我們發現 f 滿足一階微分方程 (係數是複數) 而其實部與虛部則滿足二階微分方程 (實係數), 這完全是合理的, 因爲複數本來就是二維 ($\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$)

4. 三角函數與雙曲函數

Euler 公式告訴我們

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x,\qquad x\in\mathbb{R}$$

因此三角函數可以表示爲指數函數之形式

$$\begin{aligned} &\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\qquad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\\ &\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})} \end{aligned}\tag{4.1}$$

這件事實同時說明 Euler 公式也是三角函數與指數函數之橋樑。利用類比法, 我們可以將三角函數推廣至複數 $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \end{aligned} \tag{4.2}$$

整理就是複數形式的 Euler 公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad z \in \mathbb{C}$$

另外仿定義 (B) 也可以從冪級數的角度定義三角函數

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned} \tag{4.3}$$

而且可以證明 (4.2)。由 (4.2) 不難證明所有的三角公式 (複數的情形!) 例如

$$\begin{aligned} &\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \\ &\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \qquad (4.4) \\ &\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \\ &\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z, \qquad \sin(z - \frac{\pi}{2}) = -\cos z \qquad (4.5) \\ &\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \qquad (4.6) \end{aligned}$$

註解:

(1) 如果 $z = \pi$, 則

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \qquad \text{或} \qquad e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{4.7}$$

這就是 Euler 所說最美麗的公式。我們可以更進一步取對數, 則 $\log(-1) = i\pi$, 負數的對數是一個虛數。實際上對 Euler 而言複數是可以放進超越函數裡面!

(2) 取 $z = \pi/2$ 則

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \tag{4.8}$$

取對數 $\pi = \frac{2}{i} \ln i$ (圓周率 π 可藉由虛數來表示), 或者 (4.8) 兩邊取 i 次方

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2} \approx 0.2078\ldots$$

虛數的虛數次方可以是實數! 這只是其中一個值, 更正確地說

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i\cdot i(\pi/2+2k\pi)} = e^{-(\pi/2+2k\pi)}, \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

回顧一下雙曲函數

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

因此

$$\begin{aligned} \cos(x\pm iy) &= \frac{1}{2}\Big(e^{i(x\pm iy)}+e^{-i(x\pm iy)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{ix}e^{\mp y)}+e^{-ix}e^{\pm y}\Big) \\ &= \frac{1}{2}e^{\mp y}(\cos x+i\sin x)+\frac{1}{2}e^{\pm y}(\cos x-i\sin x) \\ &= \cos x\cosh y \pm i\sin x\sinh y \end{aligned} \tag{4.10}$$

同理可得

$$\sin(x\pm iy) = \sin x\cosh y \pm i\cos x\sinh y. \tag{4.11}$$

在複數的領域我們可以輕易地在三角函數 (圓函數) 與雙曲函數之間作變換。三角函數與雙曲函數之關係如下:

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i\sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z \\ \sinh(iz) &= i\sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z \end{aligned} \tag{4.12}$$

其它雙曲函數的重要性質有

$$\begin{aligned} &\sinh(-z) = -\sinh z, \qquad \cosh(-z) = \cosh z \\ &\sinh(z_1\pm z_2) = \sinh z_1\cosh z_2 \pm \cosh z_1\sinh z_2 \\ &\cosh(z_1\pm z_2) = \cosh z_1\cosh z_2 \pm \sinh z_1\sinh z_2 \\ &\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

關於其它重要性質讀者可參閱複變函數論的書。

除此之外, 還有更出乎意料之外的, 例如三角方程式

$$\cos z = a, \quad \sin z = a, \qquad a>1$$

在複數的情形是有解 (且有無窮多解!) 這在實數的情形是絕對不可能的 (因爲 $|\sin x| \leq 1$), 例如 $\cos z = 2$ 由 (4.10) 得

$$\cos z = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = 2$$

$$\cos x \cosh y = 2, \qquad \sin x \sinh y = 0$$

這組聯立方程式的解爲 $x = 2n\pi$, $\cosh y = 2$, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ 所以

$$e^{2y} - 4e^{y} + 1 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

因此

$$z = \cos^{-1} 2 = 2n\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

三角方程式 $\cos z = 2$ 不僅有解甚至是無窮多解。

5. 在積分之應用

對 Euler 而言複數的積分可以視爲實數的積分, 後來 Poisson, Laplace 更是藉此方法 (複數的變數變換) 計算了許多著名的積分, 這也間接促成 Cauchy 爲了解決積分的問題而創立複變函數論, 也難怪 Hadamard 要說: *複數是通往兩個實數眞理的捷徑*。將 $-p + iq$ 視爲實數, 則由微積分的常識可得

$$\int_0^\infty e^{(-p+iq)x}\, dx = \frac{p + iq}{p^2 + q^2} \qquad (p > 0) \tag{5.1}$$

再由 Euler 公式將 (5.1) 分成實部與虛部

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px} \cos qx dx &= \tfrac{p}{p^2+q^2} \\ \int_0^\infty e^{-px} \sin qx dx &= \tfrac{q}{p^2+q^2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

將 q 視爲變數, p 爲常數, 從 a 到 b 積分

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^\infty e^{-px} \cos qx dx dq &= \int_a^b \frac{p}{p^2 + q^2} dq = \frac{1}{p} \int_a^b \frac{dq}{1 + (q/p)^2} \\ &= \int_{a/p}^{b/p} \frac{du}{1 + u^2} = \tan^{-1} u \Big|_{a/p}^{b/p} = \tan^{-1} \frac{b}{p} - \tan^{-1} \frac{a}{p} \end{aligned}$$

但另一方面變換積分順序

$$\int_0^\infty e^{-px} \int_a^b \cos qx \, dq dx = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} \, dx$$

令 $b=0$, 可得積分公式

$$\int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\tan^{-1}\frac{a}{p}$$

再令 $p\to 0$,

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin ax}{x}dx=\tan^{-1}(\pm\infty)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ \\ -\frac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}$$

把 $a=0$ 也考慮進來就是著名的 Dirichlet 積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ 0, & a=0\\ \frac{-\pi}{2}, & a<0\end{cases}\tag{5.3}$$

例題 **5.1.** 證明

$$\int_0^\pi \cos^n\theta\cos n\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2^n},\qquad n=0,1,2,\ldots.\tag{5.4}$$

解: 這個積分可由複變函數理論的留數定理 (Residue theorem) 而來! 但是藉由棣美弗定理則是比較直觀。首先由等式 $2\cos\theta e^{i\theta}=1+e^{i2\theta}$ 可得

$$2^n\cos^n\theta e^{in\theta}=(1+e^{i2\theta})^n$$

再令 $\theta\to-\theta$

$$2^n\cos^n\theta e^{-in\theta}=(1+e^{-i2\theta})^n$$

兩個等式相加

$$2^n\cos^n\theta(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=2^{n+1}\cos^n\theta\cos n\theta=(1+e^{i2\theta})^n+(1+e^{-i2\theta})^n$$

但是由二項式定理

$$(1+e^{i2\theta})^n=1+a_1e^{i2\theta}+\cdots+a_ne^{i2n\theta}\,,\qquad a_1,a_2,\ldots,a_n,\in\mathbb{R}$$
$$(1+e^{-i2\theta})^n=1+b_1e^{i2\theta}+\cdots+b_ne^{i2n\theta}\,,\qquad b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$$

由於

$$\int_0^\pi e^{i2k\theta}d\theta=0,\qquad k=\pm1,\pm2,\ldots,\pm n$$

故

$$2^{n+1}\int_0^\pi\cos^n\theta\cos n\theta d\theta=\int_0^\pi 2d\theta=2\pi$$

有興趣也可證明 Wallis 積分 $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta = \int_0^\pi \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
$$= \binom{2n}{n}\frac{\pi}{2^{2n}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n}\pi, \tag{5.5}$$

令 $n \to \infty$, 可以證明

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

或者是(Wallis 乘積)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \tag{5.6}$$

例題 **5.2.** 證明 Mehler 公式

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad a, b \neq 0, \quad |b/a| < 1 \tag{5.7}$$

解: 因爲

$$bz^2 + 2az + b = b(z - \alpha)(z - \beta)$$

其中

$$\alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad \alpha\beta = 1$$

但由棣美弗定理

$$\frac{1}{a + b\cos\theta} = \frac{2}{2a + b(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = \frac{2e^{i\theta}}{be^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + b}$$
$$= -\frac{2e^{i\theta}}{b(\alpha - e^{i\theta})(e^{i\theta} - \beta)} = \frac{2}{(\beta - \alpha)}\left(\frac{\alpha}{\alpha - e^{i\theta}} + \frac{\beta}{e^{i\theta} - \beta}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\frac{1}{1 - \beta e^{i\theta}} + \frac{\beta e^{-i\theta}}{1 - \beta e^{-i\theta}}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\beta e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n e^{in\theta}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left[1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\cos n\theta\right] \tag{5.8}$$

因爲 $\int_0^\pi \cos n\theta d\theta = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 故

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

這個積分也可由複變函數理論的留數定理而來! 如果將 (5.8) 最後的等式視爲 Fourier 級數, 則不難猜測留數 (residue) 與平均值 (Fourier 級數之首項) 或質量中心有極密切之關係。

6. 正多邊形與等分圓

當複數被引進數學界之後, 正 n 邊形的作圖問題就可藉助於分圓方程式 (cyclotomic equation) $z^n-1=0$ 來解決。所謂作圖, 按歐幾里德的意義僅限於使用圓規與直尺, 在這種限制之下 (可以證明) 只能作出有理數, 平方根以及經由有限次的有理運算 (即加減乘除之四則運算) 或開方所得的數, 所以一般而言, 三次方根不能以圓規直尺作圖, 這就是三等分一角及倍立方等古希臘問題不能解的原因。關於正多邊形的作圖最著名的就是高斯在18歲時所發現正十七邊形的作圖法, 他對此一發現旣高興又驕傲甚至對朋友說, 將來他的墓碑上要刻一個正十七邊形 ([6])。

例題 **6.1.** 試解分圓方程式 $z^n=1$

解: 可以假設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $0\le\theta<2\pi$, 則由棣美弗定理可知

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=1$$

所以 $\cos n\theta=1$, $\sin n\theta=0$。由正弦、餘弦函數之性質可得

$$n\theta=0,2\pi,4\pi,\ldots,2(n-1)\pi,2n\pi \quad\Longrightarrow\quad \theta=0,\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\ldots,\frac{2(n-1)\pi}{n},2\pi$$

所以方程式的 n 個根爲

$$z=1,\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\cdots,\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

這些點正好把單位圓分成 n 等分, 分圓方程式可以因式分解

$$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)=0$$

因此方程式

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0$$

的根由棣美弗定理可以表示爲 $(k=1,2,\ldots,n-1)$

$$z=z_k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=(e^{i\frac{2\pi}{n}})^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

我們可以跟古典的方法做比較, 考慮 $n=5$, $z^5=1$:

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

摹仿 Lagrange 的方法, 改寫成

$$(z^2+z^{-2})+(z+z^{-1})+1=0$$

令 $u=z+z^{-1}$, $z^2+z^{-2}=u^2-2$ 則

$$u^2+u-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

另外由 u 之定義可知z滿足二次方程式 $z^2-uz+1=0$ 所以

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}$$

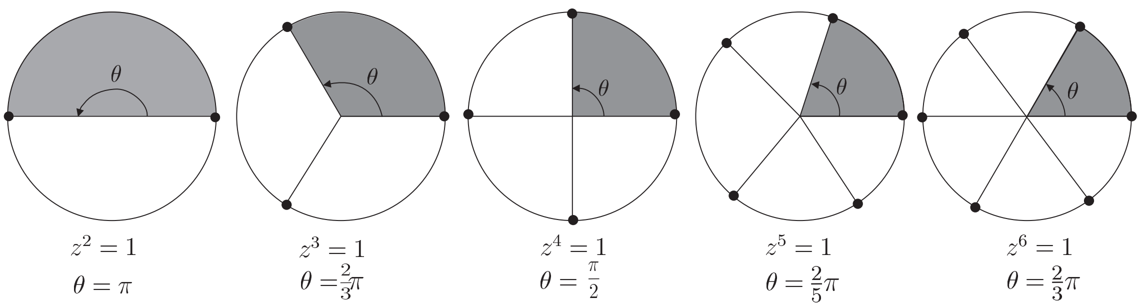
再利用 $u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 可以將 z 表爲與棣美弗定理所得相同之答案, 但如果考慮更高階方程式就不可能像棣美弗定理那麼直接了當給出所有所有的解。我們看方程式 $z^5=1$ 其中一個解

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}, \qquad u=z+z^{-1}=z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

因此

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

所以 $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$因爲 $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ 故 $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 因此這個數可以僅用有限個有理數與平方根來表示 ($\sqrt{5}$ 可以由 1 與 5 的比例中項而得), 換句話說正五邊形 (pentagon) 可藉由圓規直尺作圖而得。



圖一. $z^n=1$ 的根

例題 **6.2.** 試解 n 次方程式 $z^n=-1$。

解: 仍然假設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $0\le\theta<2\pi$, 則由棣美弗定理得知

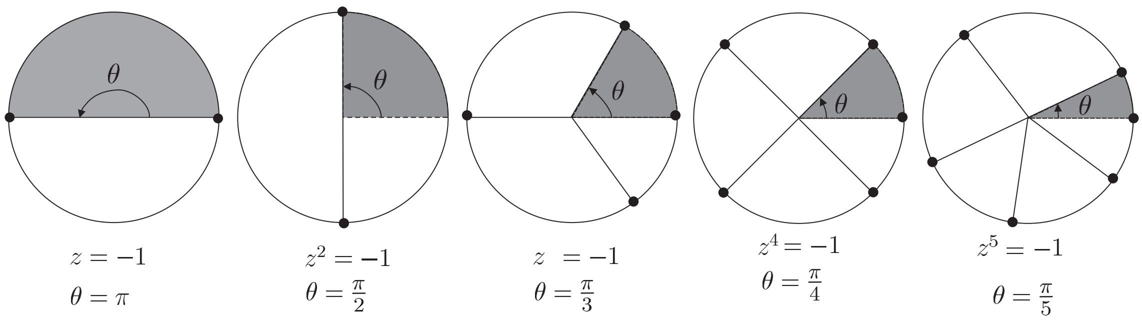
$$z^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)=-1$$

$$n\theta=\pi,3\pi,5\pi,\ldots,2(n-1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{n},\frac{3\pi}{n},\ldots,\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

因此

$$z=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},\cdots\cdots,\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

這些點仍然將單位圓分成 n 等份, 但與 $z^n=1$ 比較則是旋轉了 π/n 角。

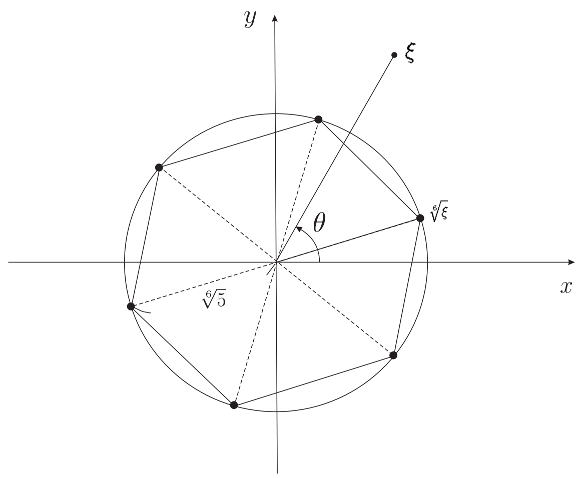


圖二. $z^n=-1$ 的根

例題 **6.3.** 方程式 $z^n=\xi=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的解為 $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$

$$z=\xi^{1/n}=r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}=r^{1/n}\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\sin\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big]$$

從幾何的觀點而言, 複數 $\xi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 開 n 次方根可以解釋為: 以原點為原心, $r^{1/n}$ 為半徑畫一個圓而後在這圓上作一正 n 邊形, 再將此正 n 邊形旋轉至其中一個頂點所在位置之輻角等於 θ/n, 則此正 n 邊形的 n 個頂點所在位置之複數座標就是 $\xi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根。

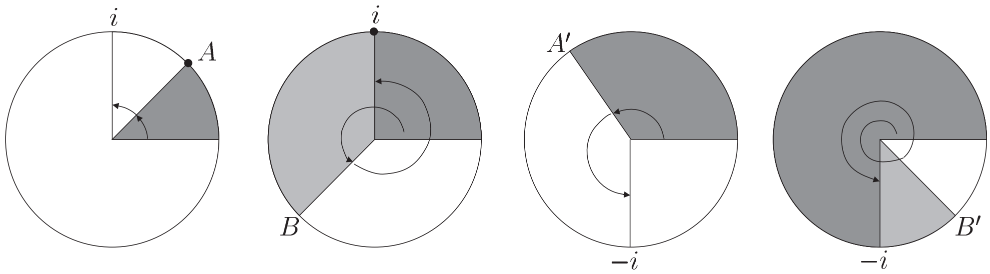


圖三. $z^n=\xi$ 的根

我們看兩個例題: 二次方程式 $z^2=i$ 與 $z^2=-i$ 的兩個根為

$$z_1=e^{i\pi/4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \qquad z_2=e^{i5\pi/4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$
$$z_1=e^{i3\pi/4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \qquad z_2=e^{i7\pi/4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

其幾何意義圖示如下



圖四. $z^2 = i$ 的根 $A, B,$ $z^2 = -i$ 的根 A', B'

關於任意角三等分的問題可以表示爲 $z^3 = \cos\theta + i\sin\theta$, 其三個根分別是

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\theta/3} = \cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3} \\ z_2 &= e^{i(\theta+2\pi)/3} = \cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3} \\ z_3 &= e^{i(\theta+4\pi)/3} = \cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3} \end{aligned}$$

我們可以證明方程式不可化簡 (irreducible), 也就是這三次方程式的根無法經由有限次的開根號表示, 所以三等分任意角 (特殊角除外) 不可能藉由圓規直尺作圖而得。

例題 **6.4.** 試解 $(z+1)^n = z^n$。

解: 顯然 $z = 0$ 不會是方程式的根, 因此方程式可以改寫爲 $(\frac{z+1}{z})^n = 1$ 根據棣美弗定理, 這 n 次方根的解可以表示爲 $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

$$\frac{z+1}{z} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

交叉相乘並利用半角公式整理可得

$$\begin{aligned} -1 &= z\Big(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\Big) \\ &= z\Big(2\sin^2\frac{k\pi}{n} - i2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\Big) \\ &= -2iz\sin\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\Big) \end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i\sin\frac{k\pi}{n}(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n})} \\ &= \frac{\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\cot\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

值得一提的是所有的根都落在 $x=\frac{1}{2}$ 這個軸上。

例題 **6.5.** 證明三角恆等式

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

解: 考慮方程式 $z^{2n}-1=(z^2)^n-1=0$ 這個方程式有 $2n$ 個根, 正好將單位圓分成 $2n$ 等分, 每一等分之角度爲 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$, 方程式除 $z=\pm1$ 以外其他的根爲

$$e^{i(\pi\pm\frac{k\pi}{n})},\qquad k=1,2,\ldots,n-1$$

按因式分解

$$\begin{aligned}z^{2n}-1&=(z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i(\pi+\frac{k\pi}{n})}\right)\left(z-e^{i(\pi-\frac{k\pi}{n})}\right)\\&=(z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2+2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)\\&=(z^2-1)z^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(z+2\cos\frac{k\pi}{n}+z^{-1}\right)\end{aligned}$$

兩邊同時除以 z^n

$$z^n-z^{-n}=(z-z^{-1})\prod_{k=1}^{n-1}\left(z+2\cos\frac{k\pi}{n}+z^{-1}\right)$$

z 位於單位圓上, 因此可設爲 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 則由棣美弗定理可知

$$z^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta,\qquad z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\qquad z^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

代回上式

$$\begin{aligned}2i\sin n\theta&=2i\sin\theta\prod_{k=1}^{n-1}(2\cos\theta+2\cos\frac{k\pi}{n})\\\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\theta+\cos\frac{k\pi}{n})\end{aligned}$$

令 $\theta\to0$, 因爲 $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=n$, $\lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$, 所以

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\cos\frac{k\pi}{n})=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}2\cos^2\frac{k\pi}{2n}$$

因為 $\cos\frac{k\pi}{2n} > 0, (k=1,2,\ldots,n-1)$ 所以開根號得

$$\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

另外由於 $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$ 可容易證明

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

7. **Chebyshev 多項式**

由棣美弗定理與二項式定理可以推導出 Chebyshev 多項式

$$\begin{aligned}\cos n\theta + i\sin n\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \cos^n\theta + n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + \frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2 + \cdots + (i\sin\theta)^n \end{aligned} \tag{7.1}$$

所以 $\cos n\theta$ 就是右邊的實部, 也就是 $i\sin\theta$ 的偶次方之和, 但 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$, 因此所有正弦函數 $\sin\theta$ 都可以變換為 $\cos\theta$, 也就是 $\cos n\theta$ 可以表示為 $\cos\theta$ 的多項式。我們利用這關係式定義 Chebyshev 多項式 $T_n(x)$:

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) \tag{7.2}$$

令 $x=\cos\theta$, $-1\le x\le 1$, 則

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) \tag{7.3}$$

利用共軛之關係可得

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \frac{1}{2}[(\cos n\theta + i\sin n\theta) + (\cos n\theta - i\sin n\theta)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\cos\theta + i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n + (\cos\theta - i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})^n + (\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta-1})^n\Big] \end{aligned} \tag{7.4}$$

$T_n(x)$ 可以寫成

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\Big] \tag{7.5}$$

顯然 $T_n(x)$ 是 x 的 n 次多項式。我們也可以將 (7.1) 表示爲

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos^{n-m}\theta(i\sin\theta)^m$$

令 $m=2k,\ k=0,1,2,\ldots,[n/2]$

$$(i\sin\theta)^m = (-1)^k(1-\cos^2\theta)^k = (\cos^2\theta-1)^k \tag{7.6}$$

所以

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta-1)^k \tag{7.7}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}x^{n-2k}(x^2-1)^k \tag{7.8}$$

Chebyshev 多項式前面兩項爲 $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$ 但是其它項由 (7.8) 直接計算是太過複雜, 正確的方法是導出遞迴公式

$$\cos n\theta = \cos[\theta+(n-1)\theta] = \cos\theta\cos(n-1)\theta - \sin\theta\sin(n-1)\theta$$
$$\cos(n-2)\theta = \cos[-\theta+(n-1)\theta] = \cos\theta\cos(n-1)\theta + \sin\theta\sin(n-1)\theta$$

兩式相加

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta \tag{7.9}$$

這等式相當於

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) \tag{7.10}$$

由此可推得

$$T_2(x)=2x^2-1,\qquad T_3(x)=4x^3-3x,\qquad T_4(x)=8x^4-8x^2+1\cdots \tag{7.11}$$

參考文獻

1. George F. Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1991.
2. George F. Simmons, Calculus with Analytic Geometry, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1996.
3. Eli Maor, *e: The story of a number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994. (中譯本: 毛起來說 e, 胡守仁譯, 天下文化出版, 2000。)
4. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998. (中譯本: 毛起來說三角, 鄭惟厚譯, 天下文化出版, 2000。)

5. Paul J. Nahin, An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.
6. 偉大數學家的一生, 高斯 (Karl F. Gauss 1777-1855), 凡異出版社, 1986。
7. 林琦焜著, 數, 十進位與 *Cantor* 集, 數學傳播 (中央研究院數學所), 24卷4期 (民89年12月), p.76-86。
8. 林琦焜著, *Euler* (1707-1783) – 數學的莎士比亞, 數學傳播 (中央研究院數學所), 26卷2期 (民91年6月), p.39-52。
9. 林琦焜著, 從三角求和公式到 *Fourier* 級數, 數學傳播 (中央研究院數學所), 26卷3期 (民91年9月), p.11-29。

—本文作者任教於國立成功大學數學系—