從可操作動態視覺化基本函數之微分設計談動態微積分新的學習方法

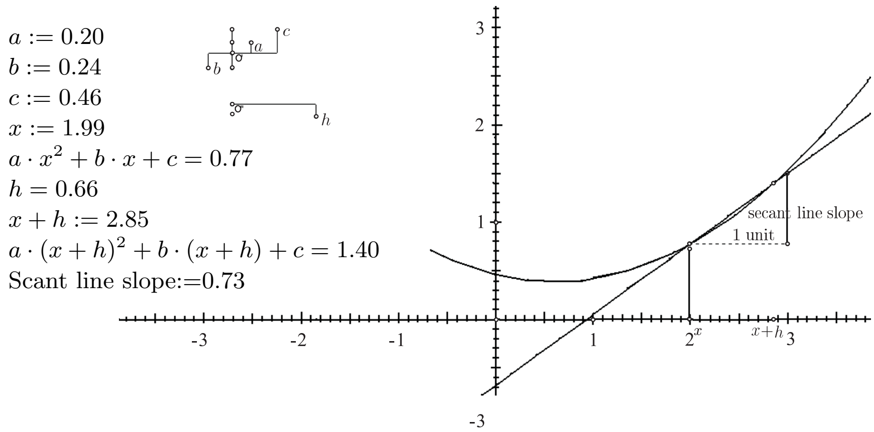
謝哲仁

對函數做導數的操作, 可以對某一特定值, 或整體函數爲之。但學生通常視這是兩個不相干的學習單元。這種學習落差, 可能來自於現有課程的解說是靜態, 不容易將函數對某一特定值的導數, 過渡到整體導數的結果。從認知心理學的角度, 就是過程 (process) 與完形結果 (product) 的差異。另外, 在基本函數, 對某一特定值求導數時, 現有的課程說明或電腦軟體設計, 雖輔以用圖形上割線來逼近切線, 但缺乏直接以函數動點及利用滑鼠直接操作圖形上的動點來逼近此特定值的實作經驗, 進而, 形成更有力的心象 (image)。因此, 利用現有的科技圖形軟體, 來設計學習基本函數的導數, 仍有許多提升的空間。

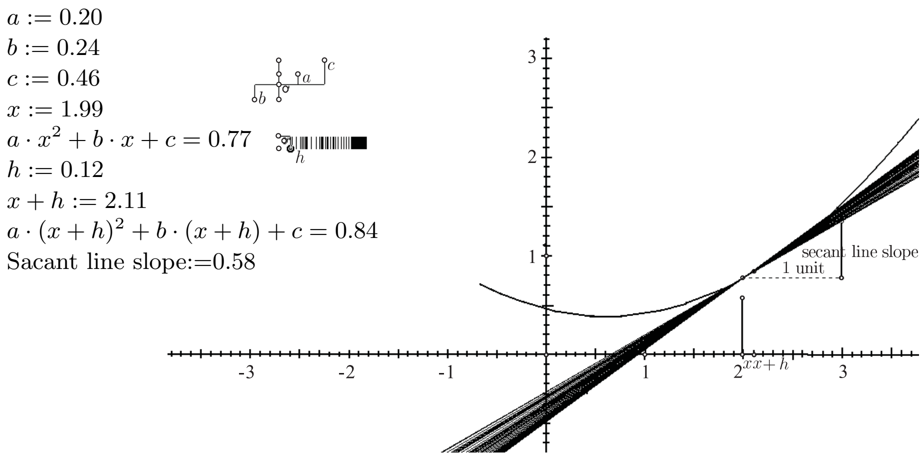
電子幾何板 (Geometer's sketchpad, GSP), 是一個以幾何爲主的電腦軟體。可以建構一般的點、線、圓。物件一旦被建構後, 可以利用滑鼠直接移動物件, 其被建構的幾何關係 (子母關係) 如線段垂直、比例將被保留。學習者因此可以在其建構的物件中, 尋找不變性, 進行不同數學單元的學習 (林保平, 1996; 謝哲仁, 2000, 2001, 2002a, 2002b)。利用此特性, 我們可以建構對函數的學習 (Lin & Hsieh, 1993; Hsieh, 1993, 2002; 謝哲仁、黃玉玲, 2002), 及更富挑戰性的 — 函數導數的學習。

首先我們在 GSP 上, 設定參數 a, b, c 及 h, 在 x 軸上取一動點 x, y 軸上我們可建立一些基本函數, 例如圖一是 $y=f(x)=ax^2+bx+c$, 其中 a, b, c 是可改變的參數, 以線段長短表示大小, 原點的左右方向表示負、正值。在 x 軸上, 利用向量的方式取點 $x+h$, 這時利用比率計算的結果, 做出 $f(x)$, $f(x+h)$, 連接 $(x,f(x))$, $(x+h,f(x+h))$ 兩點的直線, 使之成爲二次函數的割線, 並取割線的斜率值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 我們令 $\Delta x=1$, 以 Δy 的高度來表示在 $(x+h,f(x+h))$ 點的割線斜率值。當使用者用滑鼠操作 h 值, 並使 h 值趨近於 0 時, 便能察覺割線是如何逼近切線的, 且 Δy 的高度就是切線斜率值, 也就是在某一特定點 x 的導數 (如圖二)。這也就是函數 f 在 x 的導數 $\lim_{\Delta h\to 0}\frac{f(x+\Delta h)-f(x)}{\Delta h}$ 可直接操作的動態視覺化的設計。這時我們再移動 x, 把在不同的 x 值時的切線斜率值蒐集, 變成爲圖三新的直線物件

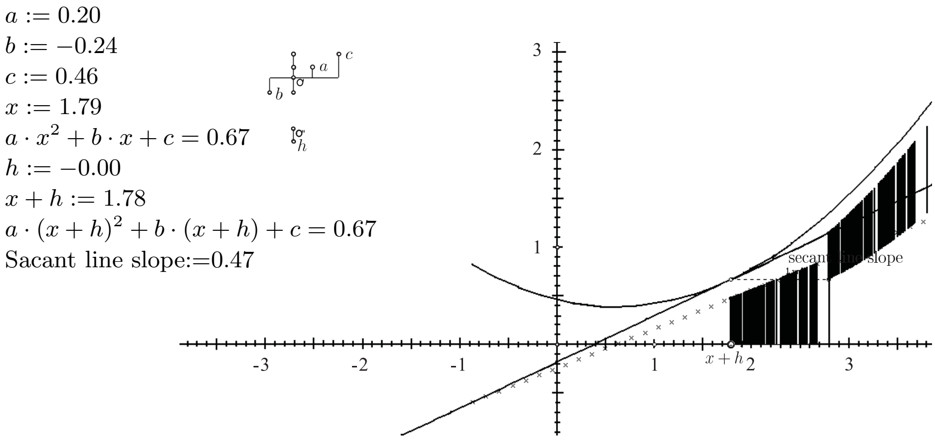
$y=2ax$ 的圖形, 這也就是函數 f 的導數物件 $\frac{d}{dx}f(x)$ 可直接操作的動態視覺化的設計。函數物件的導數結果也是一新的函數, 我們先以點所成的集合圖形方式來表示, 之後, 我們可以再改變參數 a, 而其對應的函數圖形及導數也隨著改變如圖四。而圖五、圖六、圖七則是基本函數指數函數 a^x、對數函數 $\log(x)$ 及三角函數 $\sin(x)$ 等函數求導數的結果, 比較特別的是 e^x, 其微分的結果就是本身, 這點我們也可以從指數函數 a^x 微分的結果圖形看出, 當 a 逼近 2.72 以後, 兩個圖形會互相結合為一。



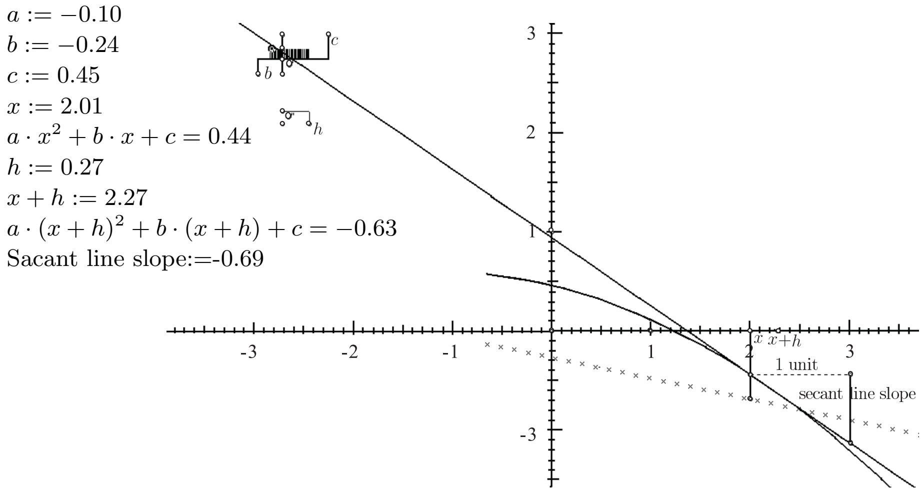
圖一. 二次函數求導數的動態設計



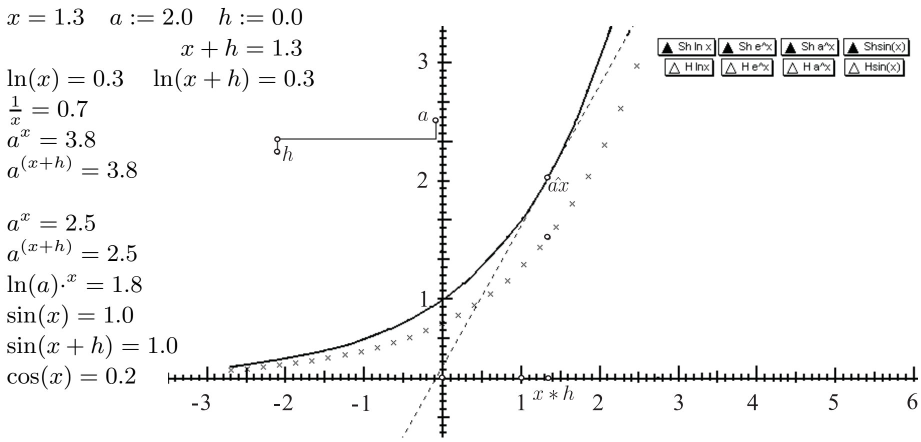
圖二. 割線逼近切線的情形



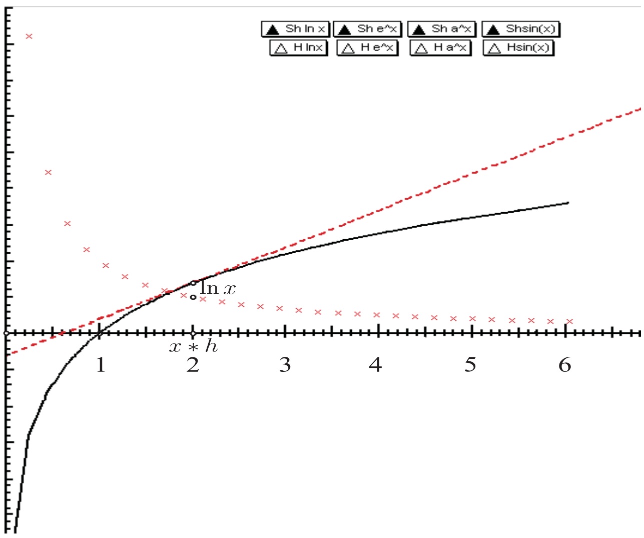
圖三. 可用滑鼠直接移動 x 軸上的 x, 這時各個不同的切線斜率值, 被主動的蒐集形成新物件函數



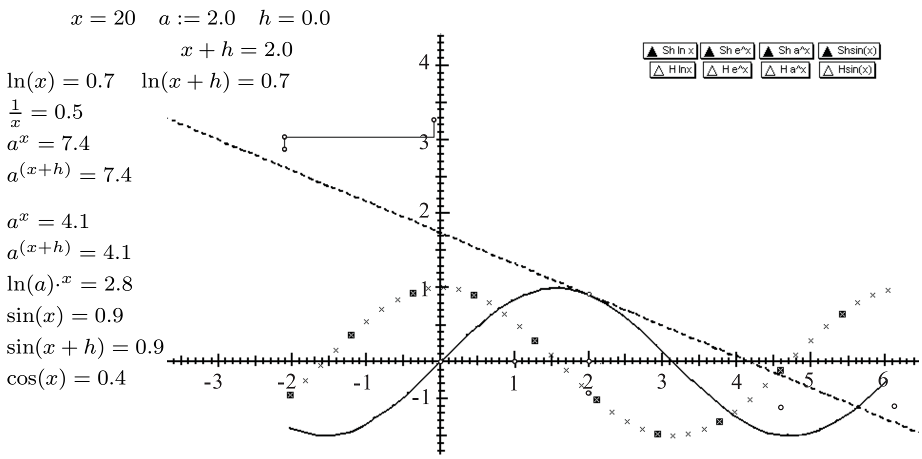
圖四. 改變 $y = ax^2 + bx + c$, 可以視覺導數的改變



圖五. 指數函數 a^x 的微分結果



圖六. 對數函數 $\ln(x)$ 的微分結果



圖七. 正弦函數 $\sin(x)$ 的微分結果

人類對於外界訊息的吸收儲存的方式有聲碼 (acoustic code)、文字碼 (verbal code) 及視覺碼 (visual code) 三種形式。Paivio (1986) 曾提出雙碼理論 (dual-code theory), 認爲學習者對外界事物可以分別建立視覺和語文的心理表徵, 兩者雖是分開卻是相互關聯, 假如一個人對訊息的儲存方式有雙碼, 將有助於資訊的記憶與回憶。近來亦有學者 (Kaput, 1987, 1989, 1992), 利用多重表徵的設計來學習數學, 諸如數值、代數、圖形。可惜, 愈高階的數學, 就愈少被發表。這當然涉及知識系統的建構 (construct) 與表徵 (re-presentation), 不過就任何數學概念的表徵, 我們總期待能由淺入深、由具體到抽象。Mundy (1984) 曾以 $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$ 測驗 973 位修過微積分的學生, 只有 5.4% 的學生答對。Mundy 認爲學生未能以視覺化理解積分

是求曲線下的面積。Dick (1988) 接著發現學生可以描繪 $y=|x-2|$ 的函數圖形, 僅有 44%, 他研究的大學生會計算 $\int_{3/2}^{3}|x-2|dx$, 其中的 72% 的學生是以 $\int_{3/2}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$, 28% 的學生是用圖形的方式求出正確答案, 就算是研習高等數學的大學生, 大部份仍無法以視覺爲基礎來運思 (operation) 問題。學生除了依其慣性在運思, 另一種解釋則是認知處理的選擇問題。例如, 對於 $\int\frac{3x}{x^2-1}dx$, 學生不採用較簡單的變數代換法, 而採用較爲複雜的部分分數法, 甚至採用三角函數法, Shoenfeld (1985) 從認知處理的觀點, 認爲是學生的控制選擇 (control) 出了問題。

Vinner (1989) 也曾將微積分的基本概念諸如連續、導數、遞增、極值、定積分視覺化, 在課堂上分別用代數符號及視覺符號來解釋概念, 在授課結束後的問卷時要求學生證明 $(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)f(b)$ 當 $f(x)$ 是嚴格遞增的正函數及寫出並證明均值定理。結果發現學生即使被敎過或以視覺分析概念, 但仍傾向代數思考。由以上的發現和研究, 不難推論, 我們大部份學生的思考仍是單元的代數表徵式的, 並無法彈性的應用圖形表徵的方式來運思。而如果學生數學解題策略來自於課程或教師, 顯然, 我們教師或課程的設計者, 有待努力。但檢視現有的微積分課程, 又多是以圖形的方式來說明或解釋重要概念。因此, 眞正的問題, 應是如何善用科技, 搭起學習的鷹架 (scaffolding)。

葉東進 (1990) 利用套裝軟體 SYMPHONY 以及 C 語言設計一些基本的數學素材, 在其設計環境中, 可視覺代數符號的意義, 因此藉由觀察與發現, 學習者可視察其動態變化的一些效果。例如平面上給定兩定點, 可觀察如果動點 p 到這兩定點的距離和是一常數, 則動點 p 所成的軌跡是一橢圓。動態的視覺效果讓我們可以免去認知處理資訊的負擔, 又可增進我們認知的想像力。但此種設計, 尙缺認知科學所強調的有意義的行動 (action), 及對行動的反思 (reflection)。經由直接操作物件 (圖形) 的結果, 可以試測一些假設, 或尋求動態物件或行動後所產生的不變性 (數值的), 進而建立強而有力的代數表徵。此種有意義的自我學習, 跳脫傳統式的 — 由教師把知識傳遞給學生, 而學生只是模仿教師或課本的解題策略而已。而經由這種多元表徵的相關性理解 (relational understanding), 其數學資源庫 (resource) 的建立將更形豐富, 在而後數學解題的情境中, 其處理與控制選擇自然更有彈性。

因應科技的日新又新, 及美國數學協會最近高舉的 “全民數學” (mathematics for all) 主張, Goldenberg (1996) 也認爲傳統的數學課程偏重知識內容獲得的訓練應有所改變, 要達到全民數學的理想, 唯有善用科技的學習, 使得一般的學生能培養下列新的習慣 (1) 視覺化新情境 (2) 正式或非正式的描述數學 (3) 在呈現的字句與視覺化間作轉譯 (4) 更深入的思考問題 (5) 尋找不變性 (6) 實驗與演繹應並重 (7) 對觀察的不變性能有更系統的解釋及證明 (8) 能夠建構及推理數學的方法 (9) 持續性的推理。

Cuoco 和 Goldenberg (1996) 認爲數學課程必須含有允許學生實驗活動並建立模型來幫忙解釋數學概念。科技可以被有效的使用幫助學生蒐集資料、測試修改推測、尋找不變性、視覺變化及連續的驗證。

學生可以合作的形成假設; 計劃調查; 資料觀察推測—蒐集、組織、分析、建構模型; 選擇工具呈現資料; 測試個別資料; 愼選變數; 結論, 歸納結果; 形成新問題。這種新數學學習法, 可以改變過去太強調的演繹證明、微積分只是一堆公式的堆砌與計算的刻板印象, 改爲以主動積極的探測及對於行動結果的反思。良好的電腦設計, 必須搭配適當的學習方法, 方能收到事半功倍之效。

参考文獻

1. 林保平, 動態幾何軟體在教學上的應用。八十四學年度輔導區地方教育輔導教師研討活動論文集, 1996, 128-152頁。
2. 葉東進, 數學實驗-高中數學的啓發式教學, 科學教育月刊, 130期 (1990), 2-21 頁。
3. 謝哲仁, 電子試算表在高中數學教學之可行性研究, 美和技術學院學報, 第18期 (2000), 118-128 頁。
4. 謝哲仁, 動態電腦幾何教學建構之研究, 美和技術學院學報, 第 19 期 (2001), 142-160 頁。
5. 謝哲仁, 基本統計學之動態電腦教學設計, 美和技術學院學報, 第 20 期 (2002), 186-201 頁。
6. 謝哲仁, 動態電腦幾何教學建構之設計實例與理論探析, 國立嘉義大學數學教育研究所: 革新國民中小學數學教育議題, 2002 年, 225-244 頁, 高雄: 復文出版社。
7. 謝哲仁、黃玉玲, 動態函數及其運算之教學設計理論與示例, 美和技術學院學報 (2002), 186-201 頁。
8. A. Cuoco, and Goldenberg, A role for technology in mathematics education. *Journal of Education*, 178 (2)(1996), 15-32.
9. T. Dick, Student use of graphical information to monitor symbolic calculuations, Unpublished manuscript, Department of Mathematics, Oregon State University, 1988.
10. E. Goldenberg, "Habit of mind" as an organizer for the curriculum, *Journal of Education*, 178 (1)(1996), 13-34
11. C. J. Hsieh, Dynamic visual computer designs with learning theory, *Journal of Mei Ho Institute of Technology*, 20(2002), 218-246.
12. C. J. Hsieh, *Learning about linear function in a dynamic, visual computer environment*, Unpublished Dissertation, University of Georgia, 1993.
13. N. Jackiw, *Geometer's Sketchpad*, (computer program), Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1991.
14. J. Kaput, Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representations in mathematics learning and problem solving.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

15. J. Kaput, Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates, 1989.
16. J. Kaput, Technology and mathematics education. In Grouws, D (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 515-556) New York, Macmillan, 1992.
17. P. P. Lin and C. J. Hsieh, Parameter effect and solve linear equations in dynamic, linked, multiple representations environment. *The Mathematics Educator* 4(1)(1993), 25-28.
18. J. Mundy, Analysis of errors of first year calculus students. In A. Bell, B. Low and J. Kilpatrick, (Eds.) *Theory, research and practice in mathematics education*, Proceedings of Fifth International Conference for Mathematics Education. Nottingham, U. K.: Shell Center, 1984.
19. A. Paivio, *Mental representations: A dual-coding approach*. Oxford, England: Oxford University Press, 1986.
20. A. Schoenfeld, *Mathematics problem solving*. Orlando, FL: Academic Press, 1985.
21. S. Vinner, The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1, 2)(1989), 19-156.

—本文作者任教於屏東縣美和技術學院—