

# 可積的動力系統

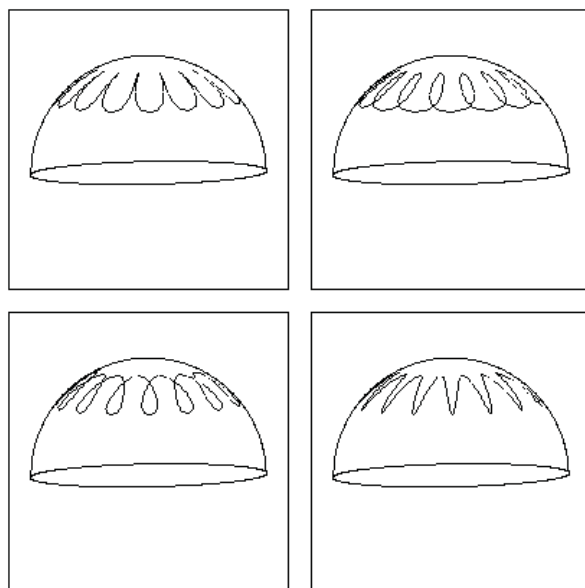
平斯

若只有一個，可以說是僥倖，但是同時有兩個就絕非尋常，美國數學學會的機關刊物「數學匯刊 (AMS Transaction)」是個水準很高的雜誌，許多數學家初試啼聲的學位論文，都發表於此。固然這個雜誌的總編是由會員普選產生，但向來另外羅致碩學多識的人士，擔任編輯群，在幾年前曾同時列名了李文卿與張聖容，身列為編輯，當然是因她們在數學各別領域裡的優秀表現所帶來的責任。特殊的是這兩人是台大的同班同學，其實當時還有另一個同學金芳蓉，不屑如此花功夫勘式審文，只競選學會理事，包括這些與其他的這批同學，活躍一時，其來有自。

目前是「伊利諾數學雜誌」編輯群的吳徵眉，三十多年前聯考放榜時，以第一志願高取台大數學系榜眼，當新生報到時，依序排出學號，竟然也只在十號靠外的邊緣，原來全省自北至南，幾乎所有知名女高校的保送花魁，全都進了該系。保送也好，聯考也好，畢業後幾十年來的努力，大家都頭角崢嶸，合力撐起了半邊天。

在歷史上，傑出女性數學家的遭遇，全然不是在今天這麼回事，最著名的例子，是蘇菲亞·柯瓦列夫斯基 (Sonja Kovalevsky) [註一]，她是個十分出色的數學家，但因為只是外爾司錯 (Karl Weierstrass) 的私塾弟子，許多自己嘔心瀝血的創見，居然被懷疑是代工而不被承認，謀職的時候更是受盡打壓，只能以半薪受聘 [註二]。即便近日提及，也得掀翻她流傳至今的風月故事 [註三]。在她許多的成就中，有一項得博丹獎 (Prix Bordin) 的，是解出陀螺旋轉的運動方程式。這個博丹獎也頒給了雅培 (Paul Appell) 在前，阿達瑪 (Jacques Hadamard) 在後，全是解析力學有重要貢獻的數學家。

陀螺的旋轉，可用地球繞太陽的運動來比擬，由兩部分合成：一是自轉，用角位移函數  $\omega$  描述；另外自轉軸又對黃道面之垂線公轉，一端是固定點，另一活動端則落在一個球面上，可用柱面坐標  $(r, \theta)$  來描述這端的位置。因此  $(\omega, r, \theta)$  是描述運動所需的三個時間變量，如果整個系統只有陀螺本身的重力，沒有其他外力，則自轉，公轉的角動量與總能量全都守恆，這三個恆等式可用來解轉動的三個變量，這些解都需要做橢圓積分，正好她的師尊發明了這樣的橢圓函數，隨手拈來，自然天成。依照不同之守恆量，自轉軸活動的端點在球面上畫出的軌跡，可能是一個點，一個圓周，或各式的擺線：正擺線，內擺線，外擺線等。



圖一

與此類似的還有球面擺，其擺錘在一個球面上運動，也畫出一條擺線，把上述的圖倒轉過來就是。設若再簡化成平面擺，亦即佛科擺 [註四]，則擺線對鉛垂線的角位移  $\omega$ ，符合運動方程式

$$\omega'' + \sin \omega = 0$$

檢討起來，陀螺的旋轉問題之所以可解，是因為整個系統有足夠的對稱，正如個別行星圍繞恆星運動的雙體問題可解。但是牽涉到太陽、地球、月亮的三體問題，因為對稱解體，缺乏足夠的守恆律，來消去太多糾纏不清的變量，所以無解，守恆律來自系統對稱，是著名的“諾特定理”。愛米·諾特 Emmy Noether 師承不變量大師戈登 Paul Gordan，利用物理現象不因觀測坐標而改變的原理，再因所有坐標的可能選擇，如旋轉及平移，是個李群的結構，她因而導出守恆律就是這個李群作用下的不變量，由於上述定理有效廣泛的應用，在物理學裡名聲響亮，但是後來順應形式主義潮流，拋棄師傅，不再用繁複的公式計算，只用抽象定義來推演，例如提出有限漸增條件 ACC 來釐清“算術基本定理”；被稱為近世抽象代數的奠基人之一。千禧年適逢東吳大學慶祝建校百年，在嘉年華會裡，數學系共襄盛舉，展出一系列回顧二十世紀著名數學家的肖像，其中一楨就是諾特。一個理論力學的資深物理教授，端詳半嚮後若有所悟：“原來這個諾特是個女性數學家！”這件連她自己也要刻意隱藏的事實，今天可能讓我們對她多加一分敬意，但是當時，對她卻是百般障礙，比柯娃列夫斯基更淒慘，在哥廷根大學最初連半薪的聘書都沒有，她被拒絕聘用的藉口是：在德意志帝國轄內，校務會議不可能有女性成員，這引得希爾伯特 (David

Hilbert) 的名言: “畢竟校務會議又不是澡堂”, 於是借牌給她收學生開課, 這是歷史上女性數學家, 遭受歧視的另一個著名例子 [註五、六]。

將單擺方程式擴充在二維, 等式右邊加上空間變數的二階偏導數, 此即是著名的 sine-Gordon 方程式。

$$\omega_{tt} + \sin \omega = \omega_{xx}$$

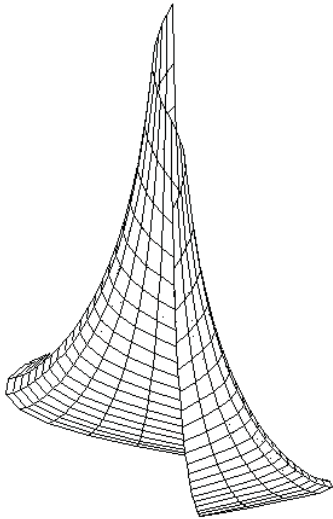
這個奇怪的名稱, 模仿自量子場論的 Klein-Gordon 方程式

$$\omega_{tt} + \omega = \omega_{xx}$$

其來源各家自有說法, 數學方面說是源出 Kruskal [註七], 物理方面則號稱是 Finkelstein 與他的博士班學生開玩笑, 不料弄假成真, 而得此名 [註八]。濫觴所及, 幾何學裡建構常均曲率曲面, 用到另一個非常類似的, 就叫 sinh-Gordon 方程式

$$\omega_{tt} + \sinh \omega = -\omega_{xx}$$

從分析的觀點看, 這些形式相同, 名稱上也押韻的式子, 都有孤立子解。被視為廣義的可積動力系統。但與古典的三體問題相反, 守恆律卻多得很, 找解也不難, 可用逆散射法求解, 正如中研院數研所李志豪與他的同門師弟師妹們所作的研究, 然而整個系統的對稱群卻莫明其詳, 因為問題根本來自幾何, 因此求解還得回到幾何: 一個在  $(x, t)$  面上的度量



圖二

$$ds^2 = \cos^2 u dx^2 + \sin^2 u dt^2$$

其高斯曲率為負一的充要條件即  $2u = \omega$  是一個 sine-Gordon 方程式的解。例如

$$u = 2 \tan^{-1}(\exp(ax-bt)), \quad a^2 - b^2 = 1$$

這樣的度量, 實現在一個三度空間裡的曲面上, 因高斯曲率為負一, 故稱偽球曲面。並且從一個開始, 經過一些複雜的演算, 可以造出許多其他五花八門的偽球曲面, 數學家 R. Palais 把它們收集在 3D Film Strips 的一個網頁裡, 掛在台大數學系的英文版首頁 [註九], 非常值得上網瀏覽一番。既然偽球曲面落實了微分方

程式的解, 反過來, 當初製造偽球的演算, 就應該構成對稱群。這就是滕楚蓮所作的 [註十], 基本上, 她先在這個幾何問題上蹲點, 總結了經驗後, 再用近代無限維李群的語言, 翻譯古典的理

論，使得諾特定理在理論力學的典範敘述：“守恆律來自系統對稱”有全新的詮釋。她的師祖葛利生 Andrew Gleason 正是解決希爾伯特第五道問題的數學家 [註十一]，這個問題在刻畫李群：同時具有代數結構與相互呼應的幾何結構之集合，雖然不具操作的實體，仍然是個李變換群。

因此可謂一脈相承，與她合作研究的，除了大師如陳省身之外，有些也是女性數學家；早些年，女權主義盛行的時候，有自稱三劍客的科學家，合寫了一本介紹數學物理的書 [註十二]，結尾畫了一幅自畫像，竟是三名穿著裙子，耀武揚威地跨騎在蝸牛背上的女子，當時盛況，略可與今相互媲美。滕楚蓮是上述諸台大同學晚一屆的保送生，後來也曾接著做了「數學匯刊」的編輯；學問如何好是一回事，熱心提攜後進是另一回事，她最為人樂道的是，曾為國內的年青數學家，努力爭取機會，出席國際數學會發表論文，夫以身居津要之便，折衝樽俎之間，而利計鄉梓，此孟嘗之功業也，豈必鬚眉。從蘇菲亞，愛米到今天，一路走來的不祇是一段漫長遙遠的路程。

[註一] 李志豪：蘇菲亞柯瓦列夫斯基與數學界，數學傳播季刊，36期，21-29頁。

[註二] 顏一清：蘇菲亞可巴雷斯卡亞的世界（上），數學傳播季刊，76期，43-50頁。（下），數學傳播季刊，77期，47-54頁。

[註三] Jackson, A. 刊於 AMS Notice 46卷，(1999)，1051頁。

[註四] 張海潮：Foucault 和 Levi-Civita，數學傳播季刊，92期，3-5頁。

[註五] Reid, C. 著，Hilbert，143頁。

[註六] 顏一清：Emmy Noether 的一生，數學傳播季刊，84期，3-17頁。

[註七] Abraham, Marsden 合著，Foundations of Mechanics，462頁。

[註八] S. Coleman 著，Aspects of Symmetry，262頁。

[註九] <http://www.math.ntu.edu.tw/~palais/>

[註十] 滕楚蓮刊於 J Diff Geometry，45(1997)，407-445頁。

[註十一] 楊忠道：我的師友，數學傳播季刊，102期，28頁。

[註十二] Choquet, Dewitt, Dillard 合著，Analysis Manifolds and Physics，(1977).