

探求「無限」奧秘的數學家 —— Srinivasa Ramanujan (上)

顏一清

1. 引子

印度數學在第 4 世紀至第 12 世紀間曾經蓬勃發達過。它有別於希臘數學與中國數學，獨樹一幟，著重在數式運算方面。其間有名的數學家有 Aryabhata (約 476-550), Brahmagupta (588-約 660) 與 Bhaskara (1114-1185) 等人。我們現今使用的簡便好用的數字便是印度數學所賜。印度數字後來傳到阿拉伯，稍經修改後再傳入歐洲，沿用至今。

12 世紀以後印度數學沈寂了長久的一段時間。一直到 20 世紀初在南印度出現了一位自學的數學家，叫做 Srinivasa Ramanujan。他在數論方面大放異彩，令人刮目相看。

Ramanujan 出生在南印度 Madras 附近的窮困婆羅門人家。他從小記性與計算能力好極，15 歲時朋友介紹他看 G. S. Carr 的一本公式集。從此他被這本書迷住了，自己證明那些公式，並且學著用它簡單的表達方式。Ramanujan 有兩本筆記本寫滿了他的數式心得。照他的說法，他的女守護神 Namagiri 常常會指引他作數學。

Ramanujan 唸大學時本來有獎學金，後來因太專注於數學，英文作文不及格，獎學金被取消，他受不了打擊，從家中出走。後來回家重唸其他學校，但又因數學以外全不及格而輟學。

他的母親為定下他的心，讓他娶遠房 9 歲的小新娘。他確也覺得自己成年了，夾著他的兩本筆記本到處求職，筆記本是要人家看出他是有數學運算能力的人，希望能得到一份適當的工作，可有餘暇做他喜愛的數學。經由有心人士的安排，他確也得到一份工作，在 Madras 港務信託工作了一陣。他交出的報告中往往夾帶著一些數學式子，上面的人也都很大方，不會介意那些。

那時候 Journal of the Indian Mathematical Society 剛剛開始發行，Ramanujan 便投稿，出些題目或解出雜誌中的題目而逐漸有了名氣。有識之士看到這些，覺得 Ramanujan 應該受到適當的栽培，便教他寫信給英國的名數學家（當時印度還是英國的殖民地）。

Ramanujan 挑了三名英國名數學家 H. F. Baker, E. W. Holson 與 G. H. Hardy, 給他們寫信。前兩人沒有回信。第3位 Hardy 當時是英國頂尖的解析學家。Hardy 認真地看 Ramanujan 信中的許多公式。那裡面有些是既知的, 有些 Hardy 導得出來, 有些看起來很奇特。Hardy 認為這些應該都是 Ramanujan 本人做出來的。雖然式子中錯誤不少, 但看來 Ramanujan 該是創意極高的人。於是 Hardy 回了信, Ramanujan 得到鼓舞, 又寫信給他。Hardy 慫恿 Ramanujan 到他所在的劍橋大學三一學院一起作研究。那是有困難的。不過 Ramanujan 終於排除困難來到英國, 跟 Hardy 共同作研究。Ramanujan 有許多創意, 而 Hardy 看它們的可行性與否。他們一共合作了5年 (1914-1918) 之久。

但是第一次世界大戰在 1913年爆發。德國人後來封鎖英吉利海峽, 切斷英國的補給線, 使得英國的物資很缺乏。而 Ramanujan 到英國後毫不改他的信仰與生活方式。他是純素食者, 好多東西都不吃, 因此他逐漸營養不良, 進而生病住院 (1917年春), 醫生的診斷是肺結核。

由於 Ramanujan 多篇發表出來的作品, 受到肯定, 1918年間他陸續獲得皇家學院院士 (Fellow of Royal Society) 與三一學院院士 (Fellow of Trinity College)。這些獎對印度人是首例。得獎使 Ramanujan 的心情好起來, 病也有起色了。

戰爭在 1918年11月11日結束。航海的危險性沒有了。Ramanujan 於是在 1919年3月13日搭船回印。回到故鄉後他受到英雄式的款待。他們給他最好的醫生與診治, 但是 Ramanujan 的病情越來越壞, 終於在 1920年4月26日不治。

Ramanujan 在病榻上還是不斷研究數學, 寫成的紙張可收成另一本筆記。它和他的兩本筆記本至今仍有專家學者們研究, 寫成書。他的研究主要在數論方面, 但是如今他的成果還可以使用到應用科學, 如力學、結晶學與電腦科技方面。

年輕的印度人認為他是好榜樣, 陸續有人效法他, 而使印度數學發達起來。

2. 成長時期

K. Srinivasa Aiyangar (1863-1920 11月) 與 Komaltammal (1868 1月28日-?) 是南印度地方窮困的婆羅門族夫婦。他們結婚數年不育, 便聽從 Komaltammal 的母親 Rangammal 的話, 多次向 Namakkal 地方的女神祇 Namagiri (獅王 Narasimha 的配偶) 祈求得子。終於 Komalatammal 有了身孕, 便隨當地習俗在臨盆前回到 Erode 娘家, 於 1887年12月22日生下一男嬰, 命名為 Srinivasa Ramanujan。一年後母子回到 Kumbakonam 的丈夫家。

他們的家計是由丈年長久在一家紗麗布店做店員, 月薪 20 rupee 來維持, 而太太在附近的寺廟裡參加歌詠隊。唱歌的報酬由寺廟與歌者平分。一個月也有 5 至 10 rupee 之譜, 這對他們的家庭不無小補。

但是在 1889年12月 Komalatammal 難得地沒去歌唱。歌唱領隊便去她家探望。近門處她發現有一堆 margosa 樹葉, 那表示家裡有人得天花, 而兩歲的 Ramanujan 躺在樹葉上, 他母親邊唱歌邊拿葉子用浸過鬱金粉的水沖洗他因發痘紅腫的小身體。Ramanujan 就這樣病好了, 也沒有留下疤痕。

在陰濕高溫的印度, 小孩子的死亡率很高。Ramanujan 之後出生的一弟與二妹都夭折了。1898年與1905年 Ramanujan 才得到兩個弟弟。所以 Ramanujan 長期如獨子般在母親呵護之下長大, 他從母親學到生活、信仰方面的細節。他長相、體格都像母親, 長得矮胖, 也跟母親親近。Namagiri 早成爲他家族信奉的守護神了。

不過 Ramanujan 的個性有很拗的一面。小時候吃的東西不如他的意, 他會跑去街道上的泥漿裡翻滾。他三歲才會講話, 個性安靜, 喜歡想事情, 會問大人如: 世界上的第一個人是誰等問題。

當時婆羅門階級的人不再全是高高在上的統治階級的人了。他們三教九流都有, 有賣茶的、理髮的、教師、高等官員等。不過他們很保守, 交往都在婆羅門圈子內, 像買菜, 吃東西都去婆羅門階級開的店。他們雖然已經沒有已往印度最高階級的光彩, 但是一般來說他們受的教育較高, 在地方, 政府的地位也較高。由名字最後一個字可以識別他們階級的類別。Ramanujan 往後來往的人也大都屬於婆羅門階級。

Ramanujan 母親祖先是梵文學者, 得過當時的國王賞賜。

1911 年左右印度 Tamil 地方受過教育的婆羅門男性懂得英語 (統治國英國的國語) 的只有 11%。不過懂得它容易進階, 收入又好。

Ramanujan 的父母親很窮, 懂 Tamil 母語, 不懂英語。Ramanujan 母親懂得一點天文。

1892 年 10 月 Ramanujan 進入 Kumbakonam 附近的學校, 幾年間因他母親帶進、帶出而換了幾所學校。不過他在 1897 年 11 月, 10 歲年紀就考過英語、Tamil 語、算術與地理, 是地方上第一名的成績。1898 年 1 月他以優異成績考進當地的英語中學 Town High School。它離家裡只有數分鐘距離。

二年級時同學們開始請教 Ramanujan 數學問題。到了三年級他便會向老師挑戰了: 老師說任何數除以它本身成 1, 他便問零除以零會成爲 1 嗎?

Ramanujan 家爲了增加收入, 也讓學生住宿。住在 Ramanujan 家的兩個婆羅門族大學生知道他對數學有興趣, 便教 Ramanujan 他們所知道的數學知識, 但是幾個月後他們便技窮, 沒轍了。Ramanujan 慫恿他們從大學圖書館裡借數學書給他。其中有一本是當時南印度學校裡通用的 L. Lonley 的 1893年版 “Trigonometry”。Ramanujan 13 歲時已經熟稔它的內容了。他又從一個年長的學生學到了 3 次方程式的解法。Sine, cosine 函數他是以無限級數的形式來了解的。他可以算出 π 與 e 的數值到好多位。考數學他只要一半時間就做完。高他二年級

的學生給 Ramanujan 他們認為的難題他一瞄就會。逐漸地，大家對他有一份敬畏感。唸中學期間他走路都有風，不是衣服上別著獎牌便是手裡拿著獎品的英文詩本走動。

1904 年 Ramanujan 得了 K. Ranganatha Rao 獎。校長給大家介紹 Ramanujan，說 Ramanujan 的優異不是用 A⁺ 或 100 分所能表達的。他的成績無與倫比！

畢業典禮時 Ramanujan 真是他母親的寧馨兒，預定下學期拿獎學金去唸 Government College。

Government College 雖然小，畢業生表現好，地點好，故有「南印度的劍橋」之稱。1904 年起 Ramanujan 就讀這一所大學。

但是 Ramanujan 從 Town High 畢業以前吧，寄宿在他家的大學生給他看 George Shoobridge Carr 寫的“A Symposis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics” (I), 1880, (II), 1886; Ramanujan 大概以後才看到第 2 冊)。書裡面有代數、三角學、微積分、解析幾何學、微分方程式等 5 千多個數式，只有簡略的說明或證明。這是 Carr 當了多年 Tripos 的數學家庭教師的筆記精華。裡面的第一個公式是 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ，第二個公式是 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，第三個公式是

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Ramanujan 看到“Symposis”後覺得它開啓了他智識活動之門。早先他在數學以外的學科也費些心思，現在變成除了數學以外什麼都不感興趣了，他只有數學，不能更多。上其他課時他照樣作數學。結果他英文作文不及格，獎學金被取消了。他的母親趕去學校向校長抗議：「怎麼可以拒絕給我兒子獎學金？」校長有禮貌，但堅決地堅持校規。

Ramanujan 每學期的學費要 32 rupee，對家裡是很重的負擔。他到校才幾個月，可是他受不了給家裡增加負擔，別人的側目與應付其他科目的壓力，終於在 1905 年 8 月 17 日離家出走。他坐火車到離 Kumbakonam 484 哩遠的海港 Vizagapatnum。

家人好著急，登報尋人外他父親還到 Madras 等處找人。9 個月後 Ramanujan 平安回來。

在印度大學文憑不但保障一份好工作，還是一個職業的好開端。於是 Ramanujan 又進一所專供印度人讀的私立大學 Pachaiyappa 學院讀書，好拿一個文憑。

數學老師看了 Ramanujan 的筆記本後印象深刻，介紹給校長，校長由於 Ramanujan 數學好，便給他部份獎學金。

剛到 Pachaiyappa, Ramanujan 前途好像充滿著希望。有時候數學老師上課到一半，回過頭來問：「Ramanujan, 你想再來該怎樣？」Ramanujan 便上去黑板簡略地提示一下，不過同學們卻是一頭霧水。Ramanujan 也會跟資深數學教授 Singaravelu 討論數學雜誌上的問題，

如果 Ramanujan 做不出來，第二天 Singaravelu 教授也解不出來。大家驚訝於 Ramanujan 的數學才華。

但是其他可厭的課程，如生理學等還得唸。而且單修過學分不算數，還要通過 Madras 大學統籌辦理的學位考試 (F. A. Examination)。Ramanujan 參加過幾次，但卻沒有考過，也就放棄了。

家窮，Ramanujan 有時候會餓肚子，左右鄰居看不過，會請他吃飯。爲了賺錢 Ramanujan 問朋友的家有沒有帳可記，書可教？教數學他是喜歡的，不過往往教離了譜，不是應付考試的。就這樣他書沒唸了，教書的工作也沒了。不過對他來說這或許是最好的，他可以專注於他的數學，寫他的筆記本。

1904 年起 Ramanujan 證明 Carr 書裡的定理以外又衍生出許多自己的定理來。要記下這些，他便開始寫筆記本，到 1970 年他離開 Pachaiyappa 學院爲止他已經寫了 200 多頁，裡面有超幾何級數，連分數，奇模數 (singular moduli) 等。

第二本筆記本有章、節：討論特殊的課題，有關的定理等。看來 Ramanujan 整理過他做過的數學，多少想借它來找工作吧。起先 Ramanujan 寫得章節分明，一頁有一、二十行，只寫右頁。到後來幾頁的後面有寫後刪掉的痕跡和一些未歸類的式子。由於他跟外界沒有接觸，他使用的數學符號常常是獨特的。

他對數字很熟稔，就像他們是好朋友般。因爲他有空就在做數字遊戲。研究他的學者 B. M. Wilson 就說 Ramanujan 研究數論常常是從數字表看出結果來。不過那個表長得驚人。他對數字熟悉，也就很容易歸納出它們的特性來。他的成功不全是靈感的顯現，而是下了苦功的結果。

但 Ramanujan 說一個式子對他毫無意義，除非它表示上蒼的旨意。

Ramanujan 一向是矮矮胖胖的，有一對閃亮的眼睛，跟熟人他話匣子一開，眼睛就會閃閃發亮。

被退學後 Ramanujan 還會去學校聽課，看老師或是借書，有時候在寺廟裡徘徊。不過他差不多時間都待在家裡盤坐著。膝蓋上放著大石盤忙著在上面寫數學式子，他做得順利便微笑，做錯了就不耐煩地放下石盤，用手肘去擦石盤。他年輕，沒工作做，專做一些沒人會了解的事。他父母忍耐過一陣，後來他們焦急，不耐煩起來。夠了，讓他結婚吧，他媽媽終於決定。

3. 結婚、求職

Ramanujan 的母親 Kumbakonam 是家中的主宰者。她去距離 Kumbakonam 60 哩處的村莊 Rajendram, 相中一個清秀的遠房女孩叫做 Janaki, 才 9 歲。婚事便這樣決定了。雖

然 Ramanujan 看起來一無是處，女方可沒挑剔。對方是珠寶商，起先頗有一些錢，但後來做生意失敗，家裡又有五個女兒，所以只能給一點嫁妝。希望男方不會苛待小媳婦。

一向對事沒意見的父親這回有意見。他覺得兒子的對象可以更好。為表示抗議，他沒參加婚禮。

結婚對 Ramanujan 整個家庭來說，沒什麼改變。Janaki 會待在娘家學習家事和應對公婆之道等。3年後她達到妙齡才會回夫家。

Ramanujan 既然結了婚，就有責任出去找一份工作。他從就近的 Kumbakonam 找事找到 Madras。而在印度找工作，人事關係是重要的一環。在外頭他沒有真正的家，有時候跟朋友露宿在外，有時候住朋友家，車資往往是朋友給的。他想當家教賺些錢，但他不切實際的教法使他不容易找到學生。

他早年的家教學生 Viswanatha Sastri 已經在 Madras 的 Presidency 學院讀書。Ramanujan 借住在 Viswanatha 的宿舍。Ramanujan 悲嘆他的慘狀，Viswanatha 安慰他說不用悲傷，他有上蒼贈與的數學才華，等待時機到來便是。Ramanujan 則舉例說 Galileo 在垂老之年被宗教迫害，看來自己也只有窮死一途。結果 Viswanatha 又要好言勸他一番。當時是 Ramanujan 感情非常脆弱的一個時期，稍有一點喜悅就印象深刻，不能忘懷。

有一天 Ramanujan 出現在他唸 Pachaiyappa 學院時代的朋友 R. Radhakrishna Iyer 處。Ramanujan 生病了。他的朋友帶他看醫生，醫生說「這要長期的照料。」朋友便買車票送 Ramanujan 回家。臨走前 Ramanujan 交給他兩大本數學筆記本，說：「如果我死了，請把這些交給 Pachaiyappa 學院的 Singaravelu 教授或英國的數學教授 Edward B. Ross。」

說來 Ramanujan 的筆記本不單是他數學思考的記錄，也是他的資產呢。

從此，Ramanujan 開始尋找工作之旅。他第一個找的是那時候剛創辦“The Indian Mathematical Society”的 V. Ramaswami Iyer。Ramaswami 學幾何，看不太懂 Ramanujan 的筆記本，但很驚訝。他無意讓 Ramanujan 屈就在低薪階級裡，所以沒有給他工作，而介紹 Ramanujan 給 Madras 的數學家們。其中有 Seshu Iyer，他是 1906 年 Ramanujan 在 Government college 的教授，4 年後轉到 Presidency College。Ramanujan 帶著筆記本去見他，Ramanujan 又多出一些介紹信來。

Ramanujan 也有一份要給 Ramachandra Rao 的介紹信。

Ramachandra Rao 是 Presidency College 的畢業生，學數學。做過 The Indian Mathematical Society 的秘書，Nellore 鎮（約 35000 人口）的行政及稅務官，是一位有錢、有勢的人物。他是 Ramanujan 朋友 Krishna Rao 的伯父，也是他那一族的族長。Krishna Rao 曾經向他提過 Ramanujan，他說：「伯父，我有一個朋友講數學，但是我聽不懂。您能不能見見他看他講些什麼？」

1910年12月 Ramanujan 由他的朋友 C. V. Rajagopalachari 陪伴去見 Ramachandra Rao。

Rajagopalachari 是 Ramanujan 的老朋友, 想當律師。他們多年後在 Madras 碰到了, Ramanujan 告訴老友他的不遇, 沒有人賞識他, 當晚他想回家。

「不要走!」Rajagopalachari 說。「就住在我住處, 錢? 就用我的, 我帶你去見 Ramachandra Rao!」

首次 Ramanujan 夾著他那兩本磨損的筆記本去見 Ramachandra Rao。後者教他把筆記本放在他那兒幾天再來看看。第二次去時 Ramachandra Rao 說 Ramanujan 寫的那些定理他沒見過, 也用不著。以後不要再來煩他了。第三次去見他時, 他說得明白: 他怕 Ramanujan 耍詐。

回程時 Ramanujan 告訴他朋友, 其實他跟 Bombay 的名數學教授 Saldhana 通過信, 有他的眉批。執著的 Rajagopalachari 說:「這樣夠了!」, 又把他帶回原處, 這回 Ramachadza Rao 生氣了,「又來了, 才離開幾分鐘!」Ramanujan 給他看 Saldhana 教授的信, 又把 Ramanujan 尚未發表, 比較能夠被接受的定理, 如橢圓函數、超幾何函數、發散級數等一步一步地講給他聽。

於是 Ramachadza Rao 問 Ramanujan:「那, 你要什麼?」Ramanujan 說:「少許的錢可過日子和工作」。過後 Ramachadza Rao 說:「他要閒暇, 也就是說, 不用費心去賺食物, 而能繼續做他的夢。」

從此, Ramanujan 從 Ramachadza Rao 處每個月收到 25 rupee 的錢, 不算多, 但可以悠哉悠哉過日子。Ramanujan 便從 1911 年年初起搬到南印度的首都 Madras 來。

1911 年對 Ramanujan 是個好年頭。他開始踏進 The Journal of the Indian Mathematical Society。他出了這樣的題目:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots}}} = ?$$

這是他的第一本筆記本裡的題目

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n + a)^2 + x\sqrt{a(x + n) + (n + a)^2 + (x + n)\sqrt{\cdots}}}$$

中 $x = 2, n = 1, a = 0$ 的情形。

六個月中沒有人解得出, 所以 Ramanujan 便公布答案了。

Ramanujan 登在 The Indian Mathematical Society 的第一篇論文是 “Some properties of Bernoulli numbers”。這一篇論文在作者與編輯者之間往返了三次, 即使是這樣, Ramanujan 所寫 B_n ($n \neq 0$, 偶數) 的性質還是有錯, 如:「 $\frac{B_n}{n}$ 成既約分數後的分子是質數」。但 $\frac{B_{20}}{20}$ 的分子是 $174611 = 283 \times 617$ 。

Ramachandra Rao 怕 Ramanujan 的筆記本遭到什麼不測，教他再抄寫一份。Ramanujan 確也再抄寫過。他把章、節放在適當的地方。這便是我們所知道的“The 2nd notebooks”。

差不多有一年 Ramanujan 生活在 Ramachandra Rao 慷慨資助之下。那一陣他寫出了一些文章發表在 The Indian Mathematical Society 上，也就小有名氣起來。

過後 Ramachandra Rao 透過他有影響力的朋友替 Ramanujan 在 Madras 港務信託找到會計的工作，Ramanujan 提出的申請信只是形式上的。

港務信託的總管是 Fransis Spring 爵士。早年他在印度鐵路局做事，因造跨過 Godavari 河的大鐵橋有功而在 1911 年封爵位。他帶來非常印度化，並和溫和派印度獨立運動人物有關的 Narayana Iyer 當會計主任。Narayana Iyer 在 Trichinopoly 的 St. Joseph 學院得過 M.A.，也在那兒教過數學。

有一次 Sir Francis 把 Narayana Iyer 叫進辦公室，問他為什麼在這麼重要的檔案中滲進算數學的紙張？難道在辦公時間還做數學不成？Nayana 說不是他，字跡不對，或許是 Ramanujan。Sir Francis 笑了，他說當然那是 Ramanujan 的傑作，他早就知道。

Narayana Iyer 是印度數學學會會員並兼總務。他不只是 Ramanujan 的頂頭上司還是晚上讀書的伙伴。有時候他們睡著後 Ramanujan 會醒過來記錄一些他夢中想起來的數學。

Narayana Iyer 在跟 Ramanujan 討論中發現 Ramanujan 的思考過程跳得太厲害了。要讓別人了解、接受的話，Ramanujan 寫的兩行之間要添加十來行才行。就這樣 Narayana Iyer 不只是 Ramanujan 的上司還成爲他的良師、益友。他也讓 Sir Francis 成爲 Ramanujan 的支持者。他們雇用 Ramanujan 爲的是讓他能好好過日子，有朝一日能有所發揮，否則 Ramanujan 的會計程度很差。他們也請教各方數學人士來判斷 Ramanujan 的數學程度。但都不得要領。

看來印度沒有人可以了解、啓發 Ramanujan 的數學，只有請教劍橋大學或西方國家的數學家才行。

於是 Ramanujan 寫信給劍橋大學的三位資深教授。第一位是 H. F. Baker，皇家學院院士 (F.B.S.)，當過 London Mathematical Society 的主席。但 Baker 沒有回信。第二位是 E. W. Hobson，皇家學院院士，任劍橋大學純數學 Sadleirian 教席，Hobson 也沒有回信。第三位是 G. H. Hardy，當 Ramanujan 在 1913年1月16日寫信給 Hardy 時，Hardy 僅35歲，但已經執英國數學界的牛耳了。

4. Ramanujan 的信和 Hardy 的反應

Godfrey Harold Hardy (1877-1947) 的父母從事教育, 他另有一妹叫 Gertrude。從小 Hardy 每一樣功課都很好, 但由於害羞, 為避免成績好, 拿獎, 他會故意寫錯答案。他在 1896 年讀劍橋大學三一學院, 並在 1898 年考取 Mathematical Tripos Part I (Tripos 是從 1730 年開始有的劍橋的一種特種考試, 題目多且難, 第 1 名稱爲 Senior Wranger, 本人得獎外這個稱號永存。), 他得了第 4 名。1900 年他考更難的 Tripos Part II, 得到第一名, 當年他便很快地成爲研究員 (Fellow) 了。

Hardy 很感念他的導師 A. E. H. Love 給他嚴謹的解析訓練, Love 更勸他讀 Jordan 的 “Cours L’analyse”, 而讓他對數學開了眼。從此他熱誠地投入數學的研究工作。Hardy 在 1900 至 1911 年間寫出不少有關級數及積分的收斂性文章。不過他在解析學上最大的貢獻在於他那可讀性很高的經典之作 “A Course of Pure Mathematics”。

1919 年以前 Hardy 擔任三一學院的 Cayley 講座, Hardy 口才, 文章皆一流, 他主張定理要有正確的證明。聽過他課的學生都對他上課的情形印象深刻。如美國數學家 Nolert Wiener 就說: 「我從來沒有聽過像 Hardy 那樣講得清晰、有趣、有智識力量的課。」

英國的數學自牛頓以後固步自封, 不與歐陸往來、溝通, 而沈睡在它陳腐的 Tripos 制度裡。一直到 1893 年 Andrew Farsyth 著 “Theory of Functions” 才介紹一些歐陸的數學概念, 但頗有草率之嫌, 須有人承繼他的工作。那便是 Hardy。

Hardy 早上唸書, 下午看或玩他喜歡的曲棍球或網球。他一直保持一個童稚的心和外表。不過學生認爲他看起來嚴肅得難以親近, 心地卻是軟的, 他從來不當成績壞的學生。依他學生的話: 「他對程度不好的學生非常仁慈。」

Hardy 長得很英俊, 他自己可不認爲。他從來不照鏡子, 到旅館房間, 首先會把所有的鏡子用浴巾覆蓋起來。Hardy 獨身終生。

John Edensor Littlewood (1885-1977) 出自英國中產階級, 有神童之譽, 受正規教育。1902 年 12 月 Littlewood 考取三一學院的獎學金考試而入學, 他是 1905 年的 Senior Wranger。過後有 3 年他在 University of Manchester 當講師, 1910 年後他回到三一學院。他對數學有能力與毅力克服他所遭遇到的困難。

他身手矯健, 終生未娶, 但跟一已婚女子育有一女。

1906 年 Hardy 審查 Littlewood 的稿子, 這是他們的第一次接觸。1912 年起他們兩人合作達 35 年之久, 合寫的論文有 100 篇以上。甚至於有人說那個時候英國真正好的數學家有 Hardy, Littlewood 與 Hardy-Littlewood。

兩個人的居處距離不過 60 方步, 不過他們不是寫信就是由人傳達消息, 難得兩人見面。

1913年1月16日 Ramanujan 寫一封信給 Hardy。他說：「請容我介紹我自己。我是在 Madras 港務信託會計課做事的職員，年薪只有 20 英磅，年齡 23 歲（事實上是 25 歲）。我沒有受大學教育，不過受過普通教育。離開學校後我用我餘下的時間唸數學。我沒有像受過大學教育的人那般做數學而用我自己的新方式做。我對於一些一般發散級數做了特別的觀察，所得結果讓地方上的數學家感到驚奇……」

請您過目我附上的紙張。我窮困，所以您如果認為我的一些定理有價值，我希望它們能夠發表出來。我並沒有附上實際的驗證或演算過程，但我指出我的想法。

我沒有經驗，不過您給的任何勸告我都會珍惜。請原諒我的冒昧。」

Ramanujan 附上的定理佔去 9 張紙。

Hardy 覺得 Ramanujan 的定理很奇特，就像他看到一座森林，它的樹木卻像從其他星球上移植過來那般。

Hardy 瀏覽過 Ramanujan 的信後便把信擱置在一邊，開始做他當天該做的事。但他心中的一個角落裡一直在乎著他看過的信，「也該讓 Littlewood 看一下那信吧。」他想，便教人傳信說當晚想與 Littlewood 見面。

那個晚上兩個人看 Ramanujan 的數學。有些他們認得，有些他們幾乎難以相信，如：

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \cdots dx = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(b+1) \Gamma(b+a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b + \frac{1}{2}) \Gamma(b-a+1)}$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \cdots = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right\}^2}$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - \left(3\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\right)^3 + \cdots = \frac{2}{\pi}$$

他們越看越覺得這個印度數字家很神奇。在半夜之前他們得到結論：他們是在欣賞一位數學奇才的作品。

Ramanujan 在當時的劍橋數學圈內造成轟動，Hardy 給好多人看 Ramanujan 寫的定理還抄一些給專家看。

Bartrand Russel (羅素) 給他的女友 Lady Ottoline Marrel 的信 (2/2, 1913) 中有這麼一句：

「在餐廳裡我發現 Hardy 與 Littlewood 狂喜不已，因為他們認為他們發現了第二個牛頓：一個年薪 20 磅的印度職員。」

同時 Hardy 活動起來，他給駐倫敦的印度機構反應他對 Ramanujan 有興趣，希望 Ramanujan 能來劍橋。

1913 年 2 月 8 日 Hardy 回信給 Ramanujan：

對您的信與定理至感興趣。不過在我能適當地判斷您作出的價值之前，我需要知道您的某些定理的證明。

您的成果大略可分為三類：

- (1) 有些結果是已知的，或可從已知定理推出來；
- (2) 就我所知有些結果是新穎而有趣的，有趣是由於它的難度與新奇而非重要性。
- (3) 有些結果看來新穎、重要，不過這個要看您使用的適當的嚴密證明。

您說您缺乏數學上的訓練，但是事實上您重新發現了這麼多有趣的結果是非常了不起的
.....

我希望您能夠儘快寄一些您的證明給我

Hardy 的信在 2 月底到達以前，Madras 印度學生顧問團祕書 Arthur Davis 已經得到英國來的消息說，Hardy 希望 Ramanujan 到 Cambridge 去。

Arthur Davis 召見 Ramanujan 傳達 Hardy 的意思，不過 Hardy 很快得到消息說 Ramanujan 不想去英國。阻礙來自宗教與文化上，印度人對渡海有禁忌。

Gilbert Walker 當年 45 歲，是 Simla 地方的印度氣象分局局長，他得過 Senior Wrangler，在三一學院教過書，新近成為皇家學院院士 (F.R.S.)。他在 2 月 25 日路過 Madras 時 Sir Francis 給他看 Ramanujan 的筆記本。第二天 Walker 寫信給 Madras 大學，推薦 Ramanujan 為該大學的研究生。Walker 念的是應用數學，而當時從事的是氣象學，對純數學不熟悉，但有 Hardy 的背書，他便寫了 Ramanujan 的推薦信。由於他的信函，Madras 大學數學會議上大家決定向行政當局建議給 Ramanujan 一個月 75 rupee 的研究獎學金。這個獎學金是發給有碩士學位的，而 Ramanujan 連學士學位都沒有，因此這個建議一度遭到反對，經過討論後還是被採用了。

由於 Hardy 的贊許，Ramanujan 從十來年動彈不得變成什麼都順暢起來。

2 月 27 日 Ramanujan 又寫信給 Hardy，附加上許多定理。他說：「我發現您是我的朋友，用同情的眼光看我這些年來的成果。

在我目前的情況，我很需要像您這樣有名的學者認定我的作品有一些價值，我寫出來的結果可證實是對的，雖然我的根基薄弱...

我是一個半飢餓的人，我的優先考慮是：為了保持我的腦力，我需要食物。您充滿同情的信可幫助我獲得大學或政府的獎學金。.....」

4 月 12 日 Ramanujan 得到 Madras 大學要發給他研究獎學金這個消息。獎學金可讓 Ramanujan 研究數學，聽大學的課程並使用大學圖書館。他的義務是每三個月交出一篇研究報告。

Ramanujan 就租屋在離 Presidency College 一個半哩處，跟外婆、媽媽、妻子 Janaki (當年14歲) 住在一起，但 Janaki 被規定要跟婆婆或外婆一起睡。三個女人服侍 Ramanujan。他經常在清靜、涼爽的半夜起來唸書。爲了不間斷他的思路，食物有時候是遞給他吃的。

這期間 Ramanujan 與 Hardy 在捉迷藏。Hardy 在英國闖出一個改革：數學定理要有嚴密的證明。他要求 Ramanujan 給他定理的證明。而 Ramanujan 一直在避開它。事實上他給不出來。Carr 的“Symposia” 裡面定理都是輕描淡寫地帶過的，Ramanujan 一向學的是這一套。

不過研究 Ramanujan 的專家美國數學家 Bruce Bezdnt 說，有時候讓自己逃脫「嚴密」的鎖鏈，在自由的想像中反而會發現通過一座森林的路程。

研究生的日子讓 Ramanujan 過的很寫意。

Hardy 有一陣子沒來信後，1914 年元月初寫來一封信，在一番批評與安慰之後 Hardy 告訴 Ramanujan，三一學院有一位研究員 E. H. Neville 將在 Madras 的大學演講微分幾何學，找機會跟 Neville 接觸，聽聽他有關讀書與研究的勸告，會很有用處的。

其實 Neville 是 Hardy 的一著棋子，想勸說 Ramanujan 去英國。

元月裡 Neville 到達 Madras，Ramanujan 跟他見了面，覺得他滿可親近的，也就借給他自己那寶貴的筆記本三天。

早 Ramanujan 20 幾年的甘地爲了赴英讀書被他的族長從他階級裡放逐過。在南印度，Ramanujan 那時候出國還是一種禁忌，出國者不但會被他的階級放逐，親友們也不再跟他往來。

但是 Neville 與 Ramanujan 見面時發現 Ramanujan 要赴英的反對力量已經緩和下來。原來 Ramanujan 的母親夢見 Ramanujan 在一群歐洲人士中，而女神 Namagiri 告誡她不要妨害 Ramanujan 完成他的終身事業。

於是 Ramanujan 與朋友 Narayana Iyer 出發到奉祀女神 Namagiri 的神廟，晚上在神廟的地板上睡了三夜。第三夜 Ramanujan 叫醒 Narayana Iyer，說在閃電般亮光中他受到指示，要橫越出國的障礙。

回到 Madras 後 Ramanujan 見 Neville，說他願意赴英，讓 Neville 吃了一驚。在記錄上 1913 年 2 月 Ramanujan 拒絕了印度當局要他赴英的建議。而在 1914 年 1 月 22 日 Ramanujan 寫信給 Hardy，要勞煩他與 Littlewood 幫助他能在近月赴英。

Neville 給 Ramanujan 解決有關錢、英文、考試、學位、素食等問題。事實上 Neville 還是趕緊在 Madras 方面找錢的來路，並給 Hardy 寫信說萬一印度方面要不到錢，得想法子在英國要到，不能爲錢的問題阻止 Ramanujan 赴英。

Neville 告訴那些充滿疑惑的印度人士說, Ramanujan 赴英不僅對他個人有好處, 如果他成為數學史上有名的人物, 那麼 Madras 市與大學會因曾經在經濟上幫助他一臂之力而光榮、驕傲。

於是 Madras 大學同意一年給 Ramanujan 250 磅獎學金加上治裝費與旅費 100 磅。

Janaki 私下表示她想跟 Ramanujan 走, 但 Ramanujan 以她還年少, 會讓他分心等勸阻她。

(未完待續)

參考文獻

1. Robert Kanigel. "The Man Who Knew Infinity", Charles Scribner's Sons, New York, 1991.
2. Bruce C. Berndt and Rabert A. Rankin, Ramanujan Letters and Commentary", American Math. Soc. and London Math. Soc., 1995.
3. G. H. Hardy, "A Mathematician's Apology", Combridge University Press, Conte edition, 1992.
4. 「100 人的數學者」, 日本評論社, 1971。
5. Howard Eves, "An Introduction to the History of Mathematics", 6th edition, Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1990.

—本文作者曾任教於輔仁大學數學系, 現已退休—