兵在精還是在多?

吳建生

求學問本來就是先多才能求精, 而精後亦可求多不足爲奇, 所謂熟能生巧就是相同的道理。做數學也不例外, 但有時或許有突破性的看法, 而不需歷經求多的階段, 不過它不是隨處可見的, 是可遇不可求的, 以下是敝人在教學時兩個微不足道的心得獻曝一遭。

I. 兵在多不在精 $\longleftrightarrow$ 一題十四種解法

問題: 解 $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$, $0 \le x < 2\pi$。

解答方法:

(一) $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec^2 x - \tan^2 x} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \begin{cases} \sec x + \tan x = \sqrt{3}, \\ \sec x - \tan x = 1/\sqrt{3}. \end{cases}$

得 $\sec x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 即 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ ($\frac{11}{6}\pi$ 不合)。

(二) $\sec x = \sqrt{3} - \tan x$ 兩邊平方, 再令 $y = \tan x$ 可得 $y = \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ ($\frac{7}{6}\pi$ 不合)。

(三) 兩邊平方 $\tan^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x = 3$, 代 $1 = \sec^2 x - \tan^2 x$ 得 $(\sec x - 2\tan x)(\sec x + \tan x) = 0$, 知 $\sec x = 2\tan x$ ($\sec x = -\tan x$ 不合), 所以 $\sin x = \frac{1}{2}$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ ($\frac{5}{6}\pi$ 不合)。

(四) 兩邊除以 $\tan x$, 再平方得 $\csc^2 x - \csc x - 2 = 0 \Rightarrow \csc x = 2$ ($\csc x = -1$, 不合), 故 $\sin x = \frac{1}{2}$ 以下同 (三)。

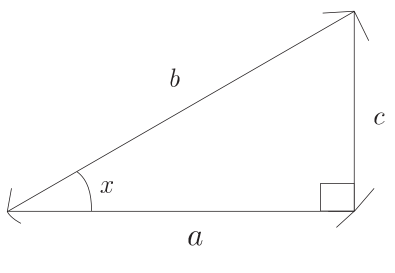
(五) 易知 $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$。

① 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 利用右圖

得 $\begin{cases} b + c = \sqrt{3}a \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$

$\Rightarrow a : b : c = \sqrt{3} : 1 : 2$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$。

② 若 $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 不合。



(六) 令 $\sec x=u$, $\tan x=v$, 則 $\begin{cases} u+v=\sqrt{3}, \\ u^2-v^2=1. \end{cases}$ 得 $v=\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 以下同 (二)。

(七) 令 $\sin x=u$, $\cos x=u$, 則 $\begin{cases} u+1=\sqrt{3}v, \\ u^2+v^2=1. \end{cases}$ 得 $v=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(v=0$ 不合), 以下同 (一)。

(八) 化成 $\sin x+1=\sqrt{3}\cos x$, 兩邊平方可得 $\sin x=\frac{1}{2}$ $(\sin x=-1$ 不合), 以下同 (三)。(註: 或求出 $\cos x$ 亦可)。

(九) 化成 $\sin x+1=\sqrt{3}\cos x$, 疊合成 $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, 得 $x=\frac{\pi}{6}$ $(x=\frac{3}{2}\pi$ 不合)。

(十) 化成 $\frac{\sin x+1}{\cos x}=\sqrt{3}$, 而 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\tan\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\sqrt{3}$, 故 $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$, 即 $x=\frac{\pi}{6}$。

(十一) $\frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{\cos}{1-\sin x}=\frac{1+\cos x+\sin x}{1+\cos x-\sin x}=\sqrt{3}$ (和比) $\Rightarrow(1+\sqrt{3})\sin x=(\sqrt{3}-1)(\cos x+1)\Rightarrow(1+\sqrt{3})\sin\frac{x}{2}=(\sqrt{3}-1)\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}=0$ 不合) $\Rightarrow\tan\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$, 故 $x=\frac{\pi}{6}$。

(十二) $\frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$, 以下同 (十)。

(十三) $\frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin x+\cos x}{\sqrt{3}\cos x+1-\sin x}=\sqrt{3}$ (和比) $\Rightarrow 3\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 即 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 以下同 (二)。

(十四) 令 $y=\cos x$ (或令 $y=\sin x$) 代入 $\frac{\sin x+1}{\cos x}=\sqrt{3}$, 化成 $\pm\sqrt{1-y^2}=\sqrt{3}y-1$, 解得 $y=\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(y=0$ 不合), 以下同 (一)。

II. 兵在精不在多 $\longleftrightarrow$ 活用均勻空間

問題: 甲、乙、丙等十四人任意分成三組, 各組有 5、5、4 人, 求甲乙在同一組之機率? (令其爲 A 事件)

解答:

(一) 一般級: 利用每一樣本機會均等, 套組合公式算出樣本數

$$
\begin{aligned}
\text{即 } P(A)&=\frac{(\text{甲乙同在 4 人一組樣本數})+(\text{甲乙同在 5 人一組樣本數})}{\text{樣本空間數}}\\
&=\frac{c_2^{12}\frac{10!}{5!5!2!}+c_3^{12}\frac{9!}{4!5!}}{\frac{14!}{4!5!5!2!}}\\
&=\frac{66\cdot 126+220\cdots 126}{9\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 14}=\frac{286}{7\cdot 143}=\frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

(二) 比較級: 也是利用每一樣本機會均等; 但藉樹型圖法計算機率, 可較簡易。

(先安排甲, 則乙隨之確定) —— (甲在 4 人組) $\frac{4}{14}$ —— 甲乙同組 $\frac{3}{13}\cdots A_1$；甲乙不同組 $\frac{10}{13}$

(先安排甲, 則乙隨之確定) —— (甲在 5 人組) $\frac{10}{14}$ —— 甲乙同組 $\frac{4}{13}\cdots A_2$；甲乙不同組 $\frac{9}{13}$

故 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}+\frac{10}{14}\cdot\frac{4}{13}=\frac{2}{7}$。

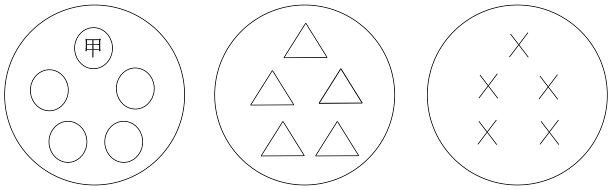
(三) 最高級: 活用樣本空間中每一樣本機會均等, 發現可更簡化計算。方式是多加一人, 成為 15 人平分成三組, 而不影響甲乙同組之機率。

為了說明, 先舉一例: 考慮 n 人環狀排列法有幾種。我們可先安排任一人, 因 n 個位子等值, 此人坐哪裡都一樣, 必然發生。而後對其他人來說相當於在剩下 $(n-1)$ 個位置, 選一位置來坐, 此時, 已因有一人坐下去打破環狀排列而成直線排列。故方法數為 $(n-1)!$。

※ 同理當 15 人平分成三組, 即每組各 5 人時, 可先排丙, 因 15 個位子等值, 必然發生。此時對甲 (或其他人) 來說他面對的是剩下 14 個位子選一位子, 即上題之 15 人分成三組, 各組有 5、5、4 人, 故沒有差別。

考慮 15 人平分成三組, 由機會均等性質不妨先安排甲, 在安排乙。因甲可以任意選擇, 所以機率為 $\frac{15}{15}=1$。無妨取甲在打 ◯ 那一組來討論, 如圖所示。因乙這時可以有 14 種選擇機會, 但若要與甲在同一組, 則只有 4 個機會, 所以機率為 $\frac{4}{14}$。

因此 $P(A)=\frac{15}{15}\cdot\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$。



※ 推廣: 甲乙等 $(3n-1)$ 人, 任意分成 3 組, 各組有 n、n、$(n-1)$ 人, 則甲乙在同一組之機率為 $\frac{n-1}{n+n+(n-1)}$ 即 $\frac{n-1}{3n-1}$。

—本文作者任教於高雄女中—