# 考題試評

張海潮

最近幾年, 考研究所蔚爲風氣。由於擔任畢業班的導師, 考季一近, 常常見到學生手持各校的考古題到處請益。有時難免也應邀出馬協助解題。解題之餘, 不免對試題評析一番。有的題出的中肯, 有的題出的刁鑽, 也有的題難的過分。下面想舉幾個例子來說明我的看法。

在甲校八十八年度的研究所入學試題中, 有一道 20 分的題目 (編號甲, 乙, 丙爲筆者所加)
(甲) 證明存在常數 $C_1$ 和 $C_2$ 使得對所有的正整數 $N$, 恆有

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{N}-C_1\Big|\leq C_2/\sqrt{N} \tag{1}$$

看到此題的時候我偷了一點巧, 觀察到如果讓 $N$ 趨近無窮大, 右邊是 0, 因此 $C_1$ 必須是 $\lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{N})$。所以至少先得證明這個極限存在。教微積分的經驗告訴我應該看看與 $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 最“親近”的積分: 亦即 $\int_1^N\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{N}-2$, 並且拿它去和 $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 比較。引用一般教材中, 討論 $\sum\frac{1}{n^p}$ 這類級數收斂成發散的時候所用的積分檢定法 (Integral Test), 先令

$$r=\lim_{N\to\infty}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N-1}}+2-2\sqrt{N}\Big)$$

此處當然要先證明括弧中的一般項是遞增並且有上界, 才能保證極限的存在。

因此整個問題的解答步驟如下:

① 利用類似寫出 Integral Test 的方法, 證明不等式

$$0<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N-1}}+2-2\sqrt{N}\leq r$$

和

$$0<2\sqrt{N}-2-\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}\Big)\leq 1-r$$

② 將這兩個不等式結合爲

$$0\leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}-2\sqrt{N}+2-r\leq\frac{1}{\sqrt{N}}$$

③ 令 $C_1 = r-2$, $C_2 = 1$, 即可證出本題。

我必須承認至少約花上 20 分鐘才能乾乾淨淨的寫下一個證明。這個題目有程度, 但是太難了。想想八十八年這份考卷總共七題, 而時間只有一百分鐘。考生如果以前沒看過, 臨場能想得出來的又有幾位?

再看乙校九十年的入學試題

(乙) 證明 $$\left|\int_x^{x+1}\sin(e^t)dt\right|\leq \frac{2}{e^x} \tag{2}$$

我初看 (2) 式的時候, 著實呆了一陣, 因爲我從來不曾計算過 $\sin(e^t)$ 的積分。定下心來看了一下, 覺得應該先換個變數, 把積分改成

$$\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin y}{y}dy$$

這還是很要命, 因爲我只知道 $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$。至少過了一天, 我才決定試一試分部積分:

$$\begin{aligned}\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin y}{y}dy &= -\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{d\cos y}{y}\\ &= -\frac{\cos y}{y}\bigg|_{e^x}^{e^{x+1}} - \int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\cos y}{y^2}dy\end{aligned}$$

因爲 $|\cos y|$, $|\cos e^x|$, 和 $|\cos e^{x+1}|$ 都小於或等於 1, 所以有

$$\begin{aligned}\left|\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin y}{y}dy\right| &\leq \frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{y^2}dy\\ &= \frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{x+1}}\\ &= \frac{2}{e^x}\end{aligned}$$

題目是做出來了, 但是並不覺得有什麼收穫。道理很簡單, 要得出一個不等式, 這個不等式總要有一個意義, 不然從何下手呢? 數學中有一些常見的不等式, 例如算術平均大於或等於幾何平均, 哥西不等式, 指數函數大於多項式, 多項式又大於對數函數等等, 但是本題卻可能是一個與研究某些其他問題有關的不等式。對大學部的學生而言, 如果想不到分部積分, 這題根本無法入手, 而且即便是想到, 還要大膽的把 cos 的絕對值改成 1。本題是不是有夠刁鑽呢? (註一)

上面兩題都是高微的試題, 再來看一題線性代數的題目。下面這一題是八十八年度丙校出的題目

(丙) 假設 $A$, $B$ 分別是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 的矩陣, 求證 $AB$ 和 $BA$ 的非零固有值 (nonzero eigenvalue) 是一樣的。出題者還附一個提示:「請考慮 $\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix}$ 這兩個 $(m+n)\times(m+n)$ 的方陣」

我只好從提示入手, 我知道出題者要考生想辦法證明這兩個方陣是相似的, 我湊了一下得出:

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

因爲 $\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 是可逆的, 因此 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的特徵多項式和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 的特徵多項式相等, 而又和 $AB$ 及 $BA$ 的特徵多項式頂多只差在零根的部分, 這樣的證明需要一點經驗。但是, 我寧可從線性變換的角度來看:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

或者看複數 (因爲固有值可能是複數)

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m$$

如果 $BA$ 有一個固有向量 $v \neq 0$, 具固有值 $\lambda \neq 0$, 亦卻

$$v \xrightarrow{A} Av \xrightarrow{B} \lambda v \neq 0$$

所以 $Av \neq 0$, 並且再接著做 $A$ 有

$$v \xrightarrow{A} Av \xrightarrow{B} \lambda v \xrightarrow{A} \lambda Av$$

不難看出 $Av \xrightarrow{AB} \lambda Av$, 因此 $\lambda$ 也是 $AB$ 的固有值。這樣的證明直接, 並且只從定義出發, 不必勞駕出題者的提示。個人覺得在考場提示一個題目的做法, 有時並不恰當, 因爲可能會讓解法更難。本題也許可以證實我的看法, 因爲原來可以用直接的辦法來處理的考生, 可能被導向要去找出 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 之間的關係而無法落筆。

走筆至此, 不由得想到七十三年大專聯考, 在自然組的試題中有一題要考生證明實係數行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \geq 0$$

這一題原本是一個反對稱的方陣 $A$ 的行列式問題, 如果方陣的階是奇數很容易看出它的行列是 $O$。當階是偶數的時候, 行列式總是非負, 它的證明在線性代數中來看並不困難, 想法是把方陣 $A$ 先乘上 $i$, 則 $iA$ 是 Hermitian, 所以 $iA$ 的固有值全是實數, 因而 $A$ 的固有值就全

是純虛數, 並且由於 $A$ 是實方陣, 這些純虛的固有值和它的共軛會同時出現, 因時 $A$ 的行列式非負。

把這樣一個具普遍性的問題在階數爲四的時候硬要高中生把行列式展開來寫成完全平方(如下), 其實意義不大, 充其量只是個因式分解的技巧。

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} \\
&= a(-bef + cdf + af^2) - b(-be^2 + cde + aef) + c(adf - bde + cd^2) \\
&= a^2f^2 + 2acdf + c^2d^2 + b^2e^2 - 2abef - 2bcde \\
&= (af + cd - be)^2
\end{aligned}$$

這就牽涉到測驗的目標和相對的考題設計。大專聯考數學只考八十分鐘, 如果要測因式分解或配方的能力, 也許可以考慮更恰當的題目。

考試的目的是選才, 題目如果太難, 或太容易都不容易區分考生的能力。特別是想用一份考卷就分別測出考生知識的廣度和深度時, 尤其困難。一個可能的調整是將一份考卷出成兩階段, 第一階段測廣度, 題目多一點, 但計算量要小, 有點像基本學力測驗, 主要看考生有沒有規規矩矩上過這門課。第二階段像是進階測驗, 題目少但是挑戰性高, 時間也稍微充裕, 希望能了解考生特殊的能力, 不至於有遺珠之憾。

註一: 其實這題是 “Second Mean-Value Theorem for Integrals” 的應用。只是目前微積分課大概很少教這個定理。關於 Second Mean-Value Theorem for Integrals 請見 Apostol 微積分, 第一册, 219頁, 有關分部積分的討論。

—本文作者曾任教於台大數學系, 現已退休—