『數學? 數學!』演講系列:

連分式與反面問題

演講人 : 沈昭亮
時　間 : 民國九十一年十一月十三日
地　點 : 清華大學 (數學系 101 教室)

在上一次「秋風夜雨—話蚯蚓, 談連分數」的演講中, 我介紹了關於實數的簡單連分數展開式的一些基本性質與相關問題。其中, 有關於有理數的連分數展開與行列式爲 ± 1 的二階整數矩陣的「分解因式」之間的關係, 除了在數論上有其應用之外, 在其他領域上, 也有一些重要的應用。今天, 我要介紹的就是 "簡單連分式展開" 這種方法的諸多應用的一種: "矩陣固有值問題的反面問題", 其背景是所謂的有限層「Stieltjes 連分式」, 其形式如

$$l_0 + \cfrac{1}{m_1 x + \cfrac{1}{\ddots \quad \cfrac{1}{m_n + \frac{1}{l_n}}}}, \tag{1}$$

其中 l_0, m_1, $l_1, \ldots, m_n$, l_n 皆是正數。

「Stieltjes 連分式」很像 "簡單連分數", 最早出現在 Stieltjes 的作品中 (見參考資料 [1]), 用來研究半線 $[0, \infty)$ 上的 moment problem。Stieltjes 連分式有很多精彩的性質與問題, 但在這次演講中, 我只能介紹少數幾種。在本文的第一節, 我將介紹「符號型簡單連分式」的一些基本性質; 在第二節, 我將介紹 Stieltjes 連分式的基本性質; 而在第三節, 我將運用 Stieltjes 連分式的基本理論, 去討論一個與 Stieltjes 弦方程式有關的反面問題。

1. 符號型簡單連分式 (Symbolic Simple Continued Fraction)

爲了方便往後的介紹, 我將以 $<a_0, a_1, \ldots, a_n>$ 表示符號型簡單連分式 (symbolic simple continued fraction)

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \tag{1.1}$$

通分後的分子 P_n, 並將連分式 (1.1) 記作 $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ 以節省空間。如此, 顯然

$$Q_n = < a_1, \ldots, a_n >,$$

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{< a_0, a_1, \ldots, a_n >}{< a_1, \ldots, a_n >}.$$

Lemma 1.1. 設 a_0, $a_1, \ldots, a_n$ 爲一符號列, 則

$$< a_0, a_1, \ldots, a_n > = < a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 > .$$

證明:

$$\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

所以

$$P_n = < a_0, \ldots, a_n > = < a_n, \ldots, a_0 > .$$

對符號型簡單連分式 $[a_0; \cdots a_n]$, 我們可將 $\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$ 表示如下:

$$\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < a_0, \ldots, a_n > & < a_0, \ldots, a_{n-1} > \\ < a_1, \ldots, a_n > & < a_1, \ldots, a_{n-1} > \end{bmatrix}.$$

則因

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$

我們有以下公式:

$$< a_0, a_1, \ldots, a_n > = < a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} > a_n + < a_0, a_1, \ldots, a_{n-2} > \tag{1.3}$$

運用如 (1.2) 式的矩陣分解, 我們可以對 (1.3) 式作以下推廣:

Lemma 1.2. 予符號 $a_1, \ldots, a_{m+r}$, 則

$$
\begin{aligned}
&<a_1, \ldots, a_{m+r}> \\
=&<a_1, \ldots, a_m><a_{m+1}, \ldots, a_{m+r}> + <a_1, \ldots, a_{m-1}><a_{m+2}, \ldots, a_{m+r}> . \quad (1.4)
\end{aligned}
$$

證明: 因爲,

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} <a_1, \ldots, a_{m+r}> & <a_1, \ldots, a_{m+r-1}> \\ <a_2, \ldots, a_{m+r}> & <a_2, \ldots, a_{m+r-1}> \end{bmatrix} \\
=&\left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} a_{m+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{m+r} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
=&\begin{bmatrix} <a_1, \ldots, a_m> & <a_1, \ldots, a_{m-1}> \\ <a_2, \ldots, a_m> & <a_2, \ldots, a_{m-1}> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} <a_{m+1}, \ldots, a_{m+r}> & <a_{m+1}, \ldots, a_{m+r-1}> \\ <a_{m+2}, \ldots, a_{m+r}> & <a_{m+2}, \ldots, a_{m+r-1}> \end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix} <a_1, \ldots, a_m><a_{m+1}, \ldots, a_{m+r}> + <a_1, \ldots, a_{m-1}><a_{m+2}, \ldots, a_{m+r}> & * \\ * & * \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

比較前後兩方陣的 $(1,1)$ 位置, 即得 (4) 式。

Lemma 1.3. 設 $m \neq 0$, 則

(i) $<ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \frac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}> = <a_1, \ldots, a_{2n}>$,

(ii) $<ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \ldots, ma_{2n-1}> = m <a_1, \ldots, a_{2n-1}>$.

證明: $<ma_1>$ 是 ma_1 的分子, 即有 $<ma_1> = m <a_1>$。而 $<ma_1, \frac{a_2}{m}>$ 是 $ma_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{m}} = \frac{a_1 a_2 + 1}{\frac{a_2}{m}}$ 的分子, 故有 $<ma_1, \frac{a_2}{m}> = <a_1, a_2>$。其餘各狀況可透過數學歸納法, 並使用 Lemma 1.2 證明之。

除了以上的基本性質之外, 我們也不要忘記下列關係式:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n+1}, \tag{1.5}$$

也就是說:

$$<a_0, a_1, \ldots, a_n><a_1, \ldots, a_{n-1}> - <a_0, \ldots, a_{n-1}><a_1, \ldots, a_n> = (-1)^{n+1}. \tag{1.6}$$

2. Stieltjes 連分式

有限層 Stieltjes 連分式來自兩個同次, 而其零根具有某種關係的 n 次實係數多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$, 透過類似於輾轉相除法的過程, 將分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 展開而得的。爲了瞭解其推導過程, 我們證明以下的兩個輔助定理。

Lemma 2.1. 設

$$0<\mu_1<\lambda_1<\mu_2<\lambda_2<\cdots<\mu_n<\lambda_n. \tag{2.1}$$

令

$$P(x)-\prod_{j=1}^{n}(x+\lambda_j),\quad Q(x)-\prod_{j=1}^{n}(x+\mu_j),$$

$$R(x)=P(x)-Q(x). \tag{2.2}$$

則

(i) $R(x)$ 是 $n-1$ 次多項式;

(ii) $R(x)$ 的零根皆爲負數, 而且都是單根;

(iii) 若以 $-\tau_1, -\tau_2, \ldots, -\tau_{n-1}$ 表示 $R(x)$ 的零根, $\tau_1<\cdots<\tau_n$, 則 λ_i, μ_j, τ_k 有以下關係:

$$\mu_1<\lambda_1<\tau_1<\mu_2<\lambda_2<\tau_2<\cdots<\mu_{n-1}<\lambda_{n-1}<\tau_{n-1}<\mu_n<\lambda_n. \tag{2.3}$$

證明: 若令

$$\sigma_1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,\quad \tilde{\sigma}_1=\sum_{j=1}^{n}\mu_j,$$

則由 (2.1) 得知: $\sigma_1-\tilde{\sigma}_1>0$, 也因此得知 $R(x)$ 是 $n-1$ 次多項式。

由 (2.1) 得知: 若以 $\mathrm{sign}P(x_*)$ 表示 $p(x_*)$ 的符號, 則有

$$\mathrm{sign}P(-\mu_j)=(-1)^{j-1},\quad \mathrm{sign}Q(-\lambda_j)=(-1)^{j}. \tag{2.4}$$

而因 (2.2) 式得知

$$R(-\mu_j)=P(-\mu_j),\quad j=1,\ldots,n, \tag{2.5}$$

$$R(-\lambda_j)=-Q(-\lambda_j),\quad j=1,\ldots,n. \tag{2.6}$$

所以, 由 (2.4) 與 (2.5) 得知, $R(x)$ 在每一個區間 $(-\mu_{j+1},-\mu_j)$ 內有一個零根; 由 (2.4) 與 (2.5) 得知, $R(x)$ 在每一個區間 $(-\lambda_{j+1},-\lambda_j)$ 內有一零根。$j=1,\ldots,n-1$, 所以 $R(x)$ 的零根皆負, 皆爲單根, 而且 (2.3) 成立。

Lemma 2.2. 設

$$0 < \mu_1 < \tau_1 < \mu_2 < \tau_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \tau_{n-1} < \mu_n. \tag{2.7}$$

令

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n}(x+\mu_j), \quad R(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x+\tau_k),$$

$$S(x) = Q(x) - xR(x). \tag{2.8}$$

則

(i) $S(x)$ 是 $n-1$ 次多項式,

(ii) $S(x)$ 的零根皆爲負數, 而且是單根,

(iii) 若以 $-\eta_1, -\eta_2, \ldots, -\eta_{n-1}$ 表示 $S(x)$ 的零根, 其中 $\eta_1 < \cdots < \eta_{n-1}$, 則 η_i, μ_j 與 τ_k 有以下關係:

$$\mu_1 < \eta_1 < \tau_1 < \mu_2 < \eta_2 < \tau_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \eta_{n-1} < \tau_{n-1} < \mu_n \tag{2.9}$$

證明: 令

$$\tilde{\sigma}_1 = \sum_{j=1}^{n}\mu_j, \quad \hat{\sigma}_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k.$$

則由 (2.7) 得知

$$\tilde{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_1. \tag{2.10}$$

因爲

$$Q(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \text{ 低階項}$$

$$xR(x) = x^n + \hat{\sigma}_1 x^{n-1} + \text{ 低階項},$$

所以由 (2.10) 得知 $S(x) = Q(x) - xR(x)$ 是 $n-1$ 次多項式, 而且 $S(x)$ 的領導係數 $\sigma_1 - \hat{\sigma}_1$ 是正數。

關於 $S(x)$ 的零根, 我們注意到, 透過 (2.8) 式以及關係式 (2.7), 可以推導出下列式子:

$$\mathrm{sign} Q(-\tau_j) = (-1)^j, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{sign} R(-\mu_j) = (-1)^{j+1}, \tag{2.12}$$

$$S(0) = Q(0) > 0, \tag{2.13}$$

$$S(-\tau_j) = Q(-\tau_j), \tag{2.14}$$

$$S(-\mu_j) = \mu_j R(-\mu_j). \tag{2.15}$$

藉由 (2.11)-(2.15), 並利用中間值定理, 便可證明 (ii)、(iii) 兩項關於 $S(x)$ 以及其零根的敍述。

運用 Lemma 2.1 和 Lemma 2.2, 不難證明下列定理:

定理 2.3. 設
$$0<\mu_1<\lambda_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\lambda_n.$$
令
$$P_{2n}(x)=\prod_{j=1}^{n}(1+\frac{x}{\lambda_j}),\quad Q_{2n}(x)=\prod_{j=1}^{n}(x+\frac{x}{\mu_j}),$$
則分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以展開成如下的連分式:
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=l_0+\cfrac{1}{m_1x+\cfrac{1}{l_1+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{1}{m_nx+\frac{1}{l_n}}}}}=[l_0;m_1x,l_1,\ldots,m_nx,l_n],$$
其中 $l_0,\ldots,l_n$, $m_1,\ldots,m_n$ 皆是正數。

例題. 令 $P(x)=(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{4})(1+\frac{x}{6})$, $Q(x)=(1+x)(1+\frac{x}{3})(1+\frac{x}{5})$, 則 $\frac{P(x)}{Q(x)}=[\frac{5}{16};\frac{16}{15}x,\frac{15}{32},\frac{32}{15}x,\frac{3}{16},\frac{32}{3}x,\frac{1}{32}]$。

這個定理告訴我們: 如果 $(\lambda_j)_{j=1}^n$, $(\mu_j)_{j=1}^n$ 符合 (2.1) 的不等式, 則 $\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$ 可以展開成一個如 (1) 式的 Stieltjes 連分式。定理 2.3 的詳細證明可以在參考資料 [2] 的 Supplement II 找到, 在此不再重覆。

講到這裡, 我們應該要問一個與定理 2.3 有關的問題: 設 l_0, $l_1,\ldots,l_n$, $m_1,\ldots,m_n$ 是 $2n+1$ 個正數。以 $\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$ 表示 Stieltjes 連分式 $[l_0;m_1x,l_1,\ldots,m_nx,l_n]$ 依照 (1.2) 的規則化簡而得的分式:
$$\begin{aligned}&P_0(x)=l_0,\ P_1(x)=m_1xP_0(x)+1,\ldots,P_{2k-1}(x)=m_kxP_{2k-2}(x)+P_{2k-3},\\&P_{2k}(x)=l_kP_{2k-1}(x)+P_{2k-2}(x),\\&Q_0(x)=1,\ Q_1(x)=m_1x,\ldots,Q_{2k-1}(x)=m_kxQ_{2k-2}(x)+Q_{2k-3}(x),\\&Q_{2k}(x)=l_kQ_{2k-1}(x)+Q_{2k-2}(x).\end{aligned}\tag{2.16}$$
也就是說:
$$P_{2n}(x)=<l_0,m_1x,\ldots,m_nx,l_n>,$$
$$Q_{2n}(x)=<m_1x,\ldots,m_nx,l_n>.$$

我們能不能斷言:

(I) $P_{2n}(x)$ 和 $Q_{2n}(x)$ 都是 n 次多項式,

(II) $P_{2n}(x)$ 和 $Q_{2n}(x)$ 的零根都是負數, 都是單根, 而且它們的零根變號後滿足 (2.1) 的關係?

上列敍述 (I) 不難證明 — 透過遞迴關係式 (2.16) 去運用數學歸納法便能辦到。

關於問題 (II), 我們作以下觀察: 首先, Lemma 1.1 告訴我們:

$$P_{2n}(x) = <l_0, m_1x, \ldots, m_nx, l_n>$$

也可表爲

$$P_{2n}(x) = <l_n, m_nx, l_{n-1}, \ldots, m_1x, l_0> . \tag{2.17}$$

而

$$\begin{aligned} Q_{2n}(x) &= <m_1x, l_1, \ldots, m_nx, l_n>, \\ Q_{2n}(x) &= <l_n, m_nx, l_{n-1}, \ldots, m_1x> . \end{aligned} \tag{2.18}$$

比較 (2.17) 與 (2.18), 我們發現: $Q_{2n}(x)$ 是 Stieltjes 連分式 $[l_n; m_nx, l_{n-1}, \ldots, m_1x, l_0]$ 的 $P_{2n-1}(x)$。所以要回答問題 (II), 我們只要能證明依 (2.16) 的關係所定義的 $P_{2k}(x)$ 與 $P_{2k-1}(x)$ 的零根皆爲負數, 而且符合類似 (2.1) 的關係不等式即可。

$P_1(x) = l_0m_1x + 1$, $P_2(x) = l_0l_1m_1x + (l_0 + l_1)$, 令 $P_1(x)$ 的零根爲 $-\mu_1^{(1)}$, $P_2(x)$ 的零根爲 $-\lambda_1^{(1)}$, 則

$$-\mu_1^{(1)} = -\frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{l_0}, \quad -\lambda_1^{(1)} = -\frac{1}{m_1}\left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_1}\right).$$

顯然有關係式 $0 < \mu_1^{(1)} < \lambda_1^{(1)}$。假設我們已知 $P_{2k-2}(x)$ 和 $P_{2k-3}(x)$ 都是 $k-1$ 次多項式, 其零根皆爲負數, 爲單根, 而且當令 $-\mu_1^{(k-1)}, \ldots, -\mu_{k-1}^{(k-1)}$ 表 $P_{2k-3}(x)$ 的零根, 令 $-\lambda_1^{(k-1)}, \ldots, -\lambda_{k-1}^{(k-1)}$ 表 $P_{2k-2}(x)$ 的零根, 其中 $\mu_1^{(k-1)} < \mu_2^{(k-1)} < \cdots < \mu_{k-1}^{(k-1)}$, $\lambda_1^{(k-1)} < \cdots < \lambda_{k-1}^{(k-1)}$, 並滿足關係式

$$0 < \mu_1^{(k-1)} < \lambda_1^{(k-1)} < \mu_2^{(k-1)} < \cdots < \mu_{k-1}^{(k-1)} < \lambda_{k-1}^{(k-1)}. \tag{2.19}$$

則因

$$P_{2k-1}(x) = m_kxP_{2k-2}(x) + P_{2k-3}(x), \tag{2.20.1}$$

$$P_{2k}(x) = l_kP_{2k-1}(x) + P_{2k-2}(x) = (l_km_kx + 1)P_{2k-2}(x) + l_kP_{2k-3}(x), \tag{2.20.2}$$

注意到 P_{2k-2}, P_{2k-3} 各項係數皆正。由 (2.19) 以及 (2.20.1) 我們有下列關係式:

$$\begin{cases} P_{2k-1}(0)>0, \\ P_{2k-1}(-\mu_1^{(k-1)})=-m_k\mu_1^{(k-1)}P_{2k-2}(-\mu_1^{(k-1)})<0, \\ P_{2k-1}(-\lambda_1^{(k-1)})=P_{2k-3}(-\lambda_1^{(k-1)})<0, \\ P_{2k-1}(-\mu_2^{(k-1)})=-m_k\mu_2^{(k-1)}P_{2k-2}(-\mu_2^{(k-1)})>0, \\ P_{2k-1}(-\lambda_2^{(k-1)})=P_{2k-3}(-\lambda_2^{(k-1)})>0, \\ \quad\vdots \\ P_{2k-1}(-\mu_{k-1}^{(k-1)})=-m_k\mu_{k-1}^{(k-1)}P_{2k-2}(-\mu_{k-1}^{(k-1)}), \quad \text{sign}=(-1)^{k-1}, \\ P_{2k-1}(-\lambda_{k-1}^{(k-1)})=P_{2k-3}(-\lambda_{k-1}^{(k-1)}), \quad \text{sign}=(-1)^{k-1}, \\ \text{sign}P_{2k-1}(x)=(-1)^k, \quad x\to-\infty. \end{cases} \tag{2.21}$$

利用 (2.21) 以及中間值定理, 我們可以發現 $P_{2k-1}(x)$ 的零根皆爲負數, 且皆爲單根。若令它們以 $-\mu_1^{(k)},\ldots,-\mu_k^{(k)}$ 表示, 則

$$0<\mu_1^{(k)}<\mu_1^{(k-1)}<\lambda_1^{(k-1)}<\mu_2^{(k)}<\mu_2^{(k-1)}<\lambda_2^{(k-1)}<\cdots<\mu_{k-1}^{(k)}<\mu_{k-1}^{(k-1)}<\lambda_{k-1}^{(k-1)}<\mu_k^{(k)}. \tag{2.22}$$

利用 (2.20.2) 以及 (2.22), 我們有下列關係式:

$$\begin{cases} P_{2k}(-\mu_1^{(k)})=P_{2k-2}(-\mu_1^{(k)})>0, \\ P_{2k}(-\lambda_1^{(k-1)})=l_kP_{2k-1}(-\lambda_1^{(k-1)})<0, \\ P_{2k}(-\mu_2^{(k)})=P_{2k-2}(-\mu_2^{(k)})<0, \\ P_{2k}(-\lambda_2^{(k-1)})=l_kP_{2k-1}(-\lambda_2^{(k-1)})>0, \\ P_{2k}(-\mu_3^{(k)})=P_{2k-2}(-\mu_3^{(k)})>0, \\ \quad\vdots \\ P_{2k}(-\mu_{k-1}^{(k)})=P_{2k-2}(-\mu_{k-1}^{(k)}), \quad \text{sign}=(-1)^{k-2}, \\ P_{2k}(-\lambda_{k-1}^{(k-1)})=l_kP_{2k-1}(-\lambda_{k-1}^{(k-1)}), \quad \text{sign}=(-1)^{k-1}, \\ P_{2k}(-\mu_k^{(k)})=P_{2k-1}(-\mu_k^{(k)}), \quad \text{sign}=(-1)^{k-1}, \\ \text{sign}P_{2k}(x)=(-1)^k, \quad x\to\infty. \end{cases} \tag{2.23}$$

利用 (2.23), 以及中間值定理, 我們發現: $P_{2k}(x)$ 在區間 $(-\lambda_1^{(k-1)},-\mu_1^{(k)})$, $(-\lambda_2^{(k-1)},-\mu_2^{(k)})$, $\ldots,(-\lambda_{k-1}^{(k-1)},-\mu_{k-1}^{(k)})$, 以及 $(-\infty,-\mu_k^{(k)})$ 內各有一個零根, 分別令爲 $-\lambda_1^{(k)}$, $-\lambda_2^{(k)},\ldots,$ $-\lambda_k^{(k)}$。注意到 $\lambda_i^{(k)}$ 與 $\mu_j^{(k)}$ 顯然符合關係式

$$\mu_1^{(k)}<\lambda_1^{(k)}<\cdots<\mu_k^{(k)}<\lambda_k^{(k)}.$$

依據以上討論, 我們得到下列定理:

定理 2.4. 設 $l_0, l_1, \ldots, l_n, m_1, \ldots, m_n$ 是 $2n+1$ 個正數, 設

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = [l_0; m_1x, l_1, m_2x, \ldots, m_nx, l_n],$$

其中 $P_{2n}(x)$ 與 $Q_{2n}(x)$ 由遞迴關係 (2.16) 所決定, 則

(i) $P_{2n}(x)$ 與 $Q_{2n}(x)$ 皆是 n 次正係數多項式。

(ii) $P_{2n}(x)$ 與 $Q_{2n}(x)$ 的零根皆爲負數, 都是單根, 而且當令 $-\lambda_1^{(n)} > \cdots > -\lambda_n^{(n)}$ 表示 $P_{2n}(x)$ 的零根, 令 $-\mu_1^{(n)} > \cdots > -\mu_n^{(n)}$ 表示 $Q_{2n}(x)$ 的零根, 則 $\lambda_j^{(n)}$ 與 $\mu_k^{(n)}$ 有下列關係:

$$0 < \mu_1^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \cdots < \mu_n^{(n)} < \lambda_n^{(n)}.$$

下面是一個有意思的定理, 它可以告訴我們 P_{2n} 與 Q_{2n} 的長像。

定理 2.5. 設 $l_0, l_1, \ldots, l_n, m_1, \ldots, m_n$ 皆爲正數,

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = [l_0; m_1x, l_1, \ldots, m_nx, l_n].$$

則

$$l_0 + \cdots + l_n = P_{2n}(0), \quad Q_{2n}(0) = 1. \tag{2.24}$$

證明: 已知:

$$\begin{bmatrix} P_{2n}(x) & P_{2n-1}(x) \\ Q_{2n}(x) & Q_{2n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} m_nx & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

代 $x=0$ 入 (2.25), 並利用公式 $\begin{bmatrix} l & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P_{2n}(0) & P_{2n-1}(0) \\ Q_{2n}(0) & Q_{2n-1}(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} l_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & l_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & l_0 + l_1 + \cdots + l_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n l_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

即: $P_{2n}(0)=\sum_{j=0}^{n} l_j$, $Q_{2n}(0)=1$。

由前述定理得知: 若令 $P_{2n}(x)$, $Q_{2n}(x)$ 的零根分別爲 $-\lambda_j$, $-\mu_j$, $j=1,\ldots,n$,

$$0<\mu_1<\lambda_1<\mu_2<\lambda_2<\cdots<\mu_n<\lambda_n,$$

則 P_{2n}, Q_{2n} 可分別表示如下:

$$\begin{cases} P_{2n}(x)=\left(\sum_{j=0}^{n} l_j\right)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{x}{\lambda_j}\right), \\ Q_{2n}(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{x}{\mu_j}\right). \end{cases} \tag{2.26}$$

上述定理 2.5, 以及以下的定理 2.6, 對 Stieltjes 連分式的理論, 在反面問題的應用上很重要, 定理 2.6 出現於 M. Kreǐn 在1951年發表的一篇文章中 (見參考資料 [3])。由於該論文是俄文寫的, 而我不懂俄文, 所以以下定理的證明, 只好自已去想。

定理 2.6. 設 $P_{2n}(x)$, $Q_{2n}(x)$, 同定理 2.5, 並設 $Q_{2n}(x)$ 的零根爲 $-\mu_1,\ldots,-\mu_n$, 則 Stieltjes 連分式中 $m_1,\ldots,m_n$ 之和與 P_{2n}, Q_{2n} 之間, 有下列關係式:

$$m_1+\cdots+m_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu_j^2 P_{2n}(-\mu_j)Q'_{2n}(-\mu_j)}. \tag{2.27}$$

證明: 令

$$\tilde{P}_{2n}(x)=xP_{2n}(x), \quad \tilde{Q}_{2n}(x)=Q_{2n}(x).$$

則由 **Lemma 1.3** 得知

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2n}(x) &= x<l_0;m_1x,l_1,\ldots,m_nx,l_n>=<l_0x,m_1,l_1x,\ldots,m_n,l_nx>, \\ Q_{2n}(x) &= <m_1x,l_1,\ldots,m_nx,l_n>=<m_1,l_1n,\ldots,m_n,l_nx>, \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\tilde{P}_{2n}(x)}{\tilde{Q}_{2n}(x)}=[l_0x,m_1,\ldots,m_n,l_nx],$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_{2n}(x) & \tilde{P}_{2n-1}(x) \\ \tilde{Q}_{2n}(x) & \tilde{Q}_{2n-1}(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_0x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} m_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_nx & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

若代 $x=0$ 入 (2.28) 式, 並運用公式 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$, 則得下列公式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_{2n}(0) & \tilde{P}_{2n-1}(0) \\ \tilde{Q}_{2n}(0) & \tilde{Q}_{2n-1}(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{j=1}^{n} m_j & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sum_{j=1}^{n} m_j \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

也應注意到: 由 **Lemma 1.3** 得知

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{2n-1}(x) &= < l_0 x, m_1, \ldots, l_{n-1}x, m_n > \\ &= < l_0, m_1 x, \ldots, l_{n-1}, m_n x > = P_{2n-1}(x),\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{2n-1}(x) &= < m_1, l_1 x, m_2, l_2 x, \ldots, m_n > \\ &= \frac{1}{x} < m_1 x, l_1, m_2 x, l_2, \ldots, m_n x > = \frac{1}{x} Q_{2n-1}(x).\end{aligned} \tag{2.31}$$

從 (2.29) 得知:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{\tilde{Q}_{2n-1}(0)}{Q_{2n}(0)}. \tag{2.32}$$

另外, 從流數理論, 得知

$$\frac{\tilde{Q}_{2n-1}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{Q}_{2n-1}(-\mu_j)}{(x+\mu_j) Q'_{2n}(-\mu_j)}.$$

再由公式

$$\tilde{P}_{2n}(x)\tilde{Q}_{2n-1} - \tilde{P}_{2n-1}\tilde{Q}_{2n} = -1$$

得

$$-\mu_j P_{2n}(-\mu_j)\tilde{Q}_{2n-1}(-\mu_j) = -1,$$

因此, 我們有

$$\frac{\tilde{Q}_{2n-1}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu_j (x+\mu_j) Q'_{2n}(-\mu_j) P_{2n}(-\mu_j)}. \tag{2.33}$$

在 (2.33) 中令 $x \to 0$, 則由 (2.32) 可得 (2.27)。

3. **Stieltjes** 連分式與反面問題

設 $l_0,$, $l_1, \ldots, l_n$, $m_1, \ldots, m_n$ 是 $2n+1$ 個正數。令

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = [l_0, m_1 x, l_1, m_2 x, \ldots, m_n x, l_n].$$

並設 $-\lambda_1$, $-\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$ 表示 $P_{2n}(x)$ 的零根, 其中 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$。注意到: 透過關係式

$$\begin{aligned}P_{2k-1}(x) &= m_k x P_{2k-2} + P_{2k-3}(x), \\ P_{2k}(x) &= l_k P_{2k-1}(x) + P_{2k-2}(x),\end{aligned}$$

我們發現下列等式: $(k=1,2,\ldots,n)$,

$$-\frac{P_{2k-4}(x)}{l_{k-1}}+\left(\frac{1}{l_{k-1}}+\frac{1}{l_k}\right)P_{2k-2}(x)-\frac{P_{2k}(x)}{l_k}=-m_kxP_{2k-2}(x), \tag{3.1}$$

此處我們假定 $P_{-2}=0$。當 $x=-\lambda_j$, 由 (3.1) 式我們發現:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l_0}+\frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & & & \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{l_{n-1}} \\ & & & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_0(-\lambda_j) \\ P_2(-\lambda_j) \\ \vdots \\ P_{2m-2}(-\lambda_j) \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_0(-\lambda_j) \\ P_2(-\lambda_j) \\ \vdots \\ P_{2n-2}(-\lambda_j) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

我們把 (3.2) 式中左邊所出現的 $n\times n$ 對稱方陣記作 $S(l_0,\ldots,l_n)=[\alpha_{i,j}]$, $\alpha_{i,j}$ 如下:

$$\alpha_{j,j}=\frac{1}{l_{j-1}}+\frac{1}{l_j},$$
$$\alpha_{j,j+1}=\alpha_{j+1,j}=-\frac{1}{l_j},$$

而當 $|i-j|\geq 2$ 時, $\alpha_{i,j}=0$。將 (3.2) 左邊所出現的對角方陣記作 $M(m_1,\ldots,m_n)$。如此一來, (3.2) 式告訴我們:

定理 3.1. 設 $l_0,l_1,\ldots,l_n,m_1,\ldots,m_n$ 爲 $2n+1$ 個正數, $\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}=[l_0;m_1x,\ldots,m_nx,l_n]$, 而 $-\lambda_1,\ldots,-\lambda_n$ 表示 $P_{2n}(x)$ 的零根, 則 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是下列固有值問題的固有值:

$$S(l_0,\ldots,l_n)\vec{v}=\lambda M(m_1,\ldots,m_n)\vec{v}, \tag{3.3}$$

而向量 $(P_0(-\lambda_j),P_2(-\lambda_j),\ldots,P_{2n-2}(-\lambda_j))$ 是 (3.3) 對應於固有值 λ_j 的固有向量。

我們把方程式 (3.3) 稱作由長爲 l_0, $l_1,\ldots,l_n$ 的弦, 依照下列順序: l_0, m_1, l_1, $m_2,\ldots$, l_{n-1}, m_n, l_n, 串 n 個質量爲 $m_1,\ldots,m_n$ 的質點, 而兩邊固定的「Stieltjes 弦方程式」, $\sum_{j=0}^n l_j$ 爲其弦長。「Stieltjes 弦方程」可視爲我在「數學? 數學!」系列演講的第一次演講 (「獵殺紅色十月 — 談正弦函數的數學」, 見「數學傳播」第105期, 第9至13頁) 中所提到的弦方程式的離散形式。讀者們可以在 Gantmacher 與 Kreĭn 的書上 (見參考資料 [2]) 看到 Stieltjes 弦的相關介紹。

本文最後, 讓我們運用第2節的理論, 來回答以下的反面問題:「任予 $n+1$ 個相異正數 L, $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$, 試造一個含 n 個質點的 Stieltjes 弦方程式, 使其固有值恰爲 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, 弦之總長爲 L, 並求其總質量。」

這個問題的答案當然不唯一, 但是有解。解法如下: 任取滿足下列條件的 n 個正數 $\mu_1, \ldots, \mu_n$:

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \cdots < \mu_n < \lambda_n.$$

令

$$P(x) = L\prod_{j=1}^{n}(1+\frac{x}{\lambda_j}), \quad Q(x) = \prod_{j=1}^{n}(1+\frac{x}{\mu_j}).$$

將 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 依照第2節的方法展成 Stieltjes 連分式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = [l_0; m_1x, l_1, m_2x, \ldots, m_nx, l_n].$$

則依定理 2.5, $l_0 + \cdots + l_n = L$; 依定理 3.1, Stieltjes 弦方程式 (3.3) 的固有值恰為 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; 而由定理 2.6 得知, 此 Stieltjes 弦的總質量為 $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu_j^2 P(-\mu_j)Q'(-\mu_j)}$。

參考文獻

1. T. Stieltjes: Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 8(1894), J1-122; 9(1984), A1-47.
2. F. P. Gantmacher and M. G. Kreĭn: Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems, United States Atomic Energy Commision, 1950.
3. M. G. Kreĭn: On inverse problems for an inhomogeneous string, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 82(1952), 669-672. (俄文)

—本文演講人沈昭亮現任教於清華大學數學系—