不同反‘想’

顏德琮

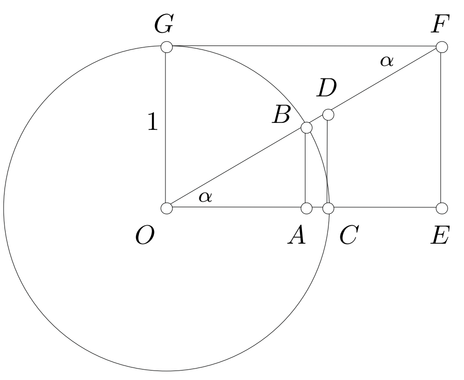
一. 前言

不少學生在學習「三角函數」這一單元的時候, 確實是充滿恐懼和挑戰的, 拜讀「數學傳播」第25卷3期 (p.63-67) 由李政豐等多位老師提出以圖解方法證明三角函數中許多公式, 深覺藉由證明視覺化及結合代數與幾何等不同的觀點將有助於學生在這單元中學得更好, 同時學習也將變得更有樂趣, 在此如野人獻曝般地提供個人另一種觀點來看三角函數。

從三角學的發展史上, 無論就其實用性或基本定義來看, 儘管在各個時期或國家使用著不同的單位制度, 探討三角的過程始終脫離不了「圓」, 而其發展也以尤拉 (Euler, 1707-1783) 在18世紀提出來的定義 (對應的函數線與圓半徑的比值) 及把圓半徑定爲1最具實用性, 本文即是從歷史的發展上找尋不同於教科書中的眼光來重新詮釋幾個三角函數的公式, 除了分享個人的心得外, 同時也期望給中學教師及學生們不同的角度來欣賞三角函數。

二. 本文

(一) 在尤拉之前三角函數的定義都是指在固定半徑的圓內各函數線上的長, 其圓半徑則因時代或地區的不同而相異甚鉅, 若我們假定圓半徑爲1, 則我們可以根據現在使用的定義在以下圖形中找到常用的六個三角函數其相對應的線段:



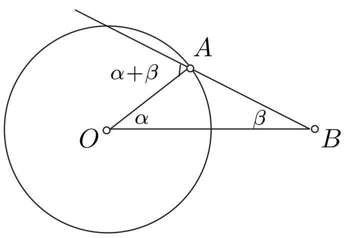
$$\sin\alpha = \overline{AB}, \quad \cos\alpha = \overline{OA}$$
$$\tan\alpha = \overline{CD}, \quad \cot\alpha = \overline{OE}$$
$$\sec\alpha = \overline{OD}, \quad \csc\alpha = \overline{OF}$$

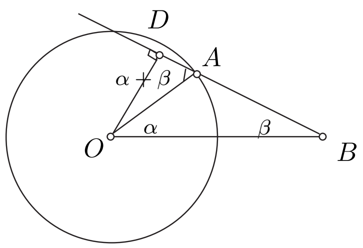
而如此一來, 我們就可以輕易的由上圖中的直角三角形及相似形中分別推導出平方關係及倒數關係:

$$
\begin{aligned}
\text{平方關係: } & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ (\Delta OAB\text{中}) \\
& \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \ (\Delta OCD\text{中}) \\
& \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha \ (\Delta OEF\text{中}) \\
\text{倒數關係: } & \sin\alpha \times \csc\alpha = 1 \ (\Delta OAB \sim \Delta OEF) \\
& \cos\alpha \times \sec\alpha = 1 \ (\Delta OAB \sim \Delta OEF) \\
& \tan\alpha \times \cot\alpha = 1 \ (\Delta OCD \sim \Delta OEF)
\end{aligned}
$$

(二) 以下即利用單位圓的便利性來推導正餘弦的和角、差角及兩倍角公式:

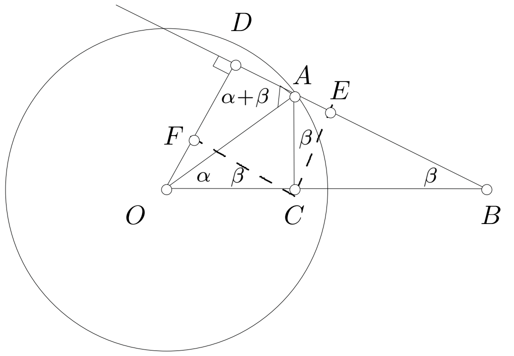
1. 和角 $(\alpha+\beta)$ 公式: 令圓半徑爲1





$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{OD}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{AD}$$

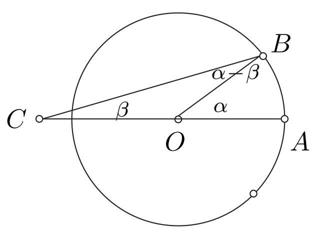
分別過 C 做 OD 線段及線段 BD 之平行線, 得 $\angle ACE = \angle OCF = \beta$。

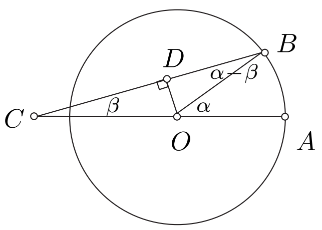


$$
\begin{aligned}
\overline{OD} &= \overline{DF} + \overline{FO} = \overline{EC} + \overline{FO} \\
&= \overline{AC} \times \cos\beta + \overline{OC} \times \sin\beta \\
&= \sin\alpha \times \cos\beta + \cos\alpha \times \sin\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{DE} - \overline{AE} = \overline{CF} - \overline{AE} \\
&= \overline{OC} \times \cos\beta - \overline{AC} \times \sin\beta \\
&= \cos\alpha \times \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta
\end{aligned}
$$

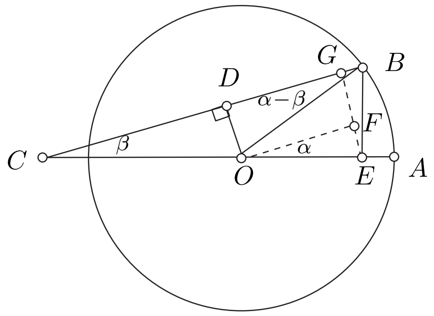
2. 差角 $(\alpha-\beta)$ 公式: 令圓半徑爲1





$$\sin(\alpha-\beta) = \overline{OD}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \overline{BD}$$

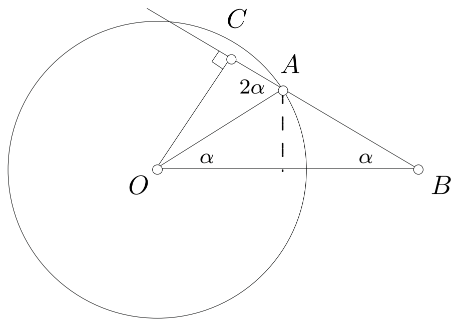
過 E 做 OD 線段之平行線, 得 $\angle GEB=\beta$, 再過 O 做 BC 線段之平行線, 得 $\angle FOE=\beta$。



$$\begin{aligned}\overline{OD}&=\overline{GF}=\overline{GE}-\overline{EF}\\&=\overline{BE}\times\cos\beta-\overline{OE}\times\sin\beta\\&=\sin\alpha\times\cos\beta-\cos\alpha\times\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{DB}&=\overline{GB}+\overline{DG}=\overline{GB}+\overline{OF}\\&=\overline{BE}\times\sin\beta+\overline{OE}\times\cos\beta\\&=\sin\alpha\times\sin\beta+\cos\alpha\times\cos\beta\end{aligned}$$

3. 兩倍角 (2α) 公式: 令圓半徑爲1

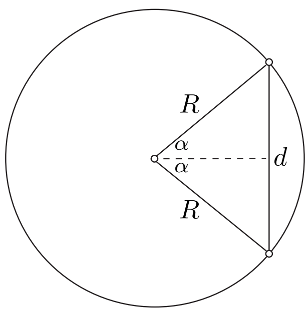


$$\overline{OB}=2\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha=\overline{OC}=\overline{OB}\times\sin\alpha=2\cos\alpha\times\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\overline{CA}=\overline{BC}-\overline{AB}=\overline{OB}\times\cos\alpha-1\\&=2\cos^2\alpha-1\end{aligned}$$

(三) 根據古希臘天文學家希帕霍斯 (Hipparchus, 180-125 B.C.) 製作的弦表 (未留存下來) 及托勒密 (Ptolemy, 150 A.D.) 的解釋, 可知早在兩千多年前便發現不同的圓心角有不同的弦長, 其關係如下圖所示, 將其換成現代使用的符號即爲 $2R\times\sin\alpha=d$。

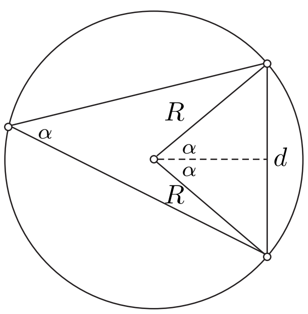


$$\sin\alpha=\frac{\text{chd}2\alpha}{2R}$$

若d爲2α角之弦長, 則 $d=2R\times\sin\alpha$

$$\frac{d}{\sin\alpha}=2R$$

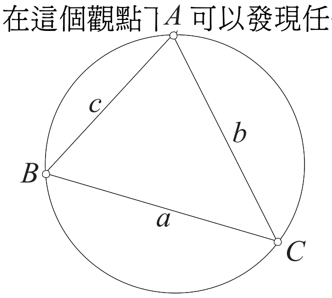
若結合圓周角的觀念即可發現弦長與圓周角的關係更爲密切:



弦長與圓周角的關係:

$$d=2R\times\sin\alpha$$

在這個觀點下可以發現任一三角形 ABC, 若其三邊長分別爲 a、b、c, 只要作其外接圓, 則



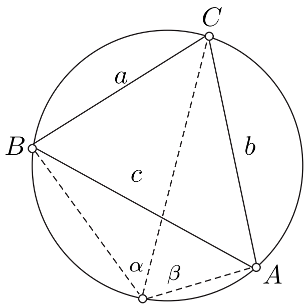
$$a = 2R\sin A,\ \ b = 2R\sin B,\ \ c = 2R\sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

此即爲「正弦定理」

若我們假設圓的直徑爲1, 則 α 的正弦函數值即爲圓周角爲 α 所對應的弦長, 根據這樣的假設是否有助於解決其他問題呢? 因爲數學中許多性質皆具有其不變性, 亦即不會因圖形的放大或縮小而改變其性質, 因此我們就在一直徑長爲1的圓內進一步探討, 以下即爲五個運用此假設的例子, 盼能提供另一種解題的觀點。

1. 餘弦定理



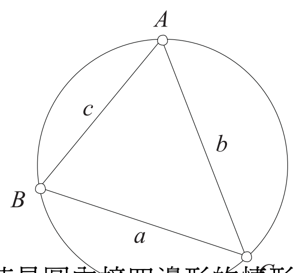
$$a = \sin\alpha \quad b = \sin\beta \quad c = \sin(\alpha+\beta)$$

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2-2ab\cos\angle ACB = a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\alpha-\beta)\\
&\quad = a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta)\\
&\quad = \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad = \sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&\quad = \sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad = (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2 = c^2
\end{aligned}$$

此種方法結合幾何與代數, 對學生而言也是一種基本但有別於一般作法的思考方式。

2. 三角形面積公式

當圓直徑設爲1時, 圓內接三角形的面積公式就變得相當有趣



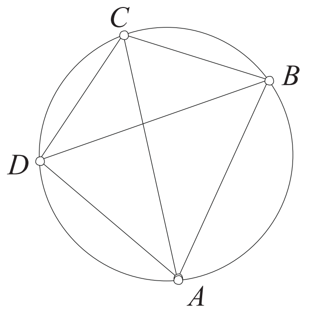
$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{ac\times\sin B}{2}\\ &= \frac{abc}{2}\end{aligned}$$

若是圓內接四邊形的情形又是如何呢? 在我們繼續討論前, 先進行另一個定理的探討。

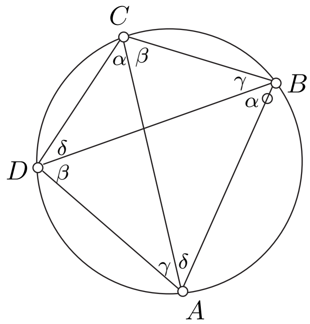
3. 托勒密定理

幾何的證明往往因爲恰當的輔助圖形 (輔助線、相似形) 而變得容易, 但要獲得這樣的靈感卻不是那麼簡單, 以下便提供利用圓周角與弦長關係來證明托勒密定理, 表面上看似繁瑣的式子其實所需要的技巧卻是相當基本且簡單的。

托勒密定理: 已知圓內任意內接四邊形, 其對角線乘積等於兩組對邊乘積之和



$$\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{AD}$$

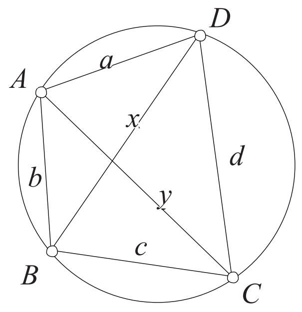


$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi,\ \delta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\overline{AC}=\sin(\alpha+\gamma),\ \overline{BD}=\sin(\alpha+\beta)$$
$$\overline{AB}=\sin\beta,\ \overline{CD}=\sin\gamma$$
$$\overline{BC}=\sin(\alpha+\beta+\gamma),\ \overline{AD}=\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
&\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{AD}\\
=&\sin\beta\times\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\times\sin\alpha\\
=&\sin\beta\times\sin\gamma+[\sin(\alpha+\beta)\times\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\times\sin\gamma]\times\sin\alpha\\
=&\sin\beta\times\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\sin\gamma\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma[\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)\times\sin\alpha]\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma(\sin\beta+\cos\alpha\times\cos\beta\times\sin\alpha-\sin^2\alpha\times\sin\beta)\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma[\sin\beta(1-\sin^2\alpha)+\cos\alpha\times\cos\beta\times\sin\alpha]\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma\times(\sin\beta\times\cos^2\alpha+\cos\alpha\times\cos\beta\times\sin\alpha)\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma\times\cos\alpha\times(\sin\beta\times\cos\alpha+\cos\beta\times\sin\alpha)\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma\times\cos\alpha\times\sin(\alpha+\beta)\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times(\sin\alpha\times\cos\gamma+\sin\gamma\times\cos\alpha)\\
=&\sin(\alpha+\beta)\times\sin(\alpha+\gamma)\\
=&\overline{AC}\times\overline{BD}
\end{aligned}$$

4. 圓內接四邊形

根據下圖及圓內接三角形面積 (直徑爲1) 的推論, 我們可以寫出四邊形$ABCD$的面積 (令$ABCD$面積爲 S):



$$ABCD\text{面積}=\frac{xab+xcd}{2}=\frac{x(ab+cd)}{2}$$
$$=\frac{yad+ybc}{2}=\frac{y(ad+bc)}{2}$$

再利用據托勒密定理得知 $xy=ac+bd$, 則可推得:

$$S=\sqrt{\frac{x(ab+cd)}{2}\times\frac{y(ad+bc)}{2}}=\frac{\sqrt{xy(ab+cd)\times(ad+bc)}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{(ab+cd)\times(ad+bc)\times(ac+bd)}}{2}$$

5. Brahmagupta 公式

在推導內接四邊形過程中發現 $x(ab+cd)=y(ad+bc)$, 若再分別利用托勒密定理 $xy=(ac+bd)$ 代入即可證明此公式:

$$x(ab+cd)=\frac{(ad+bc)\times(ac+bd)}{x}\ \text{則}\ x^2=\frac{(ad+bc)\times(ac+bd)}{(ab+cd)}$$
$$y(ad+bc)=\frac{(ab+cd)\times(ac+bd)}{y}\ \text{則}\ y^2=\frac{(ab+cd)\times(ac+bd)}{(ad+bc)}$$

三. 結語

透過不同的觀點, 數學可以呈現多種風貌, 不論是藉由圖形來輔助證明的直觀性抑或藉助於歷史古人的眼光, 在追求數學多種風貌的過程中不乏個人探索的趣味與發現的驚喜, 透過本文的分享, 藉以期許學生們在學習數學的旅程中充滿創造的精神也培養個人多方位的觀點以窺探這奇異的世界, 學習數學也將會變得更有趣。

參考文獻

1. 李政豐、顏貽隆、陳蘭香、王淑霞、陳明鋒, 數學傳播季刊第25 卷第三期, 民90, 63-67。
2. 蔡聰明: 圓內兩交弦定理, 科學月刊第30卷第三期, 民89, 221。
3. 梁宗巨, 數學歷史典故, 九章出版社, 民84年, p.100-104。
4. 王懷權, 數學發展史, 學英文化, 民76年, 64。
5. 世界數學簡史, 凡異出版社, 民76年, 193。

—本文作者就讀於台灣師範大學科學教育研究所—