多邊形的面積比是否為常數?
——動態學習的例子

李政豐

前言:

在「美國數學教師學會」(NCTM) 針對高中以下學生爲對象所經營的數學教材內容裡, 其中有一個與幾何相關, 目的在測試學生的聯結能力, 非常具有觀察、實驗價值, 且具互動性的 JAVA 程式:「7.3 Understanding Ratio of Areas」。

由於這個問題爲大部份的老師或學生所忽略, 未曾仔細思考過, 也比較不容易證明, 因而藉著 JAVA 程式使它變成一個具實驗、觀察、猜測、證明等多重價值的好題材, 實爲有待開發的可行方式之一。

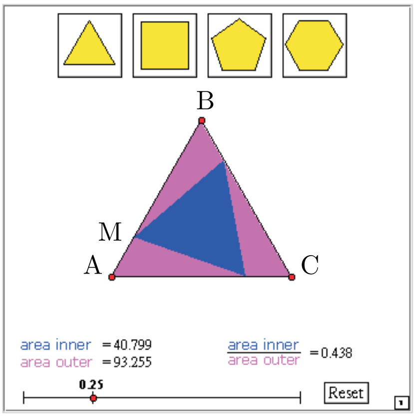
7.3. Understanding Ratios of Areas of Inscribed Figures Using Interactive Diagrams

This example illustrates how students, using dynamic and interative geometric figures, can understand connections between algebra and geometry, as described in the *connections Standard*. They can develop an understanding of how to justify geometric relationships in a technological erivironment, as described in the *Geometry Standard*.

本文:

甲: M 是 AB 線段上比率爲 0.25 的分點, 意指 M 在 AB 線段上, 且 $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 0.25$, 就任意一個三角形, 按順時針方向取各邊固定比率 0.25 的分點, 連成一個內接的三角形: 我們擬考察內接三角形面積和原三角形面積比的關係, 內外兩個三角形是否相似?

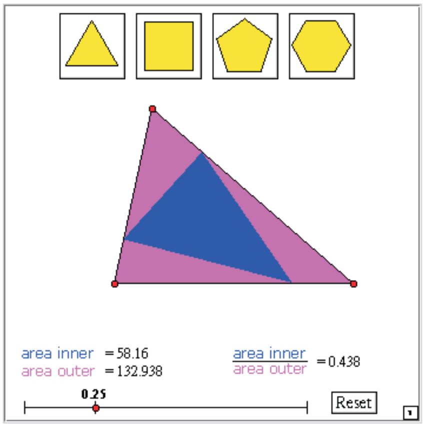
[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 1. 一個正三角形的四分之一分點, 所連成的正三角形

[How to Use the Interactive Figure]

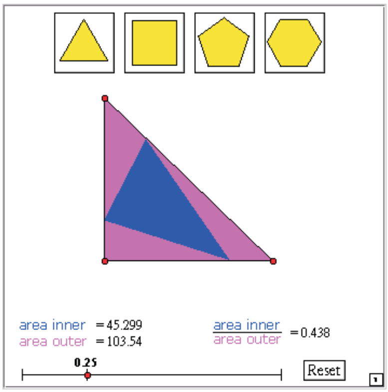


[Stand-alone applet]

圖 2. 任意三角形的四分之一分點, 所連成的三角形

觀察上面兩個圖, 我們發現兩者的內外三角形的面積比都是 0.438。若外三角形是直角三角形, 我們看看內三角形是不是直角三角形?

[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 3. 是一個直角三角形的四分之一分點, 所連成的三角形

由上圖明顯可見, 面積比仍是 0.438, 但內三角形不是直角三角形。雖然相似多邊形的面積比等於邊長的平方比, 但它們不是相似多邊形, 不能據以判定其面積比。因此我們轉移方向, 找尋其他的證明方式。

定理: 任意的 ΔABC, M 在 AB 線段上, N 在 BC 線段上, P 在 CA 線段上, 且 $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}=r$, 則 $\frac{\Delta MNP}{\Delta ABC}=1-3r(1-r)$

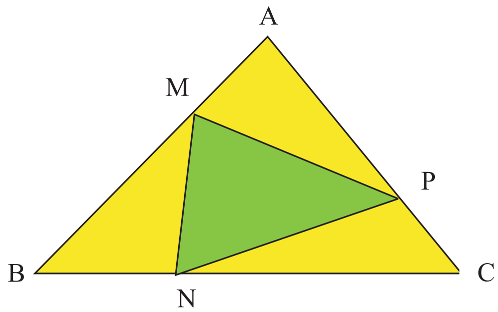


圖 4.

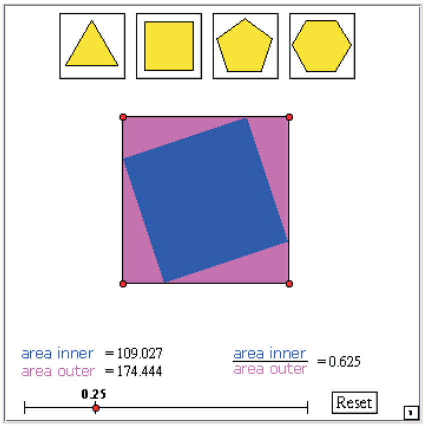
證明: $$\frac{\Delta AMP}{\Delta ABC}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{AP}\times\sin A}{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A}=r(1-r)$$

同理 $$\frac{\Delta BNM}{\Delta ABC}=\frac{\Delta CPN}{\Delta ABC}=r(1-r)$$

故 $$\frac{\Delta MNP}{\Delta ABC}=1-3r(1-r)$$

乙: 我們再觀察任意四邊形, 各邊固定比率是 0.25 的分點, 去連成一個小四邊形。

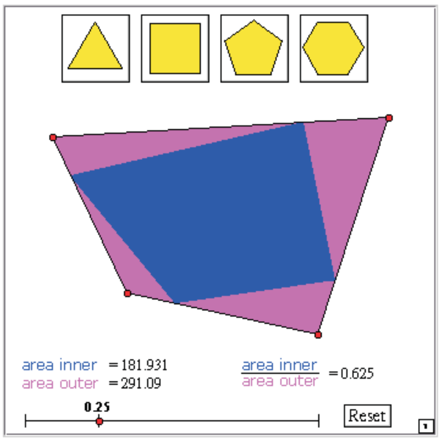
[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 5. 一個正方形的四分之一分點, 所連成的內正方形

[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 6. 是一個任意四邊形的四分之一分點, 所連成的小四邊形

觀察上面兩個圖, 我們發現兩者的內外四邊形的面積比都是 0.625。於是我們嘗試著來證明它!

定理: 任意的四邊形 ABCD, 各邊固定比率是 r 的分點, 去連成一個小四邊形 MNPQ, 則內外兩個四邊形的面積比爲 $(r^2+(1-r)^2)$

證明:　假設 $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{DA}}=r$

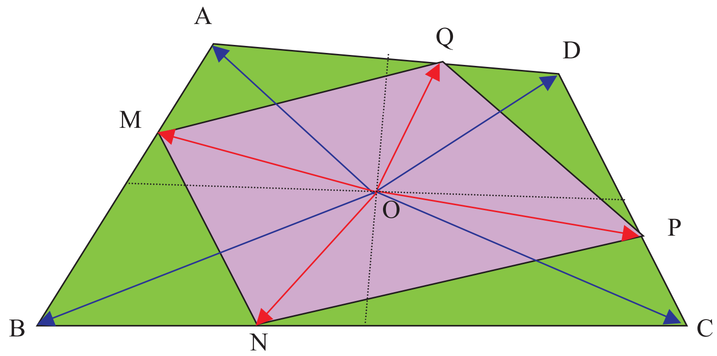


圖 7.

我們準備用解析幾何來證明它! 令 O 點爲四邊形 ABCD 的兩對邊中點連線的交點, 則向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{0}$, 其次以 O 爲原點, 由分點公式

$$\overrightarrow{OM}=(1-r)\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{OB},\qquad \overrightarrow{ON}=(1-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-r)\overrightarrow{OC}+r\overrightarrow{OD},\qquad \overrightarrow{OQ}=(1-r)\overrightarrow{OD}+r\overrightarrow{OA}$$

因此, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$

亦即兩四邊形到四頂點向量和爲零的點相重合。令 A、B、C、D 四點的座標分別爲 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$ $D(x_4,y_4)$, 則由分點公式

$$\overrightarrow{OM}=(1-r)(x_1,y_1)+r(x_2,y_2)=((1-r)x_1+rx_2,(1-r)y_1+ry_2)$$
$$\overrightarrow{ON}=(1-r)(x_2,y_2)+r(x_3,y_3)=((1-r)x_2+rx_3,(1-r)y_2+ry_3)$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-r)(x_3,y_3)+r(x_4,y_4)=((1-r)x_3+rx_4,(1-r)y_3+ry_4)$$
$$\overrightarrow{OQ}=(1-r)(x_4,y_4)+r(x_1,y_1)=((1-r)x_4+rx_1,(1-r)y_4+ry_1)$$

四邊形 MNPQ 的面積= ΔMON 面積+ΔNOP 面積+ΔPOQ 面積+ΔQOM 面積

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_1+rx_2 & (1-r)y_1+ry_2\\(1-r)x_2+rx_3 & (1-r)y_2+ry_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_2+rx_3 & (1-r)y_2+ry_3\\(1-r)x_3+rx_4 & (1-r)y_3+ry_4\end{vmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_3+rx_4 & (1-r)y_3+ry_4\\(1-r)x_4+rx_1 & (1-r)y_4+ry_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_4+rx_1 & (1-r)y_4+ry_1\\(1-r)x_1+rx_2 & (1-r)y_1+ry_2\end{vmatrix}
\end{aligned}\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_1 & (1-r)y_1\\(1-r)x_2 & (1-r)y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_2 & ry_2\\rx_3 & ry_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_1 & ry_2\\(1-r)x_2 & ry_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_2 & (1-r)y_1\\rx_3 & (1-r)y_2\end{vmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_2 & (1-r)y_2\\(1-r)x_3 & (1-r)y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_3 & ry_3\\rx_4 & ry_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_2 & ry_3\\(1-r)x_3 & ry_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_3 & (1-r)y_2\\rx_4 & (1-r)y_3\end{vmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_3 & (1-r)y_3\\(1-r)x_4 & (1-r)y_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_4 & ry_4\\rx_1 & ry_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_3 & ry_4\\(1-r)x_4 & ry_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_4 & (1-r)y_3\\rx_1 & (1-r)y_4\end{vmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_4 & (1-r)y_4\\(1-r)x_1 & (1-r)y_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_1 & ry_1\\rx_2 & ry_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(1-r)x_4 & ry_1\\(1-r)x_1 & ry_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}rx_1 & (1-r)y_4\\rx_2 & (1-r)y_1\end{vmatrix}
\end{aligned}\tag{2}
$$

消去後再化簡, 剩下的是:

$$
=(r^2+(1-r)^2)\left\{\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\x_4 & y_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_4 & y_4\\x_1 & y_1\end{vmatrix}\right\}
$$

(1) 式的四個行列式都是取逆時鐘方向的向量, 其行列式值皆為正數, 故計算面積時, 不用加絕對值。

(2) 式的每列的右兩項, 共八項展開後可以互相消去。

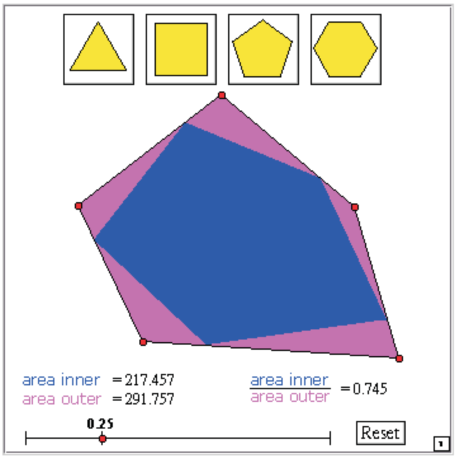
因此四邊形 MNPQ 的面積

$=(r^2+(1-r)^2)\{\Delta$ AOB 面積 $+\Delta$ BOC 面積 $+\Delta$ COD 面積 $+\Delta$ DOA 面積 $\}$

$=(r^2+(1-r^2))$ 四邊形 ABCD 的面積, 證畢。

丙: 我們再觀察五邊形

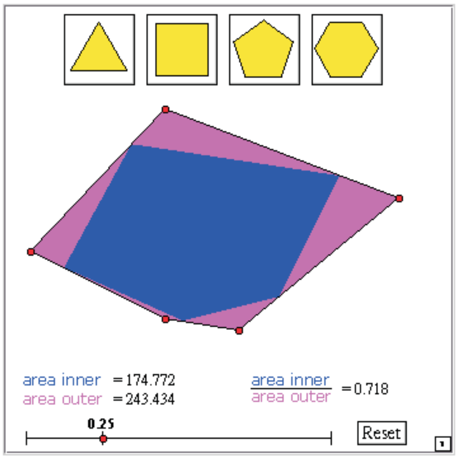
[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 8. 任意五邊形, 各邊固定比率是 0.25 的分點, 去連成一個內五邊形:

[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 9. 任意五邊形, 各邊固定比率是 0.25 的分點, 去連成一個內五邊形

上面兩個圖形的面積比值不同。

問題: 任意的五邊形 ABCDE, P、Q、R、S、T 爲各邊固定比率是 r 的分點, 則 ABCDE 和 PQRST, 內外兩個五邊形的面積比爲何?

假設 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{DS}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{ET}}{\overline{EA}}=r$

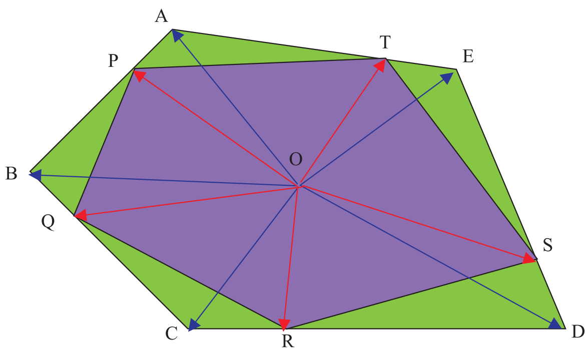


圖 10.

若 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OC}=(x_3,y_3)$, 則 $|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}|$ 代表行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$。

五邊形 PQRST 面積

$$=\Delta\text{ POQ 面積 }+\Delta\text{ QOR 面積 }+\text{ ROS 面積 }+\Delta\text{ SOT 面積 }+\Delta\text{ TOP 面積}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left|\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}\right|+\left|\overrightarrow{OQ}\wedge\overrightarrow{OR}\right|+\left|\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}\right|+\left|\overrightarrow{OS}\wedge\overrightarrow{OT}\right|+\left|\overrightarrow{OT}\wedge\overrightarrow{OP}\right|\right\}$$

由向量分點公式, $|\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}|=|((1-r)\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{OB})\wedge((1-r))\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}|$

$$=(1-r)^2|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|+r^2|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}|+r(1-r)|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}|$$

注意 $|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}|=0$

五邊形 PQRST 面積

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\Big\{(1-r)^2|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|+r^2|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}|+r(1-r)|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}|\Big\}\\
&\quad+(1-r)^2|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}|+r^2|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}|+r(1-r)|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}|\\
&\quad+(1-r)^2|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}|+r^2|\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OE}|+r(1-r)|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OE}|\\
&\quad+(1-r)^2|\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OE}|+r^2|\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OA}|+r(1-r)|\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}|\\
&\quad+(1-r)^2|\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OA}|+r^2|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|+r(1-r)|\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}|\\
&=(r^2+(1-r)^2)(\text{五邊形 ABCDE 的面積})\\
&\quad+r(1-r)(|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}|+|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}|)
\end{aligned}$$

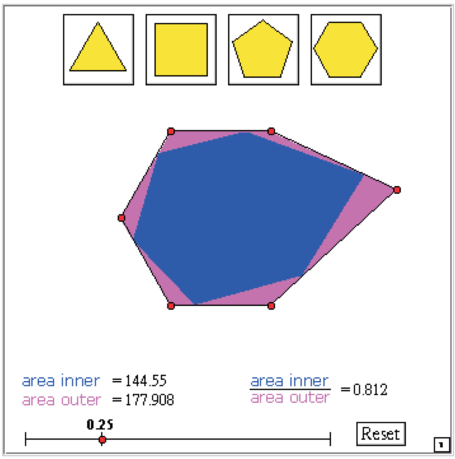
因此兩個五邊形的面積比是不是定數。取決於

$$r(1-r)(|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}|+|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OC}\wedge)\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}|$$

與五邊形 ABCDE 的面積比, 是否為定值。

丁: 在任意六邊形裡, 各邊固定比率是 0.25 的分點, 去連成一個內六邊形, 兩者面積比仍然不固定, 可仿五邊形的方法提出反例。但正六邊形各邊固定比率是 0.25 的分點, 所連成一個內六邊形, 若只移動正六邊形的一個頂點, 其面積比仍然固定, 參見圖 (11) (12), 上面兩個圖的面積比都是 0.812, 與正六邊形的比值相同。這個證明與上述座標幾何的證法大致相同, 不另贅述。

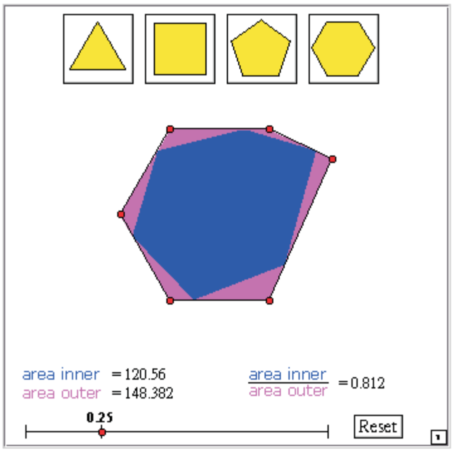
[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 11.

[How to Use the Interactive Figure]



[Stand-alone applet]

圖 12.

結語:

學生的學習, 容易『類化』, 遵循『慣例』, 絕大部份的師生都自認爲找到了規則, 仿上面「定比率點」, 所做出來的內外三角形的面積比是固定的, 內外四邊形的面積比也是固定的。而且在正五邊形、正六邊形, 如果只移動一個頂點, 內外多邊形的面積比仍是固定的。於是『失去了戒心』, 居然任意五邊形以上就錯了。而且證明還有相當的困難度, 一般的學生容易失去了『追根究底』的決心, 於是幾何聯結的能力就被誤用了。這是一個相當出色的動態學習幾何素材, 如果能讓學生自己去探索、研究, 他將會有很多的心得。

由衷的感謝國立花蓮師範學院數理教育系袁媛教授, 以數學教育的動態學習觀點, 帶領我們進入 NCTM 的世界, 也感謝國立敎通大學應用數學系黃大原教授、陳明璋教授對本文的修正、建議與指導。

參考文獻:

http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.3/index.htm

—本文作者任教於國立竹南高級中學—