循環小數的迴響

葉均承 · 蘇麗敏

一、前言

在高一數學的課程中, 介紹到循環的無限小數爲一有理數, 以及如何將循環小數變成分數之際, 正巧拜讀到康教授在 “數學傳播” 25卷3期 (民90年9月) 中「循環小數」一文, 我想此文必能引起學生的興趣, 故將其介紹給學生閱讀; 果眞引起學生極大的共鳴! 尤其我的學生葉均承將作者提出的幾個性質給出詳細證明, 且發現文中的幾個筆誤, 經師生討論後, 將其整理如下。

二、本文

(一)「循環小數」一文中最令人著迷的性質, 莫過於循環節是偶數位時, 我們可以將其平分成前後兩段, 而前段的第 k 個數與後段的第 k 個數和恆爲 9。

例: $\dfrac{1}{7}=0.\overline{142\ \ 857}$ (6 位循環節)

$\dfrac{1}{73}=0.\overline{0136\ \ 9863}$ (8 位循環節)

而對於此性質的說明在「循環小數」一文中的定理 5 的敍述令我們頗爲困惑, 其定理 5 敍述:

> *若 $p\geq 7$ 是個質數, n 與 m 是任意正整數且 p 不整除 m, “則” $\frac{m}{pn}$ 的循環節有偶數位。將此循環節分成前後兩段, 則此兩段之對應項的和皆爲 9。*

爲何定理 5 提及 $\frac{m}{pn}$ 型的循環節有偶數位, 但由文中 p.57 的表格知 $p=$31, 37, 41, 43, 53,... 的諸多例子中, 循環節皆只有奇數位 (表格中 $p=37$ 時, 循環節應有 3 位, 表格誤寫成爲 2 位, $\frac{1}{37}=0.\overline{027}$), 從這些例子, 我們認爲定理 5 中的 “則” 應爲 “且”。而以上的觀察, 更促使我們去思考一個眞分數欲成爲偶數位循環節時, 其分母是否有限制? 而由文中定理 1:

如果 $1 \le b < a$, a 沒有 2 或 5 的質數, 並且 a 與 b 互質, 那麼 $\frac{b}{a}$ 的循環節位數恰好等於: $\min\{e \in \mathbb{N} : 10^e \equiv 1 \pmod{a}\}$

所以假若 $\frac{b}{a}$ 循環節恰有 $2k$ 位, 則 $a \mid 10^{2k}-1$, 即 $a \mid (10^k+1)(10^k-1)$。因爲循環節恰有 $2k$ 位, 所以 $a \nmid 10^k-1$, 這樣可以得到 $a \mid 10^k+1$。因此建立在 $a \mid 10^k+1$ 的條件下, 我們證出當循環節有 $2k$ 位時, 其前段第 k 位與後段第 k 位的和恆爲 9。其證明如下:

性質 1. $(a,b)=1$, $a>b$, $a \mid 10^k+1$, 則 $\frac{b}{a} = 0.\overline{c_1c_2\cdots c_kd_1d_2\cdots d_k}$, 其中 $c_i+d_i=9$ $i=1,2,\cdots k$

證明: 令 $10^k+1=am$, 經過通分後, 我們得到

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{bm}{am} = \frac{bm}{10^k+1} = \frac{bm(10^k-1)}{(10^k+1)(10^k-1)}\\ &= \frac{(bm-1)\times 10^k + (10^k-bm)}{10^{2k}-1} \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{b}{a} = \frac{c_1c_2\cdots c_k\ d_1d_2\cdots d_k}{10^{2k}-1} = \frac{(c_1c_2\cdots c_k)\times 10^k + d_1d_2\cdots d_k}{10^{2k}-1} \qquad (2)$$

由於 $(1)=(2)$, 所以我們知道

$$\begin{cases} bm-1 = c_1c_2\cdots c_k & (3)\\ 10^k-bm = d_1d_2\cdots d_k & (4)\end{cases}$$

由 $(1)+(2)$ 可得到 $10^k-1=(c_1c_2\cdots c_k)+(d_1d_2\cdots d_k)$ 即 $\begin{array}{r} c_1\ c_2\cdots c_k\\ +\,d_1\ d_2\cdots d_k\\ \hline 9\ \ 9\ \cdots\ 9\end{array}$ 由於兩個 0～9 的整數相加其和一定小於 19, 故 $c_i+c_i=9$, $i=1,2,\ldots,k$。

(二) 而對於「循環小數」一文例題 7 中所提 "如果 $\frac{n}{91}=0.\overline{abcdef}$, 那麼有沒有一個正整數, 使得 $\frac{m}{91}=0.\overline{fedcba}$ 呢? 像這樣倒過來的循環小數, 確實吸引人, 只是爲何分母爲 91 呢? 我們先來看下面性質:

性質 2. 令 $x=0.\overline{abcdef}$, $y=0.\overline{fedcba}$, 則 "$a+d=b+e=c+f=9$, 若且惟若 $x+y=1+\frac{9\times(a-c)}{91}$"。

證明: 當 $a+d=b+c=c+f=9$ 時, 我們知道

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{abcdef+fedcba}{999999}\\ &= \frac{1}{999999}[(a+f)\times 10^5+(b+e)\times 10^4+(c+d)\times 10^3+(d+c)\times 10^2\\ &\quad +(e+b)\times 10+(a+f)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{999999}[(a+9-c)\times 10^5+(b+9-b)\times 10^4+(c+9-a)\times 10^3+(9-a+c)\times 10^2\\
&\quad+(9-b+b)\times 10+(a+9-c)]\\
&=1+(a-c)\times\frac{10^5-10^3-10^2+1}{999999}\\
&=1+(a-c)\times\frac{9}{91}
\end{aligned}
$$

當 $x+y=1+\frac{9\times(a-c)}{91}$ 時, 由於 $|9-a-d|$, $|9-b-e|$, $|9-c-f|$ 都小於 9。由上面的計算過程 (逆向) 容易得到 $a+d=b+e=c+f=9$。當我們知道 $x=\frac{13}{91}=0.\overline{142857}$ 時, 其中 $a=1$, $c=2$, 利用性質 2 得到 $x+y=1+\frac{9(1-2)}{91}=\frac{82}{91}$, 則我們知道 $0.\overline{758241}=\frac{69}{91}$, 這樣就有成對 ($0.\overline{abcdef}$ 和 $0.\overline{fedcba}$, 其中 $a+d=b+e=c+f=9$) 的循環小數出來, 就像「循環小數」一文中給出許多成對的例子。

$$
\begin{aligned}
&\frac{13}{91}=0.\overline{142857}\quad 0.\overline{758241}=1+\frac{9(1-2)}{91}-\frac{13}{91}=\frac{69}{91}\\
&\frac{7}{91}=0.\overline{076923}\quad 0.\overline{329670}=1+\frac{9(0-6)}{91}-\frac{7}{91}=\frac{30}{91}\\
&\frac{1}{91}=0.\overline{010989}\quad 0.\overline{989010}=1+\frac{9(0-0)}{91}-\frac{1}{91}=\frac{90}{91}\\
&\frac{5}{91}=0.\overline{054945}\quad 0.\overline{549450}=1+\frac{9(0-4)}{91}-\frac{5}{91}=\frac{50}{91}\quad\text{(原文遺漏)}\\
&\frac{2}{91}=0.\overline{021978}\quad 0.\overline{879120}=1+\frac{9(0-1)}{91}-\frac{2}{91}=\frac{80}{91}\\
&\frac{4}{91}=0.\overline{043956}\quad 0.\overline{659340}=1+\frac{9(6-9)}{91}-\frac{4}{91}=\frac{60}{91}\\
&\frac{14}{91}=0.\overline{648351}\quad 0.\overline{153846}=1+\frac{9(6-8)}{91}-\frac{14}{91}=\frac{59}{91}\\
&\frac{24}{91}=0.\overline{263736}\quad 0.\overline{637362}=1+\frac{9(2-3)}{91}-\frac{24}{91}=\frac{58}{91}
\end{aligned}
$$

在「循環小數」文中提到公分母必須是 91, 但是綜觀性質 2 的證明過程中, 並未用到分母爲 91 的條件, 所以我們試著找一些例子, 例如 $0.\overline{123876}=\frac{124}{1001}$ 與 $0.\overline{678321}=\frac{679}{1001}$ 的公分母是 1001, $0.\overline{811188}=\frac{116}{143}$ 與 $0.\overline{881118}=\frac{126}{143}$ 的公分母是 143, 以及 $0.\overline{006993}=\frac{1}{143}$ 與 $0.\overline{399600}=\frac{400}{1001}$ 的公分母是 1001。這些例子又引起了我們另一個問題: “令 $x=0.\overline{abcdef}$ 及 $y=0.\overline{fedcba}$ 其中 $a+d=b+e=c+f=9$, 且 x 的循環節恰好是 6, 請問 x 與 y 的可能的最小公分母之値是多少?”

從性質 1 前面的敍述可以知道 x 與 y 的公分母一定是 1001 的因數, 但不可能是 11 (x 與 y 的分母不可能是 11, 否則它們的循環節位數是 2 而不是 6) 所以比 91 小的公分母只可

能是 7, 13 和 77。

令 $x=\frac{q}{p}=0.\overline{abcedf}$, $y=\frac{r}{p}=0.\overline{fedcba}$ 由性質 2 得到 $\frac{q}{p}+\frac{r}{p}=1+\frac{9(a-c)}{91}$ 兩邊各乘以 $91p$ 得到

$$91(q+r)=91p+9p(a-c) \tag{$*$}$$

我們考慮下列 2 種情況:

(i) 如果 $p\in\{7,77\}$, 則 $(p,13)=1$, 由公式 $(*)$ 推導出 $a-c$ 是 13 的倍數, 由於 a, c 是 $0,1,2,\ldots,9$ 中的數, 所以 $a=c$, 即 $x+y=1$ 因此 x,y 是同分母。很容易就可以檢查出眞分數 $\frac{q}{7}$ 的循環小數表示中 $a\neq c$, 所以 $p\neq 7$。如果 $p=77$, 已知 $x=0.\overline{abaded}$ 其中 $a+d=b+e=9$。由 $x=\frac{abaded}{999999}=\frac{u}{77}$ 可以推出 $\frac{aba+1}{1001}=\frac{u}{77}$, 即 $13u=aba+1$, 因爲 $aba+1\equiv a\times 101+b\times 10+1\equiv 1+10(a+b) \pmod{13}$ 由於 a,b 是 0, 1, 2,. . ., 9 中的數, 所以 $a+b=9$, 因此 $d=b$, $a=e$ 這樣 $x=0.\overline{ababab}$ 是循環節位數爲 2 的分數 (不合)。

(ii) 如果 $p=13$, 則 $(p,7)=1$。由公式 $(*)$ 推導出 $7\mid a-c$。但是我們檢查出分母爲 13 的正眞分數中沒有一個眞分數的循環小數的表示裡出現 $a-c$ 是 7 的倍數, 所以 $p\neq 13$, 因此我們證明 91 是 x 與 y 公分母的可能之值中最小的數。

三、結語

最後, 我們想最該感謝的是「循環小數」一文的作者, 讓我們欣賞到循環小數的奧祕, 引發我們繼續探究的興趣, 更期待能有更多的數學前輩, 提供適合高中生閱讀的好文章。我們也非常感謝評審細心的審查及提供許多的寶貴意見。

—本文作者葉均承同學就讀北一女中, 蘇麗敏老師任教北一女中—