距離乘積的表示與 Erdös 問題的解

徐瀝泉 · 王繼岳

摘要: 本文以 P. Erdös 在“美國數學月刊”1993年2月號所提供的問題 (序號 10282) 為背景, 給出了單位圓內一點至單位圓上點的距離乘積的解析運算式, 其內涵十分豐富且幾何意義明確, 由此順利地解決並推廣了 Erdös 問題。

關鍵詞: 單位圓、距離乘積、艾狄胥問題

0. 引論

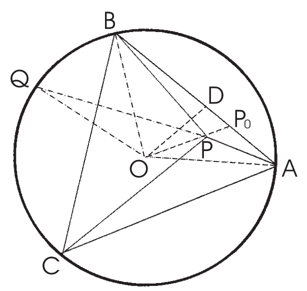
筆者為尋求艾狄胥 (P. Erdös) 問題的解, 最初訴諸初等幾何, 雖找到了其解, 但覺缺乏深度, 進而尋找解析法, 無可避免地涉及單位圓內一點至弦的兩端點距離的乘積, 在此意義上, 本文提供了內涵豐富且幾何意義明確的距離乘積的解析運算式。根據其性質, 順利地解決了艾狄胥問題, 並把它稍作推廣。

1. 艾狄胥問題

A、B、C 為內接單位圓的三角形的頂點, P 為三角形內一點, 求證

$$|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|<32/27$$

原載“美國數學月報”1993年2月號, 184頁, 問題10282, 下圖1-1由作者給出。



2. 距離公式

如圖1-1, 單位圓內一點 P $(r\cos t,\, r\sin t)$, ($r\in[0,1)$ 爲 P 點至圓心 O 之距離) 至單位圓上任一點 Q $(\cos\theta,\, \sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$ 的距離平方

$$|PQ|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(t-\theta),\ \ r\in[0,1) \tag{A}$$

由兩點間的距離公式易證 (A) 式。

3. 距離乘積

AB 爲單位圓 O 的弦, 端點座標 $A(1,0)$, $B(\cos 2\alpha,\ \ \sin 2\alpha)$, 扇形 OAB 內的點 $P(r\cos t, r\sin t)$, 不排斥 P 點落在半徑 OA 或 OB 上, 故 $t\in[0,2\alpha]$, 應用距離公式

$$\begin{aligned}|PA|^2\cdot|PB|^2 &= (1+r^2-2r\cos t)[1+r^2-2r\cos(t-2\alpha)]\\ &= (1+r^2)^2 - 2r(1+r^2)[\cos t+\cos(t-2\alpha)] + 4r^2\cos t\cos(t-2\alpha)\\ &= (1+r^2)^2 - 4r(1+r^2)\cos(t-\alpha)\cos\alpha + 4r^2[\cos^2(t-\alpha)-\sin^2\alpha]\\ &= (1-r^2)^2 - 4r(1+r^2)\cos(t-\alpha)\cos\alpha + 4r^2[\cos^2(t-\alpha)+\cos^2\alpha]\end{aligned}$$

設 OP 交 AB 於 P_0, $|OP_0|=r_0$, 則 $r_0\cos(t-\alpha)=\cos\alpha=$ 弦心距 $|OD|$。繼續恆等變形

$$|PA|^2\cdot|PB|^2 = (1-r^2)^2 - 4\frac{r}{r_0}(1+r^2)\cos^2\alpha + 4\frac{r^2}{r_0^2}\cos^2\alpha + 4r^2\cos^2\alpha,$$

得

$$|PA|^2\cdot|PB|^2 = (1-r^2)^2 - 4\frac{r}{r_0}(1-\frac{r}{r_0})(1-rr_0)\cos^2\alpha, \tag{B}$$

爲了書寫方便, 就不開平方, 同時, 乾脆稱 (B) 式爲距離乘積公式。

4. 推論

我們不考慮點 P 和圓心重合這種平凡的情況

(1) 點 P 是 $\triangle ABC$ 之內點, 即 $0<r<r_0$, $0<t<2\alpha$, 有

$$|PA|\cdot|PB| < 1-r^2.$$

(2) 點 P 是半徑 OA 之內點或是 OB 之內點, 即 $0<r<r_0=1$, $t=0$ (或 $t=2\alpha$), 有

$$|PA|\cdot|PB| < 1-r^2,$$

合併 (1)、(2), 點 P 是 $\triangle OAB$ 的內點或落在半徑 OA、OB之一, 都有

$$|PA|\cdot|PB|=1-r^2.$$

(3) 當點 P 落在弦 AB 上時, 即 $r=r_0$

$$|PA|\cdot|PB|=1-r^2,$$

這個結果與 Stewart 不等式有一定的關連 (梁紹宏“初等幾何研究”)。

(4) P 點是 P_0 的反演點, 即 $rr_0=1$, 則

$$|PA|\cdot|PB|=(1-r_0^2)/r_0^2.$$

(5) 當 P 點落在 $\triangle OAB$ 外的弓形內, 此時 (B) 式右邊第2項恆負, 故

$$|PA|\cdot|PB|>1-r^2,$$

這個估計 (結果) 與直觀吻合, 即直線 AB 把平面分成兩個性質不同的區域。

(6) 最後, 當 P 點落在圓周上時, 即 $r=1$, 此時 (B) 式右邊第1項爲零, 則

$$|PA|\cdot|PB|=2(1-r_0)\cos\alpha/r_0.$$

總之, 運算式 (B) 的內涵極其豐富, 我們還可以構造若干有用的不等式, 不再一一列舉。

5. 艾狄胥問題的解

P 三角形的內點, 則點 P 必落入 $\triangle OAB$、$\triangle OAC$、$\triangle OBC$ 的某一個內, 或落入半徑 OA、OB、OC 的某一個內。令

$$W=\triangle OAB\backslash(AB\cup\{0\}).$$

把 W 視爲點集之差, 不失普遍, 設 $P\in W$, 由推論 (1)、(2), 有

$$|PA|\cdot|PB|<1-r^2$$

由於 $|PC|<1+r$ ($\triangle POC$ 中), 從而三距離之乘積

$$|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|<(1-r^2)(1+r)=4\cdot\frac{1+r}{2}\cdot\frac{1+r}{2}\cdot(1-r)$$

由於 $\frac{1+r}{2}+\frac{1+r}{2}+(1-r)=2$, 考慮到 $A-G$ 平均不等式

$$|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|<4\cdot\frac{1+r}{2}\cdot\frac{1+r}{2}\cdot(1-r)\leq 4\cdot(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{27}$$

其中等號當且僅當 $r=0$ 時成立, 這時回到點 P 和圓心重合這種平凡的情形, 但當 $r=0$ 時

$$|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|=1$$

艾狄胥不等式顯然成立。

6. 上確界

下證 32/27 是三距離乘積的上確界, 取 $P(\frac{1}{3},0)$, 則 P 至單位圓上任意 $Q(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的距離

$$|PQ|=\sqrt{1+r^2-2r\cos\alpha}$$

是 $[0,\pi]$ 上的單調增函數。$|PQ|\in[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$, $|PQ|$ 的值與上半圓上的點一一對應, 在上半圓上取 B 點, 使 $|PB|=\frac{4}{3}-\varepsilon_1$; 同理在下半圓上取點 C, 使 $|PC|=\frac{4}{3}-\varepsilon_1$, 對任意小正數 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$,

$$\frac{2}{3}(\frac{4}{3}-\varepsilon_1)^2>\frac{32}{27}-\varepsilon$$

成立, 只要取 $\varepsilon_1<\frac{9}{16}\varepsilon$ 即可, 事實上,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1<\frac{9}{16}\varepsilon &\Rightarrow \frac{4}{3}-\varepsilon_1>\frac{4}{3}-\frac{9}{16}\varepsilon\\ &\Rightarrow (\frac{4}{3}-\varepsilon_1)^2>(\frac{4}{3}-\frac{9}{16}\varepsilon)^2\\ &\Rightarrow \frac{2}{3}(\frac{4}{3}-\varepsilon_1)^2>\frac{32}{27}-\varepsilon+\frac{2}{3}(\frac{9}{16}\varepsilon)^2>\frac{32}{27}-\varepsilon,\end{aligned}$$

證畢。

7. 艾狄胥問題的推廣

A、B、C、D 是內接於單位球的四面體的頂點, P 爲四面體內一點, 則 P 至四頂點的距離乘積

$$|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|\cdot|PD|<27/16$$

—本文作者現任職於無錫教研中心—