三角形內角和等於180° 與畢氏定理

文: 張海潮、王彩蓮　整理: 葉德財

「三角形內角和等於 180°」這個大家應該都知道。我記得初中的時候, 學校教到平面幾何的單元, 當時課本裡有一個實驗: 將一個三角形的三個角剪下來, 並把它們拼起來, 看看是不是剛好成爲 180° 的平角。那時, 我讀三年級, 恰好有一個鄰居, 他已經考上高中, 於是跟他要初三的課本, 這樣就不需要再花錢買課本。我在課本中發現他剪下的三個內角, 他眞的剪了! 很多人知道三角形內角和等於 180°, 可是並沒有眞的剪下來拼湊過。

「畢氏定理」和「三角形內角和等於 180°」有什麼關係呢? 國中數學課本上, 關於「畢氏定理」的證明是這樣的: 將四個全等的直角三角形拼起來成爲一個大正方形 (如圖 1)。

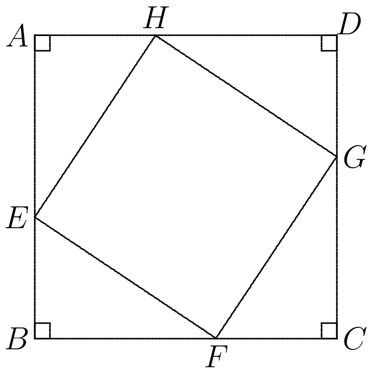

圖 1

如此中間會形成一個正方形, 那麼, 四個直角三角形與中間正方形的面積和會等於大正方形的面積, 利用這個關係, 整理一下, 就可得到「畢氏定理」。在這個證明過程中「三角形內角和等於 180°」的事實已經被悄悄地引用了, 爲什麼呢? 因爲「中間會形成一個正方形」這件事是利用「三角形內角和等於 180°」的事實推得。從這個地方看來,「三角形內角和等於 180°」比「畢氏定理」還要基本。

其實, 若從「畢氏定理」出發也可以得到「三角形內角和等於 180°」。一般而言, 處理幾何的基本工具就是「畢氏定理」和它的逆定理, 即滿足一邊的平方等於另二邊的平方和的三角形

爲直角三角形。現在我們給出這個推導過程, 如果有一個三角形, 而且我們知道「畢氏定理」對任何直角三角形都成立, 我們想要說明的是「三角形內角和等於180°」。若要證明這件事, 起碼我們要能說明對於直角三角形是對的。觀察 (如圖 2) 的直角三角形 PQR。

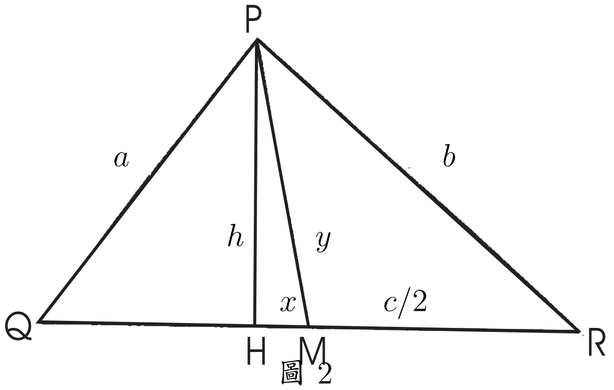

圖 2

作 PH 爲斜邊上的高, M 爲 QR 的中點, 且令 $PQ=a$、 $PR=b$、 $QR=c$、 $PH=h$、 $PM=y$ 和 $MH=x$。我們希望能夠證明 $y=c/2$, 因爲如果 $y=\frac{c}{2}$, 則 $\triangle MPQ$ 與 $\triangle MPR$ 皆爲等腰三角形, 所以

$$\angle Q+\angle R=\angle MPQ+\angle MPR=90^\circ$$

於是得到 $\triangle PQR$ 三內角和等於180°。

因爲 $\triangle HPQ$ 與 $\triangle HPR$ 都是直角三角形, 所以有

$$a^2=h^2+(c/2-x)^2$$
$$b^2=h^2+(c/2+x)^2$$

此二式相加得

$$a^2+b^2=2h^2+2x^2+c^2/2$$

又因爲 $\triangle PQR$ 是直角三角形, $a^2+b^2=c^2$, 所以

$$(c/2)^2=h^2+x^2$$

又 $\triangle HMP$ 也是直角三角形, 因此

$$(c/2)^2=y^2$$

就得到 $y=c/2$ 的結果。

對於任何一個三角形, 可以剖成兩個直角三角形來看, 利用剛剛證明的性質, 很容易就可說明「三角形內角和等於180°」。

以上的證明僅連續引用幾次畢氏定理及等腰三角形兩底角相等 (可由 SAS 直接推出) 的論證完成。這說明了「畢氏定理」的基本性, 它其實可以說是談論幾何最重要的一個定理。

至於說爲什麼我們會想到這個問題? 一個是描述三角形的內角和, 一個是說明直角三角形的邊長關係, 這兩者看起來似乎毫不相關。事實上平面幾何之所以爲平面幾何, 是因爲「三角形內角和等於 180°」, 也是因爲「畢氏定理」成立, 所以這兩者非要有關連不可。不太可能在這兩者之外有一更基礎的東西, 實際上這兩者是一樣的重要。也就是說「三角形內角和等於 180°」和「畢氏定理」成立都是平面幾何的特徵, 是同一回事。

在應用上,「畢氏定理」比「三角形內角和等於 180°」更加有用, 因爲「畢氏定理」是線段量化的代數式, 較常使用。因此, 很多幾何的現象應該要常常回到「畢氏定理」來討論, 如果一個定理可以用「畢氏定理」證明, 就不要用其他定理了。也就是說, 盡量去尋找直角的關係或投影的關係, 再利用內積、兩點間的距離 $\cdots$ 等來處理幾何的問題, 這樣是比較基本的。

這是八十九年五月張海潮在師大附中對數學老師們的演講, 證明是王彩蓮提供的。她現任中山大學的助理教授, 文章是當時碩士班研究生葉德財整理的。非常感謝他們的幫忙。

—本文作者張海潮爲台灣大學數學系退休教授, 王彩蓮任教中山大學—