單擺運動

林琦焜

『*Philosophy is written in this grand book — I mean the universe — which stands continually open to our gaze, but it cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and interpret the characters in which it is written. It is written in the language of Mathematics, and its characters are triangles, circles, and other geometric figures, without which it is humanly impossible to understand a single word of it.*』

— Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623) —

§1 前言

近代科學之父伽利略 (Galileo Galilei 1564-1642), 能夠經由數學的運用, 將人類的推理能力應用於自然界, 這是人類理智精華之結晶。現在我們知道自然界的定律, 可以經過實驗, 隔離某些不重要的因素, 再細心的觀察, 與數學的推導來加以了解, 這是科學家的世界觀, 也曾是伽利略表達得非常清楚的世界觀。近代科學之所以成功, 主要在於科學活動中採取伽利略所揭示的定量方法來描述各種現象以取代神學哲學與玄學的解釋, 這也正是他超越古希臘眾博學多才之士的地方 。

在所有數學領域中, 就屬微分方程 (differential equation) 與大自然的關係最密切, 法國偉大數學家 Henri Poincare(1854-1912) 在“科學的價值”一書中就曾說:

『*The science of physics does not only give us* (*mathematicians*) *an opportunity to solve problems, but helps us to discover the means of solving them, and it does this in two ways: it leads us to anticipate the solution and suggests suitable lines of argument.* 』

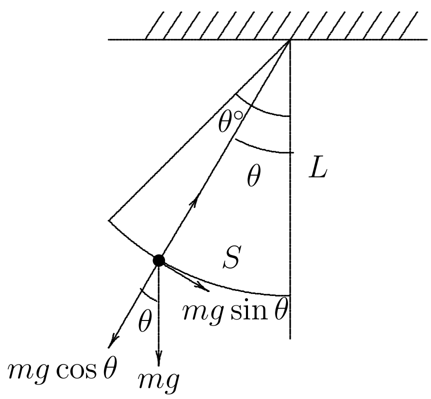
我個人對於微分方程這門學問的 philosophy 正如英國物理學家 Dirac 所言眞正理解物理問題的意思是不用解方程式就看出答案是甚麼。“*如果你相信微分方程是在描述大自然的現象, 那麼, 在你還沒有解方程式之前, 它就應該透露你一些秘密。*” 學數學最好是從例子(example) 開始。

由於個人的偏好, 所以選取單擺運動作爲這篇文章所要闡述的對象, 聽說伽利略少年時因爲教堂的崇拜儀式十分乏味使人生厭, 轉而注視教堂吊燈之運動並發現:單擺完成一次擺動與其振幅無關。這個方程式直接是牛頓第二運動定律之推論, 與虎克定律有相通處, 甚至到二十世紀的量子力學也出現這個方程式, 因爲它們都是在描述波(wave) 的現象。所有的微分方程都是一種逼近 (approximation), 因此要眞正了解單擺運動則有賴於橢圓函數 (elliptic function)。這門十九世紀重要的學問一直到1970年代的孤粒子理論 (soliton) 可積系統 (integrable system) 才發揚光大, 我們在最後一節簡單提一下這個理論, 更深入的內容則留給讀者作更進一步的探討。

§2 鐘擺之運動方程式

單擺是一理想化物體, 假設有一質點, 以不能伸長之細繩 (表示細繩之質量可以忽略) 懸之。然後將擺錘拉往平衡位置之一側後釋放, 單擺由於重力的影響而作左右來回振盪之運動, 試問其運動方程式?

由力的分解 (也就是平行四邊形法則), 可以將擺錘之重力 mg 分解成法向量 $mg\cos\theta$與切向量$mg\sin\theta$ 兩部分, 法向量與細繩之張力互相平衡, 故唯一有作用的力是 $mg\sin\theta$, 因此回復力爲



圖一

$$F = -mg\sin\theta \tag{2.1}$$

另一方面擺錘之加速度可以這麼看, 因爲位移就是弧長 $x = L\theta$, 故加速度 a 等於

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2.2}$$

由牛頓第二運動定律 ($F = ma$) 可以導出單擺之運動方程式

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad 或 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \tag{2.3}$$

它表示所考慮的量 θ 是隨時間 t 按規律 (2.3) 而變化, 這是一個二階非線性常微分方程 (second order nonlinear ordinary differential equation)。這個方程式看起來簡單, 但實際上卻有很深刻的數學內涵。値得提醒的是方程式 (2.1) 告訴我們: 回復力 F 不與鐘擺移動的角度 θ

成正比, 而是與正弦 $\sin\theta$ 成正比。因此單擺運動並不是簡諧運動 (simple harmonic motion)。但若擺動的角度 θ 很小, $\theta \ll 1$, 單擺運動近乎直線, 則可視爲簡諧運動,
$(\sin\theta \approx \theta)$

$$F = -mg\theta = -mg\frac{L\theta}{L} = -\frac{mg}{L}x \tag{2.4}$$

故擺動角度甚小時, $0 < \theta \ll 1$, 回復力與位移 x 成正比而方向相反, 這正是虎克定律 (也就是簡諧運動), 方程式 (2.3) 則簡化爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \tag{2.5}$$

因此方程式 (2.5) 的解是原鐘擺方程式 (2.3) 的近似解 (approximate solution)。由 Taylor 展開式來看

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \tag{2.6}$$

所以對充分小的 θ , 即單擺之擺動角度很小時方程式 (2.5) 是單擺運動方程 (2.3) 很好的近似。

§3 單擺方程的解

如何解二階微分方程 (2.5)? 這是一門很有趣的學問, 我們將從幾個方向來看這個問題。

3.1 觀察與猜測:

將 (2.5) 移項寫成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x \tag{3.1}$$

這方程式告訴我們, 要找一個函數 $x(t)$ 其二次微分, 除了常數 $\frac{g}{L}$ 外, 等於原函數之負値, 而且單擺運動有最高與最低點, 這相當於函數 $x(t)$ 有上界與下界。由微積分的知識知道具有這樣性質的就是正弦或餘弦函數。因此可以假設 (2.5) 之解爲

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{3.2}$$

因爲

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos\delta\cos\omega t - \sin\delta\sin\omega t = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

所以常數 δ 之存在以允許 (3.2) 是正弦、餘弦函數之組合。(當然 (3.2) 也可寫成
$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$!) 微分兩次後代回 (3.1):

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\frac{g}{L}A\cos(\omega t + \delta)$$

若取 $\omega^2 = \frac{g}{L}$, 則方程式 (3.1) 的解爲

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \tag{3.3}$$

A 與 δ 尚未決定, 爲任意常數, 意即 (3.1) 有無窮多解, 至於爲何會有兩個參數 A, δ , 那是完全自然的, 因爲 (3.1) 本來就是二階微分方程有兩組獨立解!

(3.2) 這個猜測可以換爲

$$x(t) = e^{mt} \tag{3.2$'$}$$

這理由是因爲指數函數的任意次微分仍然是指數函數。將 (3.2′) 代回 (2.5)

$$m^2 + \frac{g}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}i$$

所以 $x(t) = e^{\pm i\sqrt{g/L}t}$ 由 Euler 公式取實部與虛部 (因爲原方程式是實數值!) 因此 $x(t) = \sin\sqrt{g/L}\,t$ 或 $\cos\sqrt{g/L}\,t$, 因爲方程式是線性 (linear), 所以一般解是這兩個獨立解的線性組合

$$x(t) = a\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + b\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t \tag{3.3$'$}$$

3.2 降階法:

我們所關心的是鐘擺的擺動, 其速率是角速度, 令

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{3.4}$$

則 (3.1) 成爲

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x$$

但另一方面由連鎖律

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{3.5}$$

因此我們將方程式 (3.1) 轉換成一階非線性微分方程

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{L}x \quad \text{或} \quad vdv + \frac{g}{L}xdx = 0 \tag{3.6}$$

這是一個全微分 (total differential)

$$d\Big(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2\Big) = 0$$

可以積分

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2 = C \qquad (\text{動能} + \text{位能} = \text{常數}) \tag{3.7}$$

其中 C 是一常數, 這個等式之本質就是能量守恆律或者寫成

$$\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt})^2+\frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2=C \tag{3.8}$$

我們可以透過微分的相反運算 (積分) 來解 (3.8), 爲著方便, 我們令 $C=\frac{1}{2}\frac{g}{L}A^2$ (事後孔明!) 開根號

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{A^2-x^2}, \qquad -A\le x\le A \tag{3.9}$$

這個方程的典型解法就是分離變數法 (x 歸 x , t 歸 t , 凱撒的歸凱撒, 上帝的歸上帝)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\sqrt{\frac{g}{L}}\int dt \tag{3.10}$$

左邊這個積分正是反三角函數

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)=\sqrt{\frac{g}{L}}t+C' \quad 或 \quad \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)=\sqrt{\frac{g}{L}}t+C'$$

所以

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t+C'\right), \quad x=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t+C'\right) \tag{3.11}$$

與 (3.3) 完全吻合。而且由 (3.9) 更可得知 x 之最大值等於 A, 所以 A 就是振幅 (amplitude) 由初始值即最開始的高度所決定。

降階法的精神在於引進速度 $v=\frac{dx}{dt}$ 這個新變數, 在微分方程理論我們將 (x,v) 平面稱爲相空間 (phase space)。因此二階微分方程 (2.5) 可轉換爲一階聯立微分方程組

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{L}x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{dx}{dt}=v\\ \frac{dv}{dt}=-\frac{g}{L}x\end{cases} \tag{3.12}$$

最後這兩式相除 (將變數 t 隱藏) 就是 (3.6)

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{g}{L}\frac{x}{v} \tag{3.13}$$

也因此可以在 (x,v) 平面上研究原微分方程 (2.5)。我們稱 (x,v) 平面爲相空間 (phase space) 由能量守恆來看, 可以更清楚明白爲何相空間這個觀念對於研究微分方程會如此重要。

3.3 能量守恆:

既然方程式 (2.5) 是由牛頓定律而來, 我們就理所當然從力學的角度來思考。首先介紹幾個基本物理量

$$
\begin{aligned}
x &: \text{位置函數} \\
v = \frac{dx}{dt} &: \text{速度} \\
a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &: \text{加速度} \\
T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(\frac{dx}{dt})^2 &: \text{動能(質量視爲1)}
\end{aligned}
$$

除此之外, 力與位能函數之關係 $F = -\frac{dU}{dx}$, 因此 (2.5) 可以改寫爲

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2\right) = -\frac{d}{dx}U \tag{3.14}$$

其中 $U = \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2$ 是位能, 而 $E = T + U = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2$ 就是總能量, 我們在 (3.7) 就已推導得這個能量守恆律。

定理:(能量守恆)

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2 = C(\text{常數}) \tag{3.15}$$

證明:直接微分

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x\frac{dx}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x\right) = 0
\end{aligned}
$$

特別注意的是, 整個證明過程並不依賴微分方程的精確解 (exact solution), 微分方程本身就已經告訴我們這個秘密了。從證明的過程反推回去, 如果直接乘 $\frac{dx}{dt}$, 也可以得到能量守恆律, 並且分別得到動能 T 與位能 U

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2\right] \\
&= \frac{d}{dt}(T + U)
\end{aligned}
$$

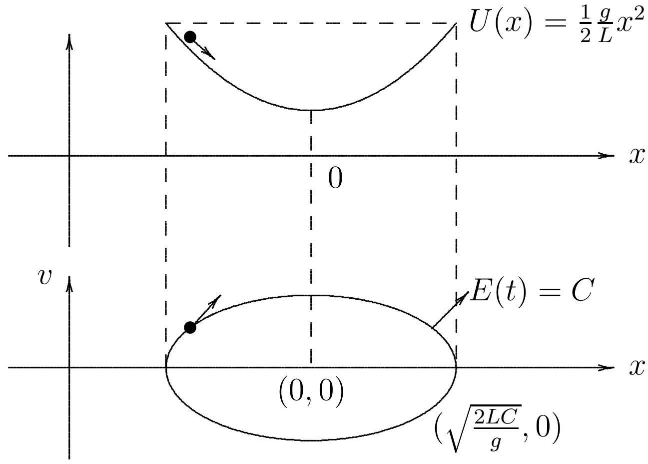
在推導過程中, 也清楚看到動能 T 是由加速度而來, 位能 U 則是力的結果

$$
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{d^2x}{dt^2} & + & \dfrac{g}{L}x & = & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
T & & U & &
\end{array}
$$

方程式 (3.15) 可以視爲古典力學的 Hamilton-Jacobi 方程式, 它除了說明能量守恆之外, 由於 C 是任意常數, 它更代表了等位線 (level curve), 所以將 $v=\frac{dx}{dt}$ 視爲另一個變數, 則

$$E(t)=E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\frac{g}{L}x^2$$
$$=C\geq 0$$

其圖形在 (x,v) 平面是橢圓族, 若 $g=L$ 則是圓。



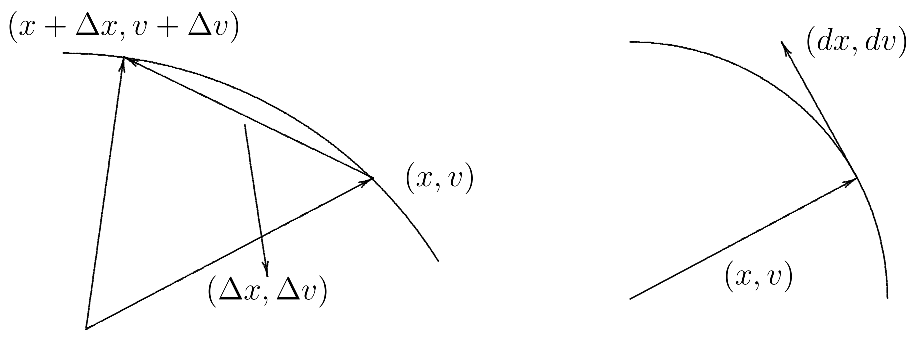
圖二

3.4 幾何觀點 — 相空間:

從幾何的角度來探討微分方程這個觀念可以追溯至法國數學家H. Poincare(1854-1912) 與蘇俄數學家 A. Liapunov。我們考慮比 (3.12) 更一般的方程式

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=p(x,v)\,,\qquad \frac{dv}{dt}=\dot{v}=q(x,v) \tag{3.16}$$

在物理上 (x,v) 代表一系統的狀態即位置 (position) 與速度 (velocity), 這個平面也稱爲相平面 (phase plane), 因爲是描述狀態之變化例如詩人所言「月有陰晴圓缺」就是在描述月相 (moon phase) 之變化。



圖三

因爲 (dx,dv) 代表 (x,v) -平面之切向量 (tangent vector), 如果將微分方程解之曲線視爲水流 (flow), 則 (3.16) 告訴我們在每一點的速度 $V=(p,q)$ 其水平分量是 $p(x,v)$ 垂直

分量是 $q(x,v)$, 透過向量場 $V=(p,q)$ 我們可以看出微分方程之積分曲線, 將 (3.16) 兩式相除 (參考 (3.13))

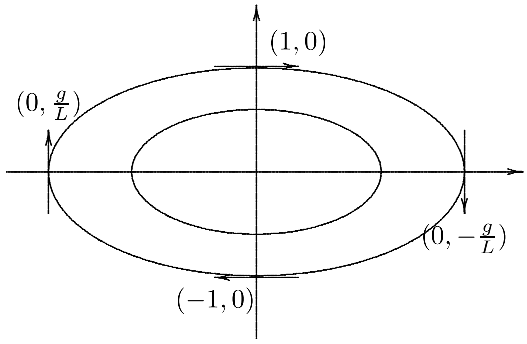
$$\frac{dv}{dx}=\frac{q(x,v)}{p(x,v)}\equiv f(x,v) \tag{3.17}$$

這個方程式告訴我們曲線 v 在該點之切線斜率。這正是微分方程之義意 — 未知函數與其微分滿足某關係式 (等式), 求此函數? 從歷史而言常微分方程是伴隨微積分發展起來的分析之一分支, 如果常微分方程可以被積分, 則由微積分基本定理就達到目的, 也因此這方法稱爲面積解法 (quadrature), 但是可以積分的微分方程實在是少之又少。直到1881-1886年間 Poincare 將常微分方程的研究方法從分析方法轉化爲更直觀的幾何方法, 從此開創了常微分方程定性理論這一學科, 並爲後來的動態系統 (dynamical system) 預測了美好的遠景。

回到 (3.12) 或 (3.13)

$$(dx,dv)=(v,-gx/L),\quad \frac{dv}{dx}=-\frac{gx}{Lv}$$

如果你覺得會困惑, 則不妨先將 g/L 視爲 1, $(dx,dv)=(v,-x)$ 與向量 (x,v) 比較正好 x,v 互換差一個負號: $(dx,dv)\perp(x,v)$ 平面上具有這性質的圖形就是圓, 同理可推平面上任意向量 (x,v) 其切向量爲 $(dx,dv)=(v,-gx/L)$ 的圖形必定是橢圓 (圓的變形), 或者根據方程式可以描繪各點之向量場, 則隱約可見其運動軌跡是橢圓。



圖四

§4 單擺之週期

雖然由精確解 (exact solution) 可以計算單擺之週期, 但是這對於問題的瞭解並沒有幫助。在此我們介紹量綱分析 (dimensional analysis) 這個基本且重要的概念, 其實你只需要把它想像成物理學中的單位 (unit) 即可。對這個問題, 時間與距離 (或長度) 是兩個基本量:

$$T\to\triangle t\quad (\text{時間}) \tag{4.1}$$

$$X\to\triangle x\quad (\text{位移、距離}) \tag{4.2}$$

速度與加速度可由這兩個量推導而得

$$v = \frac{dx}{dt} \to \frac{\triangle x}{\triangle t} \quad \left(\frac{X}{T}\right) \tag{4.3}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \to \frac{\triangle x}{(\triangle t)^2} \quad \left(\frac{X}{T^2}\right) \tag{4.4}$$

方程式 (2.5) 告訴我們 $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{g}{L}x$ 這兩個的量綱 (dimension) 必須是一樣的 (方程式就是等式!)

$$\frac{\triangle x}{(\triangle t)^2} \approx \frac{g}{L}\triangle x \quad \Rightarrow \quad (\triangle t)^2 \approx \frac{L}{g} \tag{4.5}$$

所以由量綱分析不必解微分方程便可容易且正確地猜測單擺的週期 T 與 $\sqrt{L/g}$ 成正比

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad T = C\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{4.6}$$

常數 C 需由精確解而得, 歷史上惠更斯是第一個計算出 $C = 2\pi$, $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, 實際上 $C = 2\pi$ 並不難猜, 經由適當變換可以假設 $L/g = 1$, 方程式 $d^2x/dt^2 + x = 0$ 的解是 $\cos x, \sin x$ 之組合其周期正好是 2π 。

我們也可以從另一個量綱分析的角度來求得單擺之週期 (請參考 Polya 著; “科學中的數學方法”), 單擺之週期與其長度也與重力有關, 可設

$$T \propto L^\alpha, \qquad T \propto g^\beta \tag{4.7}$$

兩者合併 $T = CL^\alpha g^\beta, C$ 是一純量 (scalar), 因爲 g 的量綱是 $\frac{L}{T^2}$ (單位是 $\frac{\text{公分}}{\text{秒}^2}$)

$$L^\alpha g^\beta = L^\alpha (LT^{-2})^\beta = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta} (= T) \tag{4.8}$$

這個量必須等於週期 T

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

因此 $T \propto L^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}$ 或 $T = CL^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = C\sqrt{L/g}$, 週期 T 之精確值可以直接由 (3.3) 或 (3.11) 而得。由三角函數之性質可知

$$\begin{aligned} x(t + \frac{2\pi}{\omega}) &= A\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right] \\ &= A\cos(\omega t + 2\pi + \delta) = A\cos(\omega t + \delta) = x(t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

因此 $x(t)$ 之週期爲

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{4.10}$$

頻率 (frequency) 即單位時間之波數爲

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{4.11}$$

因此

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{4.12}$$

也就是說 ω 的物理意義就是角頻率 (angular frequency)。

單擺週期公式最重要的應用就是計算 g 的值。取平方得

$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi L^2}{T^2} \tag{4.13}$$

單擺的長度 L 是固定, 週期 T 則可由多次實驗後取平均值而得, 藉由這個公式馬上可求得 g 的值, 這對於驗證牛頓的萬有引力定律之萬有引力常數, 扮演著極重要的角色。

§5 橢圓函數

我們仿3.3節之方法, 討論微分方程 (2.3)。鐘擺在時間 t , 擺動之角度爲 θ , 則

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{(動能)} \tag{5.1}$$

$$U = mgh = mgL(1-\cos\theta) \quad \text{(位能)} \tag{5.2}$$

鐘擺在其運動過程中不做任何的功 (忽略了摩擦力與空氣阻力), 正因爲如此其能量 $E = T+U$ 都保持爲常數, 所以能量守恆律爲

$$E(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = C = \text{常數} \tag{5.3}$$

有興趣也可以由 (2.3) 乘 $\frac{d\theta}{dt}$, 結果是一樣的。

假設 $\theta = \theta_0$ 是最大值 (即放手之高度), 此時 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (速度 $= 0$) 因此

$$C = mgL(1-\cos\theta_0) \tag{5.4}$$

故

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2\frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)\\ &= 4\frac{g}{L}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{5.5}$$

分離變數後積分, 得

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,, \qquad k=\sin\frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \tag{5.6}$$

如果 T 是週期即一個完整振盪所需時間, 則

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,,$$

或

$$T=2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,, \tag{5.7}$$

這是一個橢圓積分 (elliptic integral), 再摹仿反三角函數之想法, 我們可以考慮變數變換

$$\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\varphi\,, \qquad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=k\cos\varphi d\varphi \tag{5.8}$$

其範圍 $0\le\theta\le\theta_0$, $0\le\varphi\le\pi/2$, 所以

$$d\theta=\frac{2k\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{2\sqrt{k^2-\sin^2(\theta/2)}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi \tag{5.9}$$

週期 T 等於

$$T=4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=4\sqrt{\frac{L}{g}}F\Big(k,\frac{\pi}{2}\Big) \tag{5.10}$$

其中

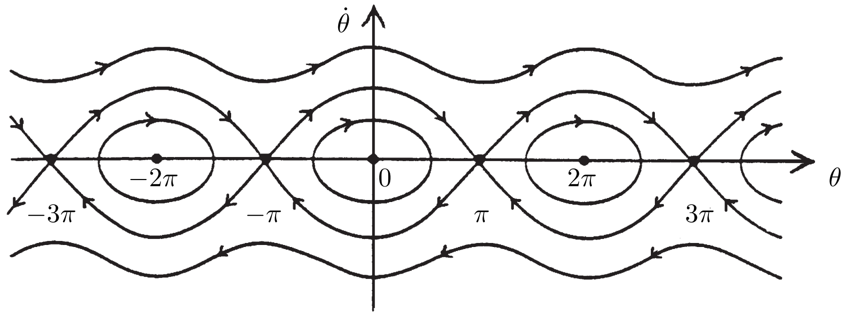
$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{5.11}$$

是第一類橢圓積分 (elliptic integral of the first kind), T 之展開式爲

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Big(1+\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\cdots\Big) \tag{5.12}$$

如果只取到第一項 $T=2\pi\sqrt{L/g}$ 就是 (2.5) 之週期。

由 (5.3) 可描繪單擺運動相空間之圖形



圖五

參考資料:

1. M. Kline, Mathematics in Western Culture, Penguin Book, 1989. (中譯本: 西方文化中的數學; 九章出版社, 1995。)
2. George F. Simmons, Calculus with Analytic Geometry, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1996.
3. George F. Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1991.
4. 波利亞 (Polya) 著, 科學中的數學方法, 凡異出版社, 1986。
5. 波利亞 (Polya) 著, 數學與猜想, 九章出版社 1992。
6. V. G. Boltyansky 著, 什麼是微分法, 沈孝本譯, 九章出版社 1999。

—本文作者任教於國立成功大學數學系—