『數學？數學!』演講系列：

秋風夜雨——話蚯蚓，談連分數

演講人：沈昭亮
時　間：民國九十一年十月十六日
地　點：清華大學數學系 101 教室

各位同學, 在我開始今天的演講之前, 請大家聽一段歌曲: (用台語唸)

> "風雨聲音擾亂秋夜靜, 時常聽見蚯蚓哮悲情,
> 引阮思鄉不知雨水冷, 自嘆自恨幸福未完成,
> 啊...... 前途茫茫宛然失去光明..."

這段歌曲是由周添旺作詞, 楊三郎作曲的「秋風夜雨」的第一段, 而剛才的演唱者是余天。「秋風夜雨」是周、楊兩位先生最得意的作品之一。悠雅寫意的詞, 伴隨著聲調悠揚的曲, 引發平凡卻眞摯的遊子思鄉之情。

「秋風夜雨」歌詞中的「蚯蚓」, 常常浮現在我對少年時代的回憶中。在一段頗長的時間裡, 我家常養一些雞、鴨。當父親下課後, 或是母親處理家事之餘, 常帶我和弟弟們去挖蚯蚓。有時候是母親叫我帶弟、妹們去挖, 而且交待要多挖一些, 給家中的雞、鴨吃。已經不記得那時我們是否覺得那是一件殘忍的事, 卻仍記得那時當不小心把蚯蚓鋤成兩段時, 那兩段都在痛苦地亂動著。大人們說, 那兩段痊癒後, 會變成兩隻蚯蚓。

讓我們把一條 n 節的蚯蚓 (或環節動物 (annelid)) 想成一個 n 個變數 $x_1,\ldots,x_n$ 的函數 $f_n(x_1,\ldots,x_n)$, 其中 f_n 之足碼 n 表其節數。將 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 對 x_j 的一次偏導數, 想成是對蚯蚓從第 j 節切下去的動作, 則 "蚯蚓族" 的成員 $f_0\equiv 1$, $f_1(x_1), f_2(x_1,x_2),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots$ 等, 應服從下列方程式:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f_n(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=f_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1})f_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n). \tag{1}$$

上列方程式被數學家 Reznick 稱作 "蚯蚓方程式" (annelidic differential equation)。我們來想一想, (1) 式的解究竟有那些。

首先, 令

$$f_n(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}(x_k-t) \tag{2}$$

顯然這一類函數滿足蚯蚓方程式。(2) 式或許可以想作零根未定的 t 的 n 次多項式, 視其根爲變數, 則它們是蚯蚓方程式的一種解。這一類解有點無聊 (trivial)。

讓我們再猜一猜, 蚯蚓方程式還有什麼樣有趣的解。在古典的解析數論中, 連分數很類似蚯蚓:

$$x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{x_n}}} \tag{3}$$

將 (3) 式通分, 化爲有理式 $\frac{P_n(x_1,\ldots,x_n)}{Q_n(x_1,\ldots,x_n)}$。爲了瞭解究竟連分數是否與蚯蚓方程式有關, 讓我們先來研究, 如何求 P_n, Q_n? 此問題可由以下方法解決: 令

$$T_j(z)=x_j+\frac{1}{z}=\frac{x_1z+1}{z}$$

則

$$\begin{cases} x_1=\lim\limits_{z\to\infty}T_1(z), \quad x_1+\dfrac{1}{x_2}=\lim\limits_{z\to\infty}T_1\circ T_2(z), \quad x_1=\lim\limits_{z\to 0}T_1\circ T_2(z) \\ \vdots \\ x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{x_n}}}=\lim\limits_{z\to\infty}T_1\circ T_2\circ\cdots\circ T_n(z), \quad x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{x_{n-1}}}}=\lim\limits_{z\to 0}T_1\circ\cdots\circ T_n(z). \end{cases} \tag{4}$$

因爲 $T_j(z)$ 都是 Möbius 變換, $T_j(z)$ 的矩陣表示爲 $M_j=\begin{bmatrix} x_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。又因爲 Möbius 變換的合成, 與矩陣的乘積相當, 再由 (4), 我們發現:

$$T_1\circ\cdots\circ T_n(z)=\frac{P_nz+P_{n-1}}{Q_nz+Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n}=\lim_{z\to\infty}T_1\circ\cdots\circ T_n(z). \tag{5}$$

此處 $P_n=P_n(x_1,\ldots,x_n)$, $P_{n-1}=P_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $Q_n=Q_n(x_1,\ldots,x_n)$, $Q_{n-1}=Q_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$,

$$\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

將 (6) 式對 x_j 作偏微分, 得

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} & \dfrac{\partial P_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial Q_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} & \dfrac{\partial Q_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{\partial x_j} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{j-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}) & P_{j-2}(x_1,\ldots,x_{j-2}) \\ Q_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}) & Q_{j-2}(x_1,\ldots,x_{j-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n) & P_{n-j-1}(x_{j+1},\ldots,x_{n-1}) \\ Q_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n) & Q_{n-j-1}(x_{j+1},\ldots,x_{n-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1})P_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n) & P_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1})P_{n-j-1}(x_{j+1},\ldots,x_{n-1}) \\ * & * \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由上列計算, 我們發現: $P_n(x_1,\ldots,x_n)$, 即連分數 $x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{x_n}}}$ 通分後的分子, 也是一種 “蚯蚓”。我覺得蚯蚓方程式的連分數解特別有趣。至於蚯蚓方程式是否還是其它形式的解, 已不再是我感興趣的事。

通常, 成層的分式, 不管有限, 或是無限多層, 都可以稱之爲連分式 (數)。像前述的連分數, 當 x_j 皆爲整數, 且當 $k \geq 2$ 時 $x_k > 0$, 特別被稱爲簡單連分數 (simple continued fraction), 事實上它一點也不簡單, 只不過是 “看起來” 簡單而已。

連分數的研究與多項式的零根估計有關。在牛頓 (1642-1727) 之前, 已有數學家研究連分數, 例如 R. Bombelli (1526-1573) 說:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6}},$$

而 P. Cataldi (1548-1626) 說:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a}}. \tag{7}$$

(7) 式是一個有趣的公式, 應解讀爲無限連分數:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{\ddots}}}}. \tag{8}$$

其中 b, $2a$ 重覆出現。當然我們假定 a, b 皆為正數。同學們不難發現, 若表 $13 = 3^2 + 4$, 則由 Cataldi 公式可推出 Bombelli 的結果。還有物理學家 Huygens (1629-1695), 他利用連分數研究齒輪的理論, 因而發明「游絲」, 並於 1657年與一位工匠合作, 製作第一具有鐘擺的時鐘 (現存荷蘭 Leyden 博物館)。Huygens 在鐘錶史上, 有很重要的地位。Huygens 對於近代數學, 也有很深遠的影響: 他於 1672年鼓勵當時在法國從事外交工作的 Leibniz (Gottfried Withehn Leibniz, 1646-1716) 研究數學! 至於以嚴謹的分析方法, 去對連分數作有系統的研究, 則是尤拉 (L. Euler 1707-1783) 重要的貢獻之一*。

我們來想一想, 如何去證明 (8) 式所示的 Cataldi 公式。

首先, 令

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 + b},$$

則有

$$x_1^2 - 2ax_1 - b = 0,$$

因此

$$x_1 = \frac{2ax_1 + b}{x_1} = 2a + \frac{b}{x_1} = 2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\ddots}}},$$

所以

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\ddots}}}.$$

在 (3) 式中, 如果

$$x_1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}.$$

則稱之為 簡單連分數。當 n 有限, 稱為有限連分數, 當 n 無限, 則為無限連分數。我們將簡單連分數 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ 記作 $[a_0;\, a_1,\, a_2, \ldots]$。任一實數, 皆可將它展開成簡單連分數。反之, 予一無窮數列 $(a_n)_{n\geq 0}$, 其中 $a_0 \in \mathbb{Z}$, 而當 $n \geq 1$ 時, $a_n \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

則可證明: $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ 存在。令此極限為 α, 則此 α 之連分數展開亦為 $[a_0;\, a_1, \ldots]$。

注意到, 一個有理數可能兩個簡單連分數的展開式。例如: $\frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$。即: $\frac{2}{3} = [0;1,2]$, $\frac{2}{3}$ 也等於 $[0,1,1,1]$。同理, 若 $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = [a_0;\, a_1, \ldots, a_n]$, 則

---

* 參見26卷2期「Euler—數學的沙士比亞」一文。

(i) 當 $a_n > 1$, 則 α 也可以寫成 $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1]$。

(ii) 當 $a_n = 1$, 則 $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}+1]$。

(iii) 當 n 之奇、偶性固定時, 有理數有唯一的簡單連分數展開。

運用有理數之簡單連分數展開的上述特質, 我們可以研究幾個有趣的問題。

(I) 對稱有理數: 設 $P > Q > 1$, P, $Q \in \mathbb{N}$, P, Q 互質。若有理數 $\frac{P}{Q}$ 有一個連分數展開式 $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ 滿足下列條件: $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}, \ldots, a_n = a_{n-n}$, 也就是說 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 是一個對稱數列, 則稱 $\frac{P}{Q}$ 爲一對稱有理數。

問題一. 設 $P > Q > 1$, P, $Q \in \mathbb{N}$, 且 P, Q 互質, 試問正有理數 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數的充要條件爲何?

關於問題一, 我想用一點簡單的線性代數的方法來研究。先假設 $\frac{P}{Q} = [a_0, \ldots, a_n]$, 其中數列 $(a_0, \ldots, a_n)$ 對稱。令

$$\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

則 $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q}$, 而因我們假設 P, Q 互質, P, Q 均正, 所以 $P_n = P$, $Q_n = Q$。另外, 若對 (9) 式中之矩陣 $\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$ 取伴隨 (adjoint) 矩陣, 則得

$$\begin{bmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

因爲 $(a_0, \ldots, a_n)$ 爲對稱數列, 如果比較 (9), (10) 兩式, 便會發現: $\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$ 爲對稱方陣。因此

$$P_{n-1} = Q_n = Q. \tag{11}$$

又因 (9) 式告訴我們:

$$PQ_{n-1} - Q^2 = (-1)^{n+1}, \tag{12}$$

因 (12), 我們發現以下 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數的必要條件:

輔理 1. 若 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數, 則 $Q^2 + 1$ 或 $Q^2 - 1$ 兩者之一必被 P 所整除。

我們當然有興趣知道, 上述輔理的必要條件是否也是 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數之充分條件。

設 $P > Q > 1$, P 整除 $Q^2 + 1$, 則因

$$PQ \geq (Q+1)Q = Q^2 + Q > Q^2 + 1,$$

所以, 若 P 能整除 Q^2+1, 令

$$S=\frac{Q^2+1}{P}, \tag{13}$$

則有 $S<Q$, 而且有下列關係式:

$$PS-Q^2=1. \tag{14}$$

用 $P,\ S,\ Q$ 造一個對稱方陣 $\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & S \end{bmatrix}$, 若能將此方陣分解為 $\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的形式, 便容易回答前述問題。為此目的, 我們研究:

(II) 整數方陣 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix}$ 的分解, 其中 $PS-QR=1$ 或 -1。

關於這個問題, 我只介紹下列定理。

定理 2. 設 $T=\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & S \end{bmatrix}$ 為一整數方陣, 其中

(i) $Q>S>0$

(ii) $PS-QR=\delta,\ \delta=1$ 或 -1,

則必存在 $a_0\in\mathbb{Z},\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N},\ (-1)^{n+1}=\delta$, 使 T 可分解如下:

$$\begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

證明: 設 $\frac{P}{Q}$ 之連分數展開式為 $[a_0,a_1,\ldots,a_n]$, 其中 n 滿足條件: $(-1)^{n+1}=\delta$。則 $P=P_n,\ Q=Q_n$ 且

$$PQ_{n-1}-QP_{n-1}=PS-QR. \tag{15}$$

由 (15) 式, 得

$$P(S-Q_{n-1})=Q(R-P_{n-1}), \tag{16}$$

也因此, 得知

$$Q|S-Q_{n-1}. \tag{17}$$

由於 $Q>S>0,\ Q=Q_n>Q_{n-1}>0$ 因此 $Q>|S-Q_{n-1}|$。故由 (17) 式得知

$$S-Q_{n-1}=0,$$

所以 $S=Q_{n-1}$。再由

$$PS-QR=PS-QP_{n-1}$$

得 $R=P_{n-1}$。

綜合以上討論, 我們發現:

$$\begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理證畢。

將定理 2 透過 (14) 式應用在問題一上, 若 P 能整除 Q^2+1, 則有 $Q>S>0$, 而對稱方陣 $\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & S \end{bmatrix}$ 之行列式爲 1, 依定理 2, $\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & S \end{bmatrix}$ 有下列分解:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中 n 爲奇數。對 (18) 式之兩邊取伴隨矩陣, 我們發現

$$\frac{P}{Q} = [\alpha_0;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_n;\, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0].$$

由於 n 之奇偶性已定, 所以 $\alpha_0=\alpha_n$, $\alpha_1=\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_n=\alpha_0$, 即 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數。

當 P 能整除 Q^2-1 時, 同上述討論, 在運用定理 2 之後, 亦可證明 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數。綜合以上的討論, 我們得到下列結論:

定理 3. 設 $P>Q>1$, P, Q 爲整數。則 $\frac{P}{Q}$ 爲對稱有理數之充要條件是: P 能整除 Q^2-1 或 Q^2+1。

有幾個與定理 3 相關的有趣問題, 留給同學們想一想:

(III) V 型有理數: 設 $P>Q>1$, P, Q 互質。若 $\frac{P}{Q}$ 對稱, 而且其對稱連分數展開式 $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ 具下列性質: $a_0=a_n \geq a_1=a_{n-1} \geq \cdots \geq a_n=a_{n-n} \geq \cdots$, 則稱 $\frac{P}{Q}$ 爲 V 型有理數。

問題二: 試找出 $\frac{P}{Q}$ 爲 V 型有理數之充要條件。

當然啦, 我們也是可以定義 W 型, 或週期型有理數等等, 這些留待同學們去想像。

我們發現, 簡單連分數 (simple continued fraction) 其實並不簡單, 蚯蚓也是一樣; 它們使大地肥沃, 使雞鴨壯碩, 也引發了我對連分數的興趣。最後, 謹以「秋風夜雨」的演奏曲, 作爲我今天演講的結尾。謝謝大家。

—本文作者演講人沈昭亮現任教於清華大學數學系—