21世紀初幾何教學的透視
—— 第4部份 計算機使幾何教學別開生面

Klaus-Dieter Graf and Bernard R. Hodgson 著
徐瀝泉 譯

引言

本部份我們將說明, 當人們適當地使用計算機之後, 它將怎樣給教學活動提供史無前例的活力。

爲討論方便起見, 假設其框架集中在數學、應用和教學法這3個不同的維度上, 而在它們之中的每一個方面計算機都扮演了一個重要角色。在數學維度上, 它包括數學對象本身在教學情境中與問題緊密相聯。計算機有助於我們建立基本的數學思想, 恰當地予以理解。在我們的情形下它是通過類比幾何變換來實現的; 在應用問題上, 計算機顯出它是一種構造複雜圖形的方便的工具, 它通過重複基本的數學過程來實現; 在教學法這一維度下, 爲了闡明數學對象的基本性質及其相互關係, 計算機被用於類比某些現象的分解。

1. 計算機在幾何中的新應用: "平面瓦片的陰陽覆蓋" 和 "萬花筒"

我們首先給出2個具體例子來啓發我們的研究和討論。在此, 計算機起著基本的和關鍵的作用。

圓的分割與反演

我們的第一個例子是關於 L. Collatz's 分割問題的解。即, 使用圓規和直尺把一個圓盤劃分爲面積相等的 n 個區域, 如圖1, 表示當 $n = 6$ 時的 Collatz's 分割。作法由下面的步驟 I 指出。

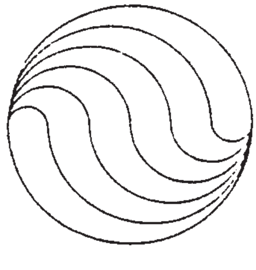

圖1

圖2

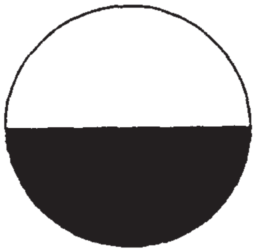

圖3

圖4和圖5也來自 Collatz's 分割, 將由後面圓的反演變換給予說明。

步驟 I: 首先把給定圓盤的直徑 n 等分, 通過這些分點在圓內畫 $(n-1)$ 條曲線, 每條曲線的兩個端點即該圓直徑的端點。每一條曲線都由兩段半圓弧連接而成, 這兩個半圓的直徑即原圓盤直徑被該曲線分割而成的兩條毗鄰的相應的線段。

步驟 II: 通過圓的反演變換, 把上述圓盤內的曲線影射到圓盤外。

這樣就把整個平面劃分爲某些區域, 其中之一可稱爲平面的 "一塊瓦", 但必須提及某些 "瓦片" 是無界的。圖4和圖5各表示當 $n=5$ 和 $n=6$ 時的結果:

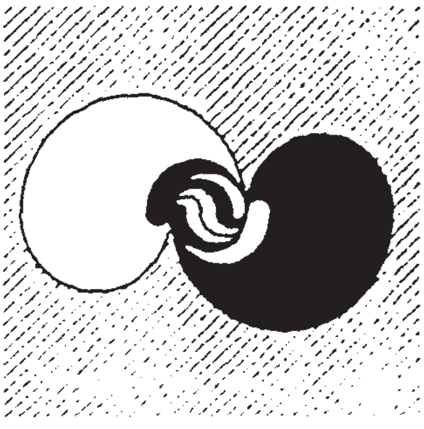

圖4

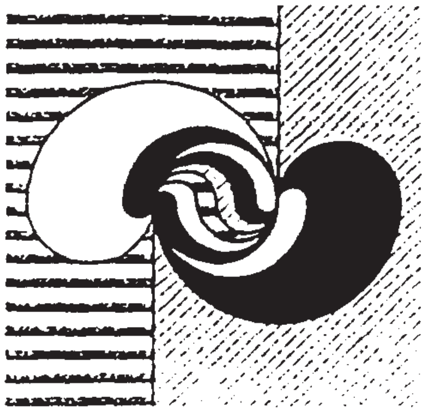

圖5

特別地當 $n=2$ 時它與著名的 "陰陽" 符號或道家哲學中的 "太極" 符號有密切的聯繫 (如圖2所示)。我們把圖2的陰陽符號中各包含一個對稱點 (小圓圈) 的兩個小半圓連接而成的曲線叫做 "陰陽直徑", 或稱爲 yy-直徑。陰陽符號以其美學價值而著稱, 其顯著的特徵就是它的中心對稱性。圖3則給出了圓的另一種分割, 它也被分成對稱的上下兩部份, 但它要比上述陰陽分割稍遜一籌。用一條標準的直徑把一個圓直截了當地分成兩部分, 和使用陰陽直徑這樣的曲線對圓進行分割。相比之下, 後者創造了一種更有意義的和諧與協調。這裡我們暫且不顧陰陽符號內的兩個小圓圈, 儘管它們在這一符號的道家概念中扮演了重要角色。

現在我們暫時中止上述討論, 再把注意力集中到圓與圓弧間的基本關係上來。

圓的度量問題

在中學階段, 幾何教學主要強調圓與直線的相互作用, 例如圓與它的直徑、弦、割線

與切線之間的關係問題。而無理數 π 則是我們探討的一個重要概念。其理由之一當然是這些相互聯繫在解決某些計算面積和周長等實際問題時所起的重要作用。但對圓的研究在某種程度上是脫離 π 而進行的。

這一點已爲歷史所證實。關於圓的第一個被證實的命題是由阿基米德給出的。他在一篇數學小品 "圓的度量" 中指出: 任何一個圓的面積與一個特定的直角三角形的面積相等, 這個直角三角形的兩條直角邊分別等於圓的半徑和圓周長 (如圖6)。

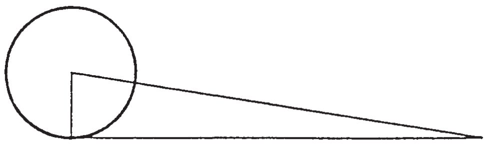

圖6

這一命題是數學命題中的重大定理之一, 詳見參考文獻 [2]。它在 Serres 關於科學史的非凡著作有關致力於阿基米德研究的重要章節中有專門的討論。(詳見參考文獻 [1])。阿基米德通過這一命題指出了求圓周長和求圓面積這兩個問題之間的聯繫, 給出了圓周長與圓的直徑之比是一個常數, 包括圓面積可以用它的直徑來表示。這已經是衆所周知的事實 (參見歐幾裏德原理命題 XII.2)。這一常數自17世紀以來一直用 π 來表示, 其結果是由阿基米德應用他所創造的 "窮歇原理" 來證明的。與此直接相關的有一個預備定理, 它指出: 正多邊形的面積是其周長與它的邊心距的乘積之半。

幾何教學的更爲廣泛的觀點是: 除了學習圓與直線的關係之外, 還要考察諸如圓弧之間的相互作用, 尋求與此相關的數學命題與性質。例如, 若使用圓的半徑之長 r 和它的 yy-直徑之長 t 的關係式來表示, 因爲 t 等於圓周長之半, 於是我們可得到圓周長和圓面積的下述公式

$$C = 2t \text{ 和 } A = rt$$

這兩個公式儘管難以實際操作, 原因是 t 不像 r, 它不能用米制尺來測量, 但是它爲圓的基本元素之間的關係提供了新的資訊, 傳達了陰陽分割的和諧與協調。

Collatz's 方法的進一步說明

接下來我們來說明爲什麼 Collatz's 方法 (聯繫到上述步驟 I) 會把一個圓盤分成 n 塊面積相等的區域, 而這只要使用圓規和直尺即可, 這裏圓內 $n-1$ 條曲線的長度 t 都相等。當 $n > 2$ 時, 我們把它們叫作 "僞陰陽直徑"。任何一條僞陰陽直徑都把圓盤分爲兩個區域, 每一區域的界周都等於圓周長。此外, 易證這兩個區域的面積分別爲 $r't$ 和 $(r-r')t$, 其中 r' 表示其中一個小半圓的半徑。這樣我們看到, t 不僅恰是這些區域的周界之半, 而且也刻劃了由這些半圓組成的各種不同分割的特性。下面我們遵循前述結果進一步闡明 Collatz's 分割的結構。爲此, 當我們把具有小圓 (較小的那個半圓) 半徑爲 kr/n (這裡 $k \in [1, \frac{1}{2}n]$) 的那條僞 yy-直徑, 向右移動 r/n 個單位, 即, 使其小圓半徑增加到 $(k+1)r/n$, 當然它所確定的 Collatz's

區域會變大, 這時我們考慮與此相應的 n 個 Collatz's 區域中, 兩個相鄰區域的重疊部分, 亦即擴大了的部份, 其面積顯然都等於 rt/n, 即, $(k+1)rt/n-krt/n$。由此看來, 它與 k 無關。

圓的反演與動態幾何軟件

把 Tai Chi 符號置於複平面上的單位圓內, 那麼在一個互爲倒數的複影射 $z\to 1/z$ 之下, 圓內的"陰""陽"兩個部份就擴充到整個複平面, 如圖7所示:

圖7

注意到該幾何變換可以相繼分解爲一個圓的反演變換, 即複影射 $z\to 1/\bar{z}$ 與另一個關於 x 軸的反射變換。而我們之所以要引入圓的反演變換, 是因爲其美學特徵。假如把各個不同的區域用色彩分隔開來則效果更佳。如圖4和5那樣, 把圓內部份的原像和與之對應的圓外的影像塗上相一致的色彩, 將得到一個特殊的迷人的平面覆蓋。

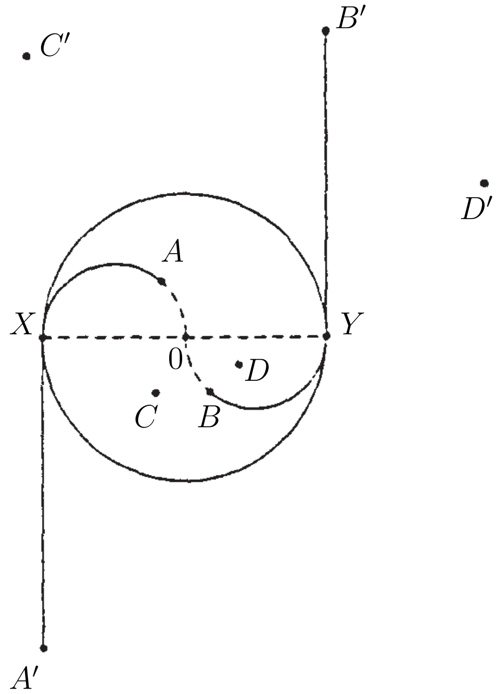

圖8

儘管靠手工操作也能畫出上述圖形, 然而使用計算機作圖則有助於我們眞實地觀察其全過程, 當然還可以極大地簡化我們的勞動。尤其是應用諸如 Cabri 那樣的動態的大容量的軟體, 將更具吸引力。

圖 8 和 9 就是通過動態的大容量的 Cabri 軟體畫出來的。在圖8 中, 當點 A 沿著 yy-直徑從點 X 移動到點 O 時, 另外, 當與之相對稱 (關於中心對稱) 的點 B, 沿著同一條 yy-直徑從點 Y 移動到點 O 時, 它們的像點 A' 和 B', 通過圓的反演加上鏡面反射, 沿著直線方向從點 X 和點 Y 各自向無限延伸。點 C 和點 D 及其它們的像 C' 和 D' 表示怎樣從圓內的點到圓外的影射。類似地我們可得到圖9 的影射方式, 前面圖4 和圖5 則更爲複雜一些。

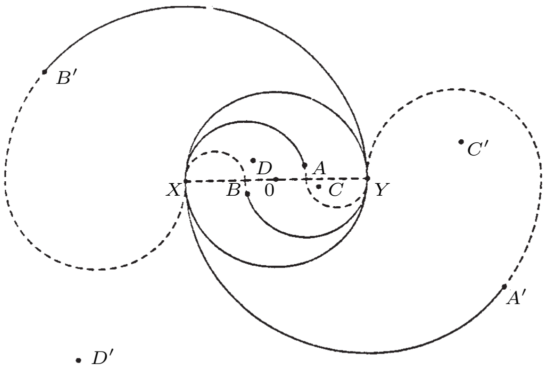

圖9

圖10所表示的變化方式是基於圓的分割與反演的思想。它由兩對僞陰陽直徑重復地把圓分成3個區域, 一對是水平方向, 另一對是垂直方向, 這4條僞陰陽直徑從圓內影到圓外, 指明了由此方式所產生的幾個相對應的區域。

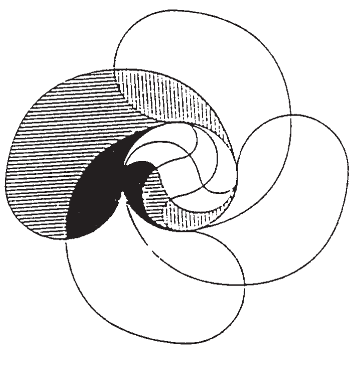

圖10

顯然, 在紙上複製這些圖案不可能全風味地傳眞計算機螢幕上所發生的那些過程。當我們看到那些給定的點以各種運動方式出現在螢幕上的時候, 必要時如若再使用彩色編碼來突出其內在聯繫的話, 那麼我們所考慮的變換就不僅具有用某種計算規則 (例如 $z \to 1/z$) 來刻劃的分析的性質, 而且可以成爲逼眞的幾何實體。其直觀性和可見性簡直可以說是達到了驚人的地步。在此, Cabri 軟體的一個重要特徵是, 它從本質上改變了過去那種單靠 "一張紙和一支筆" 的局面。它極大地簡化了平面幾何中的基本的幾何變換, 包括圓的反演變換在內, 都具有可操作性。用戶對這些變換的分析的描述不必介意, 也不需要把它們搬到複平面中去處理。計算機將使這些我們所感興趣的變換成爲它可以直接閱讀的幾何對象, 它們都存在於 Cabri 軟體所提供的幾何環境之中。

萬花筒效應

我們再把注意力轉向計算機擴大幾何背景的第2個例子。圓的反演變換喚起了人們留在多方面的回憶, 其中較爲原始的一個情形就是所謂的萬花筒。它們都是由某種基本的幾何變換而產生的絕妙的變化方式。在萬花筒內, 由兩塊平面鏡的交互作用所形成的一個裝置, 通過並置在這些鏡片之間的基本花紋反射成像, 並隨著其位置的改變, 產生了形形色色的圓花窗式的 "玫瑰花模型", 圖11表示的是由兩塊相交成 60° 的鏡片所組成的一種模式。這些影響和支配著優美圖案的萬花筒規則, 早在19世紀就由其發明者 D. Brewster 先生所確證。他用鉛筆把原始狀態記錄在紙上進行探索, 爲我們提供了一個良好的開端。(見參考文獻 [6])

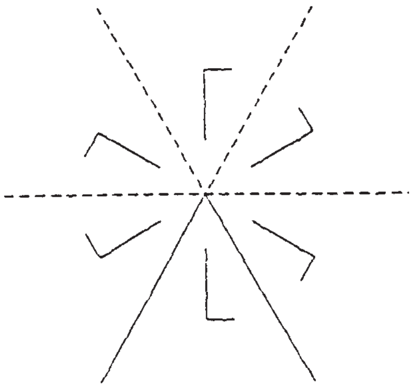

圖11

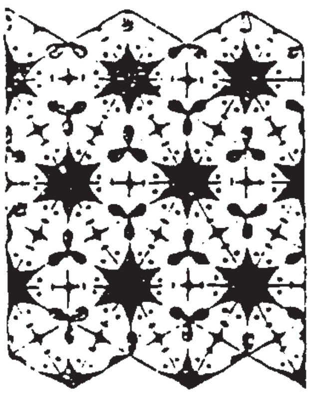

圖12

萬花筒也可以引成 “平面瓦塊”。當引進第3塊 (最後或是第4塊) 鏡片之後, 它使得圓花窗爆裂而遍佈全平面。如圖12所示。進而, Brewster證明了這些 “多中心萬花筒” 的原理。例如其鏡面的交角只有 (60°, 60°, 60°), (90°, 60°, 30°) 和 (90°, 45°, 45°) 這三種類型。任何萬花筒作用的探究必須從眞實的萬花筒出發, 從商店裡可以買到那些價廉物美者, 也可以由家庭自製。必須通過具體的操作, 即把圓筒適當轉動到各種狀態, 隨著一步一步地抽象而最終趨於對現象的正規描述, 推導出公式或定理的證明。一種可能實現的工作順序可以按照下列線索進行:

首先, 鏡片必須在自由狀態下進行操作, 而不是把它們固定在圓筒內。只需使用一些小物體或者是畫在紙上的圖形作爲透視對象;

接著準備好紙和筆, 然後用直尺和圓規把觀察到的現象畫下來。其中包括抽象地對變換作出定義。

最後, 把上述現象切換到計算機螢幕上, 盡可能以不同的方式重復前面的試驗, 從而開放新的機會。

許多軟體環境可以在這裡實現。這必將使得冗長的操作自動進行, 並且簡化複雜圖像的結構。通過巨集結構的適當使用, 它促使用戶把注意力集中到更加廣泛的現象上去。儘管有許多無關的細節被隱藏在宏觀現象之中, 但重要的是通過操作, 可能會出現更多的機會。而這些現象只可能存在於計算機環境之中, 在實際生活中是沒有的。

把圓花窗爆裂爲若干部份, 爲的是研究它的 “歷史”, 即從基本主旨出發的緊密地聯繫在一起的成像過程的方式。Cabri 功能表提供了一種 “復位結構” 按鈕, 它允許圖像按照某種方式逐步逐步地重復構造; 或者按照某種規則變換這一基本主旨, 這時可能並不存在著眞實世界中的對應物體。例如, 它形成了一個建立在中心對稱基礎上的萬花筒, 而不是軸對稱。(詳見參考文獻 [5])

在下文中我們將更加詳盡地考察由計算機在這方面所扮演的關鍵的角色。

2. 計算機在幾何教育中

現在我們依據引言中所建議的框架來討論計算機在各個維度上所起的作用。

數學維度

爲了說明計算機在數學維度上的應用, 我們考慮幾何課程中的一個特殊的課題, 叫做變換幾何。我們選擇下列3種變換, 它們是在中學的不同年級學習的, 即關於一條直線的反射 (軸對稱)、關於一點的反射 (中心對稱) 和關於一個圓周的 “反射” (圓的反演)。

這是三種基本的幾何工具, 可以用計算機形象地方便地進行模擬。此外, 當反射一個幾何圖形時, 計算機幾乎允許同時地逐點地構造出圖形和它的像 (如圖8, 9和15), 這樣可以使我們看到其變換規則。而前面的兩種變換在幾何教學中可能較爲規範, 這第3種變換並非如此, 可能是因爲其構造的方式更爲複雜一些的緣故吧。

軸對稱變換最易於爲初學者所接受, 因爲它存在著一個眞實的模型, 即平面鏡。中心對稱沒有這樣的實際背景。對學生來說, 考慮它們覺得很抽象。圓的反演則要通過球面鏡 (凹的或凸的) 來實現。這一點通常在數學課上並不提及, 而留待物理教學中去處理。學習數學的學生只有當他們在學到複平面上的影射時才碰到它。但是, 在此我們提議一種可實現圓的反演的製作方法, 把它設想成平面鏡那樣: 一個 (半) 球面的觀察器, 此球面的內表面是一面鏡子。物體的虛像站立在通過球心的球面鏡裡, 然後延伸到球面的外部, 最終達到虛的無限。

我們完全有理由把這第3種變換與前面兩種變換一起綜合到幾何教學中去。因爲它開闢了更爲廣泛的應用渠道和各種方式方法。再者, 現代計算機對這類技術問題和數學運算能起關鍵的作用, 在圓的反演變換之下完全可以解決更爲複雜圖形的構造問題。

應用維度

在應用維度上, 我們所感興趣的對象是萬花筒和平面瓦片的鋪蓋。更爲明確地說, 我們首先考慮使用2塊、3塊或者4塊鏡片, 建立在一系列軸對稱變換之上的計算機類比萬花筒。然而, 要靠手工的或是腦力活動的方式把它轉換給計算機, 似乎不可能, 除非增加學習的效能。我們相信擴大了視頻和記憶體的計算機將提供這樣的教學機會和展示很好的例證。

第一、 計算機非常有利於我們的探索, 它將使我們能以較小的投入 (精力) 而輕而易舉地收集到各種調查資料。它既能作出人工所不可能作的圖形, 比如逐點地 (僞的) 同時作出兩個或更多的圖形; 又能分解複雜的物理現象, 由鏡片的相互作用一次一個地成象, 而不是使全部的圖像一下子作出來。

第二、計算機允許研究設備不用眞實材料來製作, 例如 “虛擬的萬花筒” 就建立在一系列中心對稱的基礎上而不是通常我們熟知的軸對稱 (如圖13所示)。

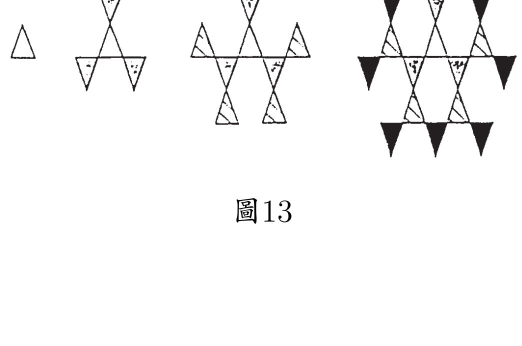

圖13

這樣就創造了一種新的數學模式, 有其獨特的重要性, 也有助於對日常現象更好的理解。

第三、無論在3塊鏡片的情形下還是在4塊鏡片的情形下, 計算機萬花筒都可以產生平面瓦塊 (軸對稱的或者中心對稱的)。這取決於鏡片的相對位置, 即, 圍成三角形還是圍四邊形。撞擊的結果可以形象地看出 (不證明!), 當虛擬的萬花筒工作時, 按照與一塊瓦邊的中點相對稱這一規則, 任何三角形與四邊形都可以操作, 不必對瓦片的形狀加以限止 (圖14就提供了這樣的例子)。此外, 虛擬的萬花筒也能引起兩種不同類型瓦片的覆蓋。

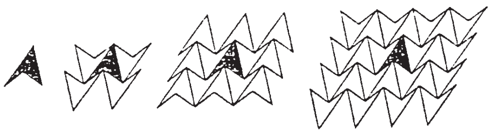

圖14

第4種應用, 產生了許多有趣的平面鋪瓦方式, 例如用圓弧所圍成的圖形作爲 “瓦片”, 其中一個整圓的情形是最簡單的特例。如前所述, Collatz's 分割的思想是把圓面 n 等分, 它給出了這樣一種鋪蓋方式, 圓內的每一塊瓦片都全等, 它們具有相同的面積和周長。應用一個反演變換, 則把圓內的區域影照到圓外平面上空餘部份的區域, 即蓋瓦在圓外發生。給人以極爲生動的圖感, 當相對應的區域 (像與原像) 著上彩色時尤其顯著。

教學維度

在教學維度上, 在我們的框架結構中有幾種方式是較爲明顯的。首先在數學課上, 對4年級、8年級和12年級的學生, 通過操作眞實的平面鏡和萬花筒、幾何建模和符號的推理, 在考慮傳統的、圖像的和符號的學習方面, 對學習數學的對象和應用必將有所作爲。其次通過計算機的生動應用, 爲我們檢索數學程序提供了有效的新方法, 像逐點地或者整體地變換圖像那樣對萬花筒的模擬。而通過使用圓規和直尺的傳統作法要達到此目的是完全無效的。第三, 當瞭解計算機這種工具的生動性和有效性之後, 會促使和鼓勵小學生對攻克大量的初等幾何問題產生一種主動性行爲的需求, 爲檢驗其猜想而勇於試驗和探索。

現在我們來說明剛才提到的第二個問題。討論一下7年級和8年級的幾何教育而發展起來的一個套裝軟體。叫做 “Turtles 對稱”。(見參考文獻 [4])

如所知, 軟體已得到很大發展。Logo's Turtle 軟體能夠生動地幫助幾何的啓蒙教育。運作中的 Turtle 已經發展成爲對直尺和圓規的一種延伸的工具。隨後就是 Abelson's dyna-turtle 概念的產生, 慣量除外。在某些範圍內運行 Turtle, 可以像用一支鉛筆那樣, 在鍵盤的控制下沿著直線方向運動, 左拐或右拐, 也可以描點。總之, 平面幾何中的許多有趣的圖形都可以作出來。

除了這種 Turtle 軟體外, 還有兩種 Turtle 軟體。即關於軸對稱和關於中心對稱的 Turtle。它們不僅能畫出圖像本身, 還能用不同的顏色在螢幕上作出關於 x 軸、y 軸和中心對稱的它們的像。這個過程既可同時發生也可逐點地發生, 這時就像當運用 Cabri 軟體構造陰陽瓦片那樣。這種對稱的

動態的作圖方式有助於用戶, 從一個完整的獲取圖像的過程中, 更加及時和容易地認識影射的性質。例如, 使我們看到一條直線怎樣剩餘一條直線, 或者是看到在軸對稱之下這條直線方向的改變, 在中心對稱之下剩餘直線可能在同一條直線上。在後者, 我們看到已知直線和它的像平行, 只是指向不同。

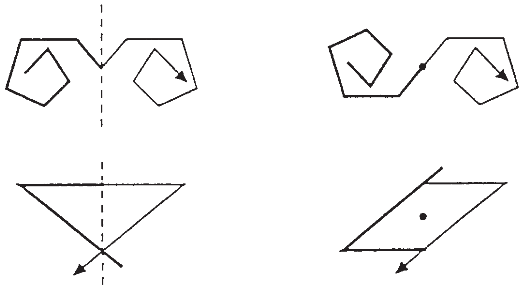

圖15

圖 15 給出了由 Turtle 對稱的兩種類型所生成的圖形的某些例子。圖 16 則展示了下列問題可以怎樣去探索: 當一個三角形在不同的位置關於軸對稱或者關於中心對稱時所發生的情形, 關於這些工具的更加詳細的情形可以到本文作者的另一篇文章中去瞭解。(參考文獻 [4])

Turtle 對稱的思想可以從學習 F. 克萊因的愛爾朗根綱領 (寫於1872年) 的全部變換的性質中加以概括。諸如等距變換 (翻折、旋轉與反射), 相似變換, 仿射變換和仿射影變換。這些工作已經由 Fischer 提議並實施。(參考文獻 [3])

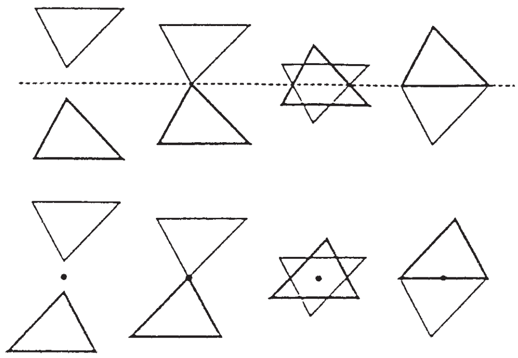

圖16

儘管在最後的十年裡, 在計算機軟體與硬體的發展和進行了許多有價值的教育實驗等方面都取得了長足的進展, 但是計算機在今天的學校裏使用得並不普遍, 其中包括在幾何教學中的應用。這正如人們所早就預料的那樣。其原因雖然很多, 但不外乎與下面的幾個問題相關。即, 計算機的功能和可利用性、計算機的維護和用戶介面程式的複雜性、軟體的教學質量等等。儘管這些事實都與重要出版物相關。但是沒有一個人能像關係到教師的能力和水平那樣對此苛求, 去對付新的教學環境。靠小學生學習和理解幾何學, 在使用技術手段來感染環境的地方, 對老師有許多期待和要求。老師必須在資訊學和教授法方面充分拓寬自身的數學教學領域。對此問題的更進一步的討論參見本文另一作者 Hodgson 的文章。(參考文獻 [7])

本節中提出的幾個問題已經涉及到普通教育的本質方面。例如, 對於陰陽符號這個問題, 除去它與文化內涵的聯繫之外, 還有其重要的與各學科之間橫向聯繫的價值。比如它與哲學相關, 並且從藝術家的觀點來看, 考慮

到它的美學內容, 它還指出了許多其他有趣的模式。

在我們的工作背景下, 有賴於我們深信完全掌握某種 “微理論”。例如萬花筒現象或者弧對圓的分割。對學習者來說, 則是隨著反復持久地訓練他們的觸覺和感覺, 獲得眞實的正確的經驗和體驗。才能體會到數學關於什麼以及與什麼有怎樣的聯繫。

幾何學進入21世紀, 這種情況總是伴隨而來, 隨著對非凡的和潛在情形的闡明及其豐富的原始文件的出現, 數學將更具鑒賞價値。在幾何教學中目前正在起變化的是, 計算機將成爲其關鍵的組成部分, 它不僅通過誘人的圖像吸引著我們, 而且也允許我們探索另一些非常複雜的或者甚至是現實生活中根本不存在的東西。

譯者注: 本文是「計算機技術與幾何教學」的第4部份, 選譯自「數學教育 · 數學文化 · 數學史 · 信息技術」國際學術研討會 (1998年4月由中、日、美、德、法等國聯合舉辦於中國 · 北京) 非結集論文。作者系德國柏林自由大學數學教授。由於譯者水平所限, 不當之處望作者和讀者批評指正。

參考文獻

1. Authier, M., *Archiméde, le canon du savant*, in Serres, M. (Ed.), Eléments d'Histoire des Sciences (101-127), Bordas, 1989 (English translation: History of Scientific Thought: Elements of a History of Science. Blackwell, 1995).
2. Dunham, W., *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics*, Wiley, 1990.
3. Fischer, W. L., *Der Einsatz von Computern im Geometrieunterricht*, in Loska R. & Weighand, H. G. (Eds), Mathematikdidaktik zwischen Forschung und Lehre (254-266), Klinkhardt, 1996.
4. Graf, K.-D., *Using software tools as additional tools in geometry education to ruler and compasses*, Education and Computing, 4, 171-178, 1988.
5. Graf, K.-D. and Hodgson B. R., *Popularizing geometrical concepts: the case of the kaleidoscope*, For the Learning of Mathematics, 10, 3, 42-50, 1990.
6. Hodgson, B. R., *La géométrie du kaléidoscope*, Bulletin de l'Association mathématique du Québec, 27, 2, 12-24, 1987. Reprinted in Plot (Supplément: Symétrie - dossier pédagogique), 1988, 42, 25-34.
7. Hodgson, B. R., *The roles and the needs of mathematics teachers using IT*, in Watson, D. and Tinsley, D. (Eds.), Integrating Information Technology into Education, (27-37), Chapman and Hall, 1995.

–本文譯者任職於中國無錫市教育研究中心–