淺談多元多次方程組

李源順

一. 前言

在中學時期, 求方程式是代數學上面的重要課題。在一元方程式方面, 我們學會了利用公式求一元一次、二次方程式的解, 也知道它們的圖形是直線或拋物線。在圖形是曲線的一元三次以上的方程式方面, 雖然我們知道一元三次和四次方程式有根式解, 但是不容易記得, 至於一般的一元五次以上的方程式就沒有根式解。所以在解一元三次以上的有理係數方程式時, 我們可以試著把它因式分解, 以便求出它的有理根; 或者對於實係數或複數係數方程式, 我們可以利用牛頓法求它的近似根。

在多元方程組方面, 我們學會了利用加減消去法、代入消去法、甚至矩陣的方法, 求多元一次方程組的解, 而且也了解它的解的幾何義意, 例如, 二元一次方程組的解是平面上直線的交點, 三元一次方程組的解是空間中平面的交點。對於多元多次方程組, 我們則沒有學到如何求出它的解, 或也不了解它的解所隱含的義意。

現在我們將帶您了解如何解多元多次方程組。此外, 我們也將讓您知道如何利用數學軟體 Mathematica 以及 Maple 求多元多次方程組的解。

二. 理想 (ideal)

將多項式加上 "$= 0$" 即變成方程式, 所以方程式和多項式的關係非常密切。為了了解多元多次方程組的問題, 我們可以考慮將它轉換成多項式的問題。同時我們有必要定義一個多元多次多項式中每個單項的排列次序 (order), 即單項式的大小。在這方面, 一般定義的方法有二種:

定義:

$$\text{設} \quad \begin{cases} \alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ \beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}, \end{cases} \qquad \alpha_i, \beta_i \in N \cup \{0\},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

定義兩個單項式的大小順序為 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, 再者, 同一未知數定義 $x^{m+1} > x^m > \cdots > x^2 > x > 1$, 我們稱 $\alpha > \beta$, 這種次序大小稱為 Lexicographic order (簡稱 lex order)。

例如, $x_1 > x_2^{100}$, $x_1^2x_2 > x_1^2$。

定義:

$$\text{設} \quad \begin{cases} \alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, & \mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}, & \mid \beta \mid = \sum_{i=1}^n \beta_i, \end{cases} \qquad \alpha_i,\ \beta_i \in N \cup \{0\},\ i=1,2,\ldots,n.$$

若 $\mid \alpha \mid > \mid \beta \mid$, 或者 ($\mid \alpha \mid = \mid \beta \mid$, 且 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$), 我們就稱 $\alpha > \beta$, 稱爲 Graded lex order (簡稱 grlex order)。此時, $x_1 < x_2^{100}$, 且 $x_1^2x_2^3 > x_1x_2^4$。

不管是用那一種次序, 我們稱一個多元多次多項式 g 的項中次序 (order) 最高的爲領導項 (leading term), 簡寫爲 $LT(g)$, 它的係數稱爲領導係數 (leading cofficient), 簡寫爲 $LC(g)$, 而 $LM(g) = LT(g)/LC(g)$ 爲領導項中不含係數的未知數。

我們都知道, 若將二個多元一次方程組分別乘以非零的常數倍, 再把它們相加以後, 也會含蓋原方程組的解。雖然這種做法對我們求多元多次方程組的解沒有太大的幫助, 但在抽象代數上, 它的觀念, 對我們引進一個"理想" (ideal) 的觀念卻非常有幫助。

定義: 設 k 是一個體 (field)(可以想成 k 是複數體 C), $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 爲係數屬於 k 的 n 元 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 多次多項式所成的集合, 即

$$\begin{aligned} &k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ =&\{\sum_{i=1}^{l} a_i x_l^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}} \mid a_i \in k, \alpha_{ij} \in N \cup \{0\},\ i=1,2,\ldots,l,\ j=1,2,\ldots,n\} \end{aligned}$$

設 $I \subset k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$。
若 I 滿足下列條件, 我們稱 I 是一個理想 (ideal)
(1) $0 \in I$
(2) 若 $f, g \in I$, 則 $f + g \in I$
(3) 若 $f \in I$, 且 $h \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, 則 $hf \in I$

定義:

$$\text{設} \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

爲一多元多次方程式組。

下面以 $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ 表示此方程組。此時 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 則變成是一組多元多次多項式。

我們以 $< f_1, f_2, \ldots, f_m >$ 表示 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 所生成 (generate) 的理想, 即
$< f_1, f_2, \ldots, f_m > = \{h_1f_1 + h_2f_2 + \cdots + h_mf_m \mid h_1, h_2, \ldots, h_m \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$, 而以 $V(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ 表示這個理想的解, 即 $V(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, 1 \le i \le m\}$。

此時, 因爲 $h_1, h_2, \ldots, h_m$ 有無限多個可能性, 所以理想 $< f_1, f_2, \ldots, f_m >$ 內會有無限個多項式。由於 $< f_1, f_2, \ldots, f_m >$ 是由 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 所衍生成的, 所以, 理想 $< f_1, f_2, \ldots, f_m >$ 的解 $V(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, 也是原方程組 $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$, $f_m = 0$ 的解。方程組 $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ 的解也是 $V(f_1, f_2, \ldots, f_m)$。

這個意思好像是說,

$$h(x+y+1) + k(x-y-1) = 0 \quad , h, k \in R$$

(它的幾何意義是: 所有過二直線交點的直線)

的解, 和

$$x + y + 1 = 0$$
$$x - y - 1 = 0$$

的解相同。

三. Groebner 基底

雖然類似上述的理想都會有無限多個多項式, 但它總是可由有限個的多項式所生成 (這是所謂 Hibert basis 定理–直觀的說, 它就是由 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 所生成)。

既然, 一個理想可以由有限個多項式生成, 我們便試著想找一組“好” 的多項式來表示這一個理想, 希望這一組多項式能夠給我們很好的訊息, 使我們能更順利的解出原方程組。

這個觀念就好像我們要解

$$x + y + 1 = 0 \tag{1}$$
$$x - y - 1 = 0 \tag{2}$$

我們可以把 (1) 式和 (2) 式相加得

$$2x = 0$$

此時原方程組的解和

$$x + y + 1 = 0$$
$$2x = 0$$

的解相同, 而變換後的方程組能很快的算出 x 和 y 。

在討論上述問題時, 我們想到一個多項式都是由幾個單項式組成。因此, 我們先著手討論由一些 (可能無限多個) 單項式所生成的理想, 即

$$I = < x_1^{\alpha_{j1}} x_2^{\alpha_{j2}} \cdots x_n^{\alpha_{jn}} \mid j \in A >$$

其中 $\alpha_{ji} \in N \cup \{0\}, i = 1, 2, \ldots, n$, 而 A 是一個 (有限或無限) 集合。

我們可以證明出來 (證明省略), 一個由某些單項式所生成的理想總是由有限個單項式所生成。

藉由單項式的觀念, 每一個多項式 f_i 都有一個領導項 $LT(f_i)$, 我們便可定義出所謂的 Groebner 基底。

定義: 設 I 是一個理想, 若有一組多項式 $g_1, g_2, \ldots, g_s$, 使得

$$< LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_s) > = < LT(I) >$$

則這組多項式 $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$, 稱為 I 的 Groebner 基底。

此時我們可以證明出來, 假如 $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ 是 I 的 Groebner 基底, 那麼理想 I 也是由 $< g_1, g_2, \ldots, g_s >$所生成, 即 $< g_1, g_2, \ldots, g_s > = I$ (證明省略)。

現在我們就來看看這個 Groebner 基底是怎麼算出來的。

四. Groebner 基底的演算法

Groebner 基底的算法, 說穿了其實就是單元多次多項式除法的推廣。

定理: (除法定理): 設 $f_1, f_2, \ldots, f_m \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是一個多元多次多項式組, $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是另一個多元多次多項式, 則 f 可以表成

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m + r, \quad \text{其中}, a_j, r \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

且 $r = 0$ 或 r 不能為 $LT(f_1), LT(f_2), \ldots, LT(f_m)$ 中的任何一個所整除。

(證明省略)

例如, $F = x^2 + y^2 + z^2$ 被 $F_1 : x^2 + y + z - 1 = 0$, $F_2 : x + y^2 + z - 1 = 0$, $F_3 : x + y + z^2 - 1 = 0$ 來除的話 (用 lex order),

$$F = F_1 + 0F_2 + 0F_3 + (y^2 - y + z^2 - z + 1), \text{ 或}$$
$$F = 0F_1 + (x - y^2 - z + 1)F_2 + 0F_3 + (y^4 + 2y^2 z - y^2 + 2z^2 - 2z + 1), \text{ 或}$$
$$F = 0F_1 + 0F_2 + (x - y - z^2 + 1)F_3 + (2y^2 + 2yz^2 - 2y + z^4 - z^2 + 1)$$

因此, 這種除法並不唯一。但是除式若是一個 Groebner 基底, 則餘式會唯一。

定理: 設 I 是一個理想, 而 $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_s\}$ 是這個理想 I 的 Groebner 基底, 而 $f\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 則 f 被 G 除的餘式會唯一, 即存在唯一的 $r\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 使得

(1) r不能爲 $LT(g_1),LT(g_2),\ldots,LT(g_m)$ 中的任何一個所整除,

(2) $f=\sum_{i=1}^{n}h_ig_i+r$, 其中 $h_i\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$,

特別是, $f\in I$, 若且唯若餘式 $r=0$。

(證明省略)

再者, 我們若

定義: 設 $F=<f_1,f_2,\ldots,f_m>$, 其中 $f_1,f_2,\ldots,f_m\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$。若 $f\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 我們以 $\overline{f}^F$ 表示多項式 f 被 F 所除的餘式。

定義: 設 $f,g\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, 而 $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$ 爲 $LM(f)$ 與 $LM(g)$ 的最低公倍式, 定義

$$s(f,g)=\frac{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}}{LT(f)}f-\frac{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}}{LT(g)}g,$$

(意思是把 f 和 g 的最高次項消掉)

則我們發現有下面的性質:

定理: 設 I 是一個理想, 而 $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_s\}$ 是 I 的 Groebner 基底, 若且唯若 $\overline{s(g_i,g_j)}^G=0$, $\forall i\neq j$

(證明省略)

這個意思是說, 假如 $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_s\}$ 是 I 的 Groebner 基底, 則在理想 I 中, 把基底中的任何兩個多項式的最高次項消掉而得的多項式, 會被 G 所整除。

我們利用這個技巧把一組多項式除了以後, 若餘式不等於0, 那把餘式加進來變成基底的一個多項式, 直到不管再怎麼除, 餘式都會等於0, 此時, 我們便得到這組多項式所生成的理想的 Groebner 基底了。

例如, 考慮 $k[x,y]$, 而多項式的順序用 grlex order , 設 $f_1=x^3-2xy$, $f_2=x^2y-2y^2+x$, $I=<f_1,f_2>$, 則

$$\begin{aligned}\text{因爲 } LT(s(f_1,f_2))&=LT(\frac{x^3y}{x^3}(x^3-2xy)-\frac{x^3y}{x^2y}(x^2y-2y^2+x))=LT(-x^2)\\&=-x^2\notin<LT(f_1),LT(f_2)>\end{aligned}$$

所以, $\{f_1, f_2\}$ 不是一個 Groebner 基底。因此, 我們想利用上述方法找出一個 Groebner 基底。

首先, 我們必須要有 $s(f_1, f_2) = -x^2 \in I$,
所以, 我們令 $f_3 = -x^2$, 因此我們得到一個新的集合 $F = \{f_1, f_2, f_3\}$。
此時, $s(f_1, f_2) = f_3$, 所以, $\overline{s(f_1, f_2)}^F = 0$。
但 $s(f_1, f_3) = \frac{x^3}{x^3}(x^3 - 2xy) - (\frac{x^3}{-x^2})(-x) = -2xy$, 但 $\overline{s(f_1, f_3)}^F = -2xy \neq 0$,
因此, 我們再加入 $f_4 = -2xy$, 得到 $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$,
此時, $\overline{s(f_1, f_2)}^F = \overline{s(f_1, f_3)}^F = 0$。
而 $\overline{s(f_1, f_4)}^F = y(x^3 - 2xy) - (-\frac{1}{2}x^2)(-2xy) = -2xy^2 = yf_4$,
因此, $\overline{s(f_1, f_4)}^F = 0$,
而 $s(f_2, f_3) = (x^2y - 2y^2 + x) - (-y)(-x^2) = -2y^2 + x$,
但是 $\overline{s(f_2, f_3)}^F = -2y^2 + x \neq 0$,
因此, 我們再加入 $f_5 = -2y^2 + x$, 得到 $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$,
此時, 我們發現 $\overline{s(f_i, f_j)}^F = 0$, $\forall 1 \leq i < j \leq 5$,
因此, 我們得到 I 的 Grobner 基底為 $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$,
即 $\{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, -x^2, -2xy, -2y^2 + x\}$。

但是這種計算 Groebner 基底的方法太過煩雜, 因此, 我們試著尋求比較好的一組 Groebner 基底。

我們知道, 假如 G 是 I 的一組 Groebner 基底, 那麼 $< LT(G) >=< LT(I) >$, 若 $LT(p) \in< LT(G - \{p\}) >$, 則 $< LT(G - \{p\}) >=< LT(G) >=< LT(I) >$ 所以, $G - \{p\}$ 也是一組 Groebner 基底, 亦即可將原先 Groebner 基底內的多項式p 拿掉。因此, 我可以定義 minimal Groebner 基底。

定義: 若 G 是多項式理想 I 的一組 Grobner 基底, 且滿足下列條件, 則稱 G 是 I 的一組 minimal Groebner 基底:
(i) $LC(p) = 1$, $\forall p \in G$ (即基底的多項式, 領導係數都為1),
(ii) $LT(p) \notin< LT(G - \{p\}) >$, $\forall p \in G$ (即缺少其中一個, 就不能成為基底)。

以上例為例, $\{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, -x^2, -2xy, -2y^2 + x\}$ 是一組基底, 但

$$LT(f_1) = x^3 = -x \cdot LT(f_3)$$
$$LT(f_2) = x^2y = -\frac{1}{2}x \cdot LT(f_4)$$

因此, 可以去掉 f_1, f_2, 其它的則沒不能去掉, 因此, $f_3 = x^2, f_4 = xy$, $f_5 = y^2 - \frac{1}{2}x$, 是一組 minimal Groebner 基底。

很不幸的, 這種 minimal Groebner 基底也有無限多種可能, 例如, 設 $a \in k$, 則 $f_3 = x^2 + axy$, $f_4 = xy$, $f_5 = y^2 - \frac{1}{2}x$, 也是一組 minimal Groebner基底。因此, 我們再定義一種 reduced Groebner 基底。

定義: 若 G 是多項式理想 I 的一組 Grobner 基底, 且滿足下列條件, 則稱 G 是 I 的一組 reduced Groebner 基底:

(i) $LC(p) = 1$, $\forall p \in G$ (即基底的多項式, 領導係數都爲 1)

(ii) $\forall p \in G$, p 的每個單項都不屬於 $< LT(G - \{p\}) >$

有了這個定義, 我們可以證明它是唯一的。

定理: 設 I 是一個多項式理想, 且限定某一種多項式次序, 則 I 有唯一一組 reduced Groebner 基底 (不同的次序 reduced Groebner 基底可能不相同)。

(證明省略)

上例, 我們可以算出: $< f_3 = x^2, f_4 = xy, f_5 = y^2 - \frac{1}{2}x >$, 就是理想 $< f_1 = x^3 - 2xy, f_2 = x^2y - 2y^2 + x >$ 的一組 reduced Groebner 基底。

在數學軟體 Mathematica 當中, 便有一個指令可以算出一組多項式理想的 reduced Groebner基底, 它是以 lex order 爲次序。指令如下:

$$GroebnerBasis[\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] (\text{按“Shift-Enter”})$$

其中, $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ 爲一組多元多次多項式, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 爲這些多項式的未知數, 且 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ 。(要注意大、小寫與空格, 最後按“Shift-Enter”執行命令)。

以上例爲例, 若輸入

GroebnerBasis [{x^3 -2 x y, x^2 y-2 y^2+x, -x^2, -2 x y, -2 y^2+x}, {x,y}]

(按“Shift-Enter”)

它就會出現:

{y^3 , -x + 2y^2 }

(注意: 結果與上式結果不同, 是因爲所選用的 order 不同)

再如, 我們可以利用 Mathematica 求出 $F_1 : x^2 + y + z - 1 = 0$, $F_2 : x + y^2 + z - 1 = 0$, $F_3 : x + y + z^2 - 1 = 0$ 的 reduced Groebner 基底: 若輸入
GroebnerBasis[{x^2+y+z-1, x+y^2+z-1,x+y+z^2-1}, {x,y,z}] (按"Shift-Enter")
它就會出現:

{-z^6 -z^2 (-1+4z-4z^2), -2yz^2 -z^2 (-1+z^2), y-y^2 -z+z^2, 1-x-y-z^2 }

數學軟體 Maple 也有相類似的指令來求出 F_1, F_2, F_3 的 reduced Groebner 基底: 若輸入

F:=[x^2+y+z-1, x+y^2+z-1, x+y+z^2-1]; (按 enter)
X:=[x, y, z]; (按 enter)
with(grobner); (按 enter) – (只需執行一次)
grobner['qbasis'](F, X, 'plex'); (按 enter)

它就會出現:

[x+y+z^2 -1, y^2 +z-y-z^2 , -z^2 +2yz^2 +z^4 , 4z^3 -4z^4 +z^6 -z^2]

五. 求解

至此, 我們已經學會利用 Mathematica 和 Maple 去求任何一組多元多次多項式的 reduced Groebner 基底。這也就是說, 我們可以求出與任何一組多元多次方程組有相同的解的特殊方程組。現在, 我們就利用此方程組, 去找尋原方程組的解。

例如, 由 reduced Groebner 基底的演算法則, 我們知道,

$$\begin{aligned} G_1 &: -z^6 - z^2(-1+4z-4z^2) = 0 \\ G_2 &: -2yz^2 - z^2(-1+z^2) = 0 \\ G_3 &: y - y^2 - z + z^2 = 0 \\ G_4 &: 1 - x - y - z^2 = 0 \end{aligned}$$

的解和

$$\begin{aligned} F_1 &: x^2 + y + z - 1 = 0 \\ F_2 &: x + y^2 + z - 1 = 0 \\ F_3 &: x + y + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

相同, 而 G_1 只有一個未知數。它是一元 n 次方程式的問題。因此, 可將其因式分解:

$$G_1 : -z^6 - z^2(-1+4z-4z^2) = z^2(z-1)^2(z^2+2z-1)$$

而求出 $z=0,1,-1\pm\sqrt{2}$。
再代回 G_2 和 G_3 求出 y, 最後代回 G_4, 而得原方程組的解集合爲:

$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2}),\ (-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2})\}$$

五組答案。

現在問題來了。求出一組方程組相對應的 reduced Groebner 基底的方程組, 便可以知道原方程組的答案嗎? 它的解情形又如何呢?

我們知道三元一次方程式在空間中的幾何意義是一平面, 而三個三元一次方程組的解就是它們在幾何上的交點, 所以, 它的解可能是空集合 (無解, 或沒有交點), 一組解 (一個點, 即解是有限個), 或無限解 (即一直線, 或一個平面)。因此, 一個多元多次方程組它的解也可能出現無解, 有限組解, 或無限多組解的情形。

我們可以預想得到"全部"方程組的共同解一定是無解, 也就是由1所生成的理想, 即 $V(<1>)=\phi$ (因爲 $f\in k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $f=f\cdot 1\in<1>$, 所以 $<1>=k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ 爲"全部"的多項式)。但是反過來會對嗎? 這也就是說, 若一組方程組無解, 那它的 reduced Groebner 基底一定是1嗎? The Weak Nullstellensatz 定理剛好證明了這件事情:

定理: (The Weak Nullstellensatz 定理) 設 k 是一個代數封閉體 (例如, 複數 C)。$I\subset k[x_1,x_2,\ldots,x_n], I=<f_1,f_2,\ldots,f_m>$ 是一個理想, 則 $V(f_1,f_2,\ldots,f_m)=\phi$ (即方程組無解) 若且唯若 I 的 Reduced Groebner 基底是1, 即 $I=<1>$, 即 $I=k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ (證明省略)。

例如, 求方程組

$$\begin{aligned}&x+y+z+1=0\\&x+y+z+2=0\\&x^2+y^2+z^2-5=0 \text{ 的解}\end{aligned}$$

用 Mathematica 算出 reduced Groebner 基底:
GroebnerBasis[{x+y+z+1,x+y+z+2, x^2+y^2+z^2-5},{x,y,z}] (按 Shift-enter)
發現結果爲:
$\{1\}$, 所以這組方程組的解爲無解。(前二個方程組平行一定無解)。

那一個方程組只有有限組解的話, 又是如何呢? 下面定理告訴我們一些端倪:

定理: 設 k 是一個代數封閉體 (例如, 複數 C)。$I\subset k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $I=<f_1,f_2,\ldots,f_m>$ 是一個理想, 則 $V(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ 爲有限集合 (即方程組方爲有限解) 若且唯若 $\forall i, 1\le i\le m, \exists s_i\ge 0, x_i^{s_i}\in<LT(I)>$

(證明省略)

這個定理告訴我們, 當我們用 Mathematica 算出一組多項式的 reduced Groebner 基底時, 只要檢查一下每一個未知數的某次方 (含零次方) 是否都出現在基底的領導項上即可。(如此領導項中含次序最小未知數的方程式只有一個未知數, 便可求出這個未知數的解, 然後再求出次序倒數第二個未知數的解, 以此類推, 便可求出所有的解)。例如, 解

$$F_1: x^2+y+z-1=0$$
$$F_2: x+y^2+z-1=0$$
$$F_3: x+y+z^2-1=0$$

發現用 Mathematica 算出來的 reduced Groebner 基底爲

$$\{-z^6-z^2(-1+4z-4z^2),\ -2yz^2-z^2(-1+z^2),\ y-y^2-z+z^2,\ 1-x-y-z^2\}$$

發現領導項有 $-x, -y^2, -z^6$, 亦即每個未知數都出現, 所以只有有限組解。

至於有多少個解? 我們也可由下列推論來估計:

推論: 設 k 是一個代數封閉體 (例如, 複數 C)。$I\subset k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $I=<f_1,f_2,\ldots,f_m>$ 是一個理想, 若 $\forall i, 1\le i\le m, s_i\ge 0, x_i^{s_i}\in<LT(I)>$, 則 $V(I)$ 的個數 (方程組的解) 最多只有 $s_1s_2\cdots s_m$ 個。
(次序倒數第一個的未知數最多只有 s_m 個, 求出後再求倒數第二的未知數的解, 所以最多變成只有 $s_{m-1}s_m$ 個, 以此類推)

例如, 最先舉的例子 $F_1=0, F_2=0, F_3=0$ 的解只有五組, 少於 $1\times 2\times 6=12$ 組。

當然, 一個方程組若不是無解, 也不是有限組解, 那它一定是有無限多組解了。但無限組解可能有好幾種情形, 例如, 空間中三個平面的交集是無限多解的情形, 就可能是一直線或一平面, 因此, 這種情形較爲複雜 (它可能是兩平面的聯集, 也可能是一條曲線和一平面的聯集等等), 在此不加說明。有興趣的話, 以後再談。

最後, 其實科技發達的今天, Mathematica 和 Maple 內已寫好了一個求多元多次方程組的指令, 可以讓我們輕易的求出多元多次方程組的解。

我們在 Mathematica 下了下面的指令:
Solve [{x^2+y+z-1==0,x+y^2+z -1==0, x+y+z^2-1==0},{x,y,z}] (按 Shift-enter)
即可求出其解。

在 Maple 上打下指令:
solve ({x^2+y+z-1=0,x+y^ 2+z-1=0,x+y+z^2-1=0},{x,y,z}); (按 enter)

也可求出其解。

至於, 無解, 或者無限組解的情形, 我們也可以利用 Mathematica 的 Solve 或 Maple 的 solve 去觀察它的解。讀者有興趣, 可以把方程式稍加改變, 然後利用 Mathematica 的 Solve 或 Maple 的 solve 觀察其顯示的結果。

六. 結語

至此, 我們已了解代數上一個很重要的觀念—一個理想的 Groebner 基底—。由這個基底, 我們便可以了解一個方程組的意義, 也就是說它的解, 是無解, 有限多組解 (最多又有幾個, 甚至求出其解), 或是無限多解。

當然, 我們也了解如何利用數學軟體 Mathematica 的 GroebnerBasis 和 Maple 的 grobner[‘qbasis’] 算出一組多項式的 Groebner 基底, 以及利用 Mathematica 的 Solve 和 Maple 的 solve 求出一組多元多次方程組的解。

腦筋動得快的讀者, 或許會想到, Mathematica 的 Solve 和 Maple 的 solve 既然可以求多元多次方程組的解, 應該也可以求一元多次方程式的解。沒錯, 這兩個函數的確有這種功能, 讀者不妨試試。它們會儘可能的把一元多次方程組的解求出來。

參考文獻

1. 洪維恩, Mathematica 入門指引, 松崗電腦圖書資料股份有限公司, 1994。
2. Cox, D., Little, J., & O’Shea, D., Ideals, Varieties and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer-Verlag New York,Inc., 1992.
3. Wolfram Research Inc., Mathematica, the software of Wolfram Research Inc., 1994.
4. Waterloo Maple Inc., Maple V release 5, the software of Waterloo Maple Inc., 1997.

—本文作者任教於台北市立師院數學資訊教育學系—