從常識談運輸問題的求解過程

鄧進財

主旨: 運輸是供應鏈上的重要關鍵。製造完成的成品必須經過公路、鐵路、空運、海運或水運準時而且經濟地運送到目的地。本文介紹一個簡單的求解過程, 讓讀者用普通常識就能瞭解如何解決繁雜的運輸問題。

某藥劑公司擁有兩個製藥廠, 分散在甲、乙兩個不同地方。它也有三個批發倉庫散佈全國, 位於 A、B 及 C 三處。最近突然爆發流行性感冒散佈全國, 於是該藥劑公司趕緊製造預防疫苗, 在一週內甲廠能生產 400 盒的疫苗, 而乙廠能製造 600 盒疫苗。考量人口的分配及流行性感冒的風行模式, 這藥劑公司決定把這 1,000 盒的疫苗分別送到三個倉庫如下: 送 200 盒到 A 倉庫、500 盒到 B 倉庫及 300 盒到 C 倉庫。爲爭取時效, 輸送部門決定用空運來替代平時用貨車或火車的托運方法。詢問了數家快遞服務公司, 獲知每盒疫苗的運輸費用, 如表一所示。當然, 這藥劑公司的經理是期望整個運輸費用花費的越少越好。

表一、每盒疫苗的托運費用

從　到	A 倉庫	B 倉庫	C 倉庫
甲廠	$20	$30	$50
乙廠	$25	$40	$45

運輸問題

從上例, 我們了解典型的運輸問題包含有三個必要的因素: (1) 有 m 個產源, 每個產源的供應量已知, 設爲 S_i。(2) 有 n 個目的地, 每個目的地的需要量已知, 設爲 D_j。(3) 每單位的運輸費用從第 i 個產源到第 j 個目的地爲已知, 設爲 C_{ij}。而且整個問題的目標在於如何花費最少的運輸費用, 把供應量從各產源運送到各目的地以滿足需求量。

運輸問題可歸納爲線性規劃 (Linear Programming) 之一種。我們可應用單形法 (Simplex Method) 求解。可是, 使用單形法求解牽連到繁雜的代數變換, 很難令人理解其中奧妙。在此, 我們將應用普通常識來理解另一簡單的求解過程: (一)、使用最低費用法找出一組可行解, (二)、檢驗這可行解是否爲最佳解 (即是, 這個可行解不能加以改善); 如果是, 則我們找到最佳解, 最後 (三)、如果不是最佳解, 則須加以改善直到無法再改善爲止。

用最低費用法求初解

從表 1, 我們找到最低的運送費是從甲廠運送到 A 倉庫, 每單位爲 \$20。甲廠的供應量是 400 盒, 但 A 倉庫的需要量是 200 盒, 因此我們只能運送 200 盒從甲廠到 A 倉庫。於是甲廠尙剩 200 盒, 而 A 倉庫所需 200 盒已被滿足, 不用考慮 A 倉庫。接著, 從甲、乙兩廠到 B、C 兩倉庫的托運費用中獲知, 從甲廠運送到 B 倉庫的運費爲最低, 只\$30。因此, 我們再把甲廠剩餘的 200 盒全部運到 B 倉庫, 而 B 倉庫的需求量也因此減少成 300 盒。到此只有乙廠還有 600 盒等待分發。比較乙廠到 B 或 C 倉庫的費用, 得知從乙廠到 B 倉庫運費較低, 而 B 倉庫只需 300 盒, 因此我們從乙廠運 300 盒到 B 倉庫, 而剩下的 300 盒則送到 C 倉庫。結果總共的運輸費用是

$$20 \times 200 + 30 \times 200 + 40 \times 300 + 45 \times 300 = \$35,500.$$

這個初解, 如表 2 所示, 是否爲最佳解呢?

表二、用最低費用法求得初解

從　到	A 倉庫	B 倉庫	C 倉庫	供應量
甲廠	200 (\$20)	200 (\$30)	(\$50)	400 盒
乙廠	(\$25)	300 (\$40)	300 (\$45)	600 盒
需求量	200 盒	500 盒	300 盒	1000 盒

檢驗是否為最佳解

由於運送費用必須由工廠與倉庫共同支付, 我們就假設運出每盒, 甲 (或乙) 廠願意負擔 \$甲 (或 \$乙) 塊錢做運費。同樣地, A(或 B 或 C) 倉庫收到每盒願意支付 \$A (或 \$B 或 \$C)

塊錢運費。從表 2, 我們運送 200 盒從甲廠到 A 倉庫, 每盒爲 \$20, 由工廠甲與倉庫 A 共同支付。因此, $\$甲+\$A = \$20$。同樣地, 我們可獲知

$$\$甲 + \$\mathrm{A} = \$20、\qquad \$甲 + \$\mathrm{B} = \$30、$$
$$\$乙 + \$\mathrm{B} = \$40、\qquad \$乙 + \$\mathrm{C} = \$45.$$

爲方便起見, 假設甲廠不願付任何運費, 即 \$甲=\$0, 則 \$A=\$20、\$B=\$30、\$乙=\$10 及 \$C=\$35。接著, 我們來分析現行解是否可改善? 從表 2, 獲知只有甲 C 及 乙 A 可能改善現行解, 而

$$\$甲 + \$\mathrm{C} - \$50 = \$0 + \$35 - \$50 = \$ - 15.$$

即是甲廠和 C 倉庫共同所願意付的運費遠比實際運費 \$50 低, 當然就不會運送任何單位從甲廠到 C 倉庫。但是

$$\$乙 + \$A - \$25 = \$10 + \$20 - \$25 = \$5.$$

即是乙廠和 A 倉庫合起來所願意支付的運費比實際運費高出每盒 \$5。因此我們每運一盒從乙廠到 A 倉庫可省下 \$5。這表示現行解並不是最佳解。

注意: 如假設甲廠願意支付 \$1, 即 \$甲= \$1, 則 \$A= \$19、\$B= \$29、\$乙= \$11 及 \$C=\$34。將這些數值帶入上述的分析, 結果是一樣的。因此, 爲了容易求解, 大家都從\$甲=\$0 著手。

表三、迴路的供需變化

從　到	A 倉庫	B 倉庫
甲廠	200　\$20 −1	200　\$30 +1
乙廠	\$25 +1	300　\$40 −1

改善非最佳解

每運送一盒從乙廠到 A 倉庫可節省 \$5。但從乙廠每運送一盒到 A 倉庫, 必須減少一盒從乙廠到 B 倉庫, 增加一盒從甲廠到 B 倉庫及減少一盒從甲廠到 A 倉庫, 以平衡供需量的限制, 如表 3 所示。由於甲 A 與乙 B 不能減到負數, 因此乙 A 最大只能增加到 200 盒。也就是甲 A 與乙 B 兩數中最小的數目。結果, 重新安排運量, 獲得表 4 的解答。這改善後的解是否爲最佳解呢? 我們必須回到第二步驟來檢驗它。

表四、改善後的解

從 到	A 倉庫	B 倉庫	C 倉庫	供應量
甲廠	\$20	\$30 400 盒	\$50	400 盒
乙廠	\$25 200 盒	\$40 100 盒	\$45 300 盒	600 盒
需求量	200 盒	500 盒	300 盒	1000 盒

再檢驗是否為最佳解

同前, 從表 4 得知

$$\$甲+\$B=\$30、\qquad \$乙+\$A=\$25、$$
$$\$乙+\$B=\$40、\qquad \$乙+\$C=\$45.$$

再次爲計算方便起見, 假設甲廠不願支付任何運費, 即 \$甲=\$0, 則 \$B=\$30, \$乙=\$10, \$A=\$15 及 \$C=\$35。再考慮甲 A 及 甲 C 是否可改善現行解:

$$\$甲+\$A-\$20=\$0+\$15-\$20=\$-5,$$

而且

$$\$甲+\$C-\$50=\$0+\$35-\$50=\$-15.$$

因此甲 A 及 甲 C 不可能改善現行解, 所以表 4 所獲得的解爲最佳解, 而且最佳總運輸費用爲原總運輸費用扣掉運送 200 盒從乙廠到 A 倉庫, 每盒省下 \$5 獲得

$$\$35,500-\$5\times 200=\$34,500.$$

—本文作者爲美國紐澤西州立 William Paterson 大學教授,
曾任國立清華大學工業工程所客座教授—