分(碎) 形的思考

吳振奎

剛剛過去的世紀末, 數學的發展可謂突飛猛進, 一項項超前衛的概念被提出; 一個個劃時代的成果被掘拓; 這其中爲適應數學發展而創立的新學科, 幾乎影響著全部數學乃至人類生活。

模糊數學的誕生背景蘊含著計算機 (確切地講爲人工智能) 發展的需求, 但它的出現卻使得家電產品引發一場革命; 分形 (或碎形) 理論的創立原本是想從大千世界中奇形怪狀、撲朔迷離的紛雜事件中找出其隱蔽的內在規律, 如今其研究已遍及諸多科技領域。

加之諸如集合論、解析數論 (如費爾馬大定理的獲證, 當然這其中還動用了其他工具)、群論 (1980年經百餘位數學家近四十年努力完成了有限單群分類)、拓撲、$\cdots$ 等等諸學科的發展使得數學乃至整個科學世界面貌爲之一新。

20世紀前50年科學向縱深發展之際, 使得分支越來越多、越分越細; 而後半世紀, 則是學科互相滲透、彼此結合的交叉發展。

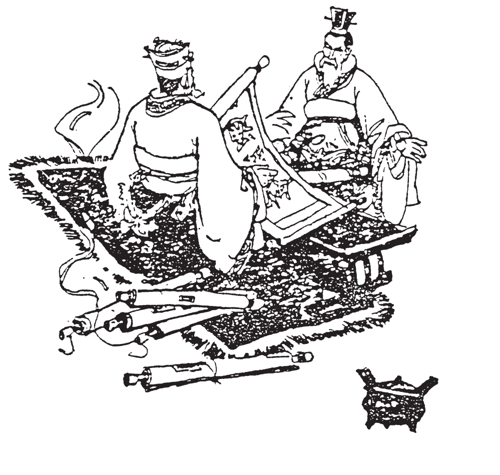
試想, 數學中某些貌似風馬牛的分支的誕生、發展過程有無內在淵源? 它又能給人們何種啓示? 我們還是先來看幾個事實 (當然這兒述及的僅是冰山一角, 但也只能管中窺豹)。

一、數的擴充

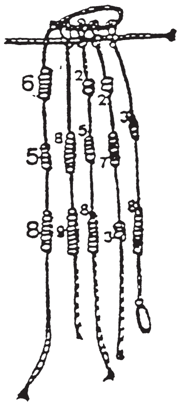
人們對於數的認識經歷了極爲漫長的歷程。

文字的產生之前的遠古時期, 數概念已經形成, 當時人們用實物 (石子、樹棍、竹片、貝殼等) 表示數, 此外還用繩結記數, 我國古籍「易經」(相傳最早始於周朝) 上就有結繩記數的記載 (“上古結繩而治, 後世聖人, 易之以書契)[1], 在國外亦然。

我國古代甲骨文中“數”字, 左邊是打結的繩, 右邊是一隻手, 表示古人用結繩記數。



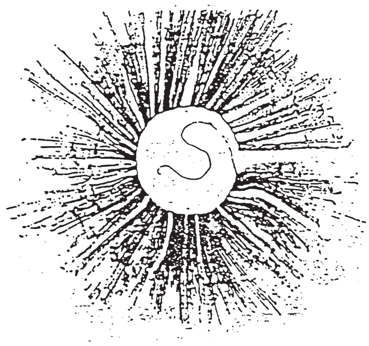
周公問數圖 (我國現存最早古算書「周髀算經」記載著周公與大夫討論勾股測量等問題)



現藏美國自然史博物館的印加記數基譜。

當然, 人們還用刻骨計數。

現藏布魯塞爾博物館的烏干達出土的刻有 (用來記數) 刻痕的骨。



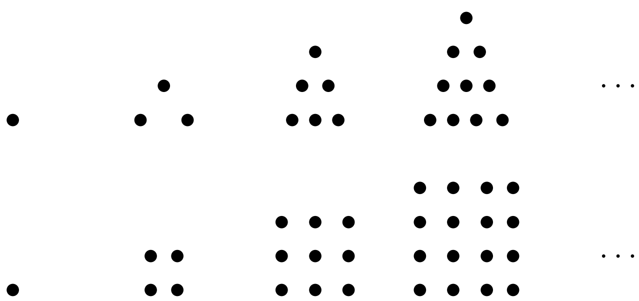
藏于巴黎人類博物館的秘魯印第安人繩法。

我國出土的一塊甲骨及其上的數字。

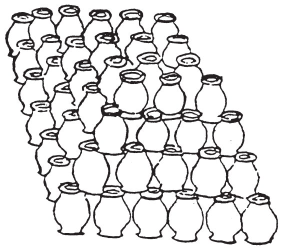
這些用數形結合去對抽象 “數” 的詮釋或描述的做法, 曾啓發畢達哥拉斯學派的學者們用 “形數” 概念去研究數的性質, 且至今仍影響著人類的思維 (比如代數性質的幾何解釋等正是這種思維的延伸)。

三角數

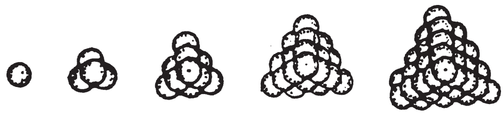
四角數



畢達哥拉斯學派研究的形數(多角數)



我國宋代沈括發明“隙積術”; 考慮了平頭楔形中有空隙的酒壇堆 垛問題等的計算, 其中正方垛計算給出相當於 $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式。



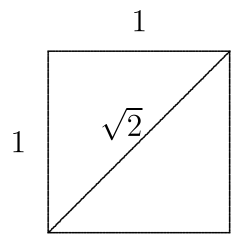
我國元代宋世傑精心分析了堆垛問題, 給出了底層每邊由 $1 \sim n$ 的 n 隻三角垛集合成的“撒星形”積疊的計算公式相當於 $1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+[1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

由於分配 (當一件或幾件物品多人去分時) 而引出了“分數”概念, 它的出現是數學史上令人振奮的一件大事。

古埃及人研究過單位分數 (分子是1的分數) 的諸多性質 (後人因之稱其爲埃及分數)。

分數在我國出現的年代不詳, 但在不少古籍如「管子」、「墨子」等書中均有記載。

無理數的發現曾付出過沉重的代價。古希臘畢達哥拉斯 (Pythagoras) 學派的學者們曾認爲: 數皆可表爲兩整數比的形式 (即分數或有理數)。但學派成員希伯斯 (Speusippus) 卻發現了邊長爲 1 的正方形對角線長無法用分數表達。他的發現不僅沒能得到學派的褒獎, 反而招致殺身之禍 (據傳他被拋入大海而葬身魚腹)。



這類無理數的發現加之隨後的負數概念引入, 人們完成了對於數的一個階段認識:

$$\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數(自然數、零、負整數)}\\ \text{分數(正、負分數)}\end{cases}\\ \text{無理數(無限不循環小數)}\end{cases}$$

如今人們對數的認識在不斷擴張[2]:

自然數 ⟶ 分數 ⟶ 無理數 ⟶ 實數 ⟶ 複數 ⟶ 多元數 ⟶

負數引入 (有理數)

整數

代數數

超越數

- - - - - → 向量 - - → 矩陣 - - → 張量 - - → ···

(它們不是數、但可像數一樣運算)

順便講一句, 這種擴張對於方冪概念有著同樣的歷程, 但在那兒步伐卻加快了。

二、連續統假設

集合論是用樸素的直觀或公理化方法研究集合性質的數學分支, 也是關於無窮集合和超窮數的數學理論。它的產生是現代數學的一個重要標誌。

由於數學分析的研究需要, 高斯 (C. F. Gauss)、傅立葉 (J. Fourier) 等大師們爲集合論產生做了大量鋪墊。

1870年德國數學家海涅 (H. E. Heine) 證明了:

若函數 $f(x)$ 爲連續, 且其三角級數展式一致收斂, 則展式唯一。

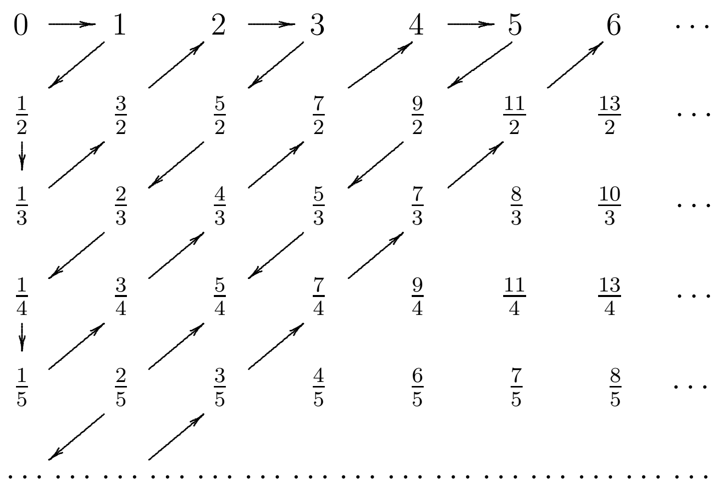
進而, 康托 (M. Cantor) 考慮了 $f(x)$ 有無窮多個間斷點時上述唯一性能否還成立?

正是這類無窮集合問題的研究促成集合論的誕生。而其誕生是以1874年康托在「數學雜誌」發表的 "關於一切代數實數的一個性質" 一文爲標誌的。

文中康托以 "一一對應" 的關係, 提出集合相等 (等價) 與否的概念, 且提出可數、集合基(勢) 等概念。

康托首先指出: *自然數集是可數 (列) 集。*

他又認爲, *有理數集也是可數集。*



非負有理數集可數

關於一一對應概念其實早在兩千多年前歐幾里得 (Euclid) 曾朦朧意識到偶數與自然數間的對應:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

但很快他便認爲荒唐而打消了念頭。

十七世紀意大利學者伽利略 (G. Galiei) 在其「關於新科學的對話」的書中也意識到自然數與其平方的一一對應關係:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

但他也睏惑了: 因爲完全平方數是自然數的一部分, 這種對應與 “整體大於部分” 的公理 (公設) 相抵!

而康托卻擯棄傳統, 從 “一一對應” 觀點出發, 發現了無窮集合的本質屬性:

它 (無窮集合) 能與其眞子集一一對應。

康托進而考慮: 實數集合的可數性問題, 最終他證明了:

實數集合不可數。

此外, 康托還研究了代數數與超越數個數問題。

自1844年柳維爾 (J. Liouville) 證明了:

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots+\frac{a_n}{10^{n!}}+\cdots$$

(其中 $0 \le a_i \le 9$ 且爲正整數, $i=1,2,3,\ldots$) 是超越數 (不是有理系數代數方程根的實數, 如 π、e 等) 以後, 說明了超越數存在的事實。

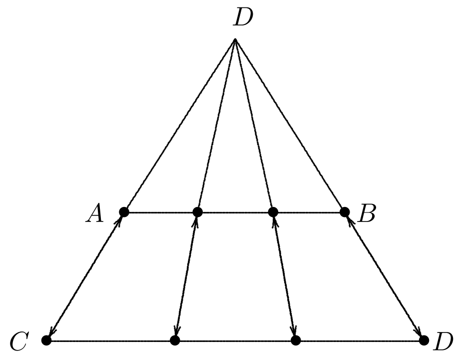
當康托證明了 “代數數是可數的” 結論之後, 他又證得 (利用可數集與無限集的並集的勢和無限集的勢相等的事實):

超越數比代數數個數多。

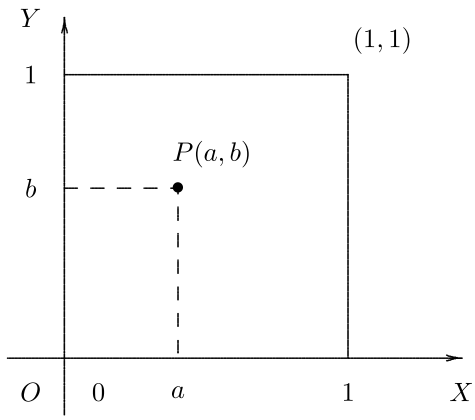
1877年康托寫給戴德金 (R. Dedekind) 的信中提出:

n 維空間的點集同實直線上的點集一一對應 (等價)。

這個結論可參照下面諸圖去思索:

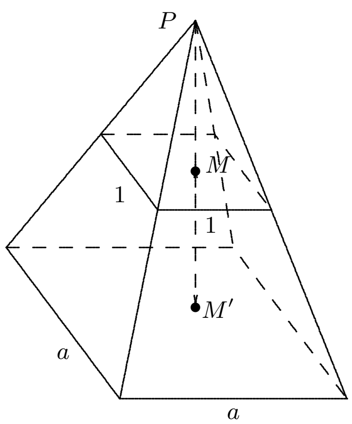


從一一對應觀點, 線段 AB 和 CD 上的點一樣多。

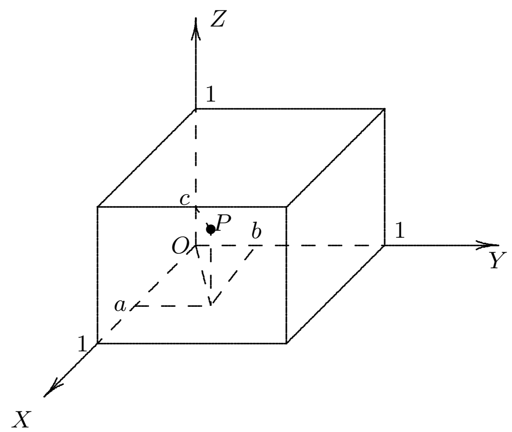


將單位正方形內任一點 $P(a,b)$ 的坐標 a, b 分別寫成無限小數 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$ 和 $b=0.b_1b_2b_3\cdots$, 則 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ 對應 $[0,1]$ 上的一點, 這樣單位正方形內點的個數與 $[0,1]$ 線段上點的個數一樣多。

(注意到區間 $[a,b]$ 上的任何實數皆可寫成無限小數形式, 比如 $0.5=0.49999\cdots$ 等, 這兒規定取不足值。當然亦可取 $0.5=0.5000\cdots$, 只要事先約定好, 一一對應關係是可行的)。



單位正方形與邊長爲 a 的 正方形上的點一樣多 (一一對應)



將單位正方體內任一點 $P(a,b,c)$ 三坐標各寫成無限小數形式, 仿前可與 $[0,1]$ 上的點 $0.a_1b_2c_1a_2b_2c_2\ldots$ 對應, 故它們等勢。

該結論的詳細證明刊於1891年康托的論文「集合論的一個根本問題」中。

1879 ~ 1884 五年間康托發表了 “關於無窮的線性點集論” 等六篇論文, 提出超窮數 (這是無窮的又一種度量) 概念:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

($\aleph_0$ 是自然數的個數, $\aleph_1$ 是大於 $\aleph_0$ 的最小基數, $\aleph_2$ 是大於 $\aleph_1$ 的最小基數等等)。

康托在1891年的前述論文中又引入冪集 (集合所有子集構成的集合) 概念, 且指出冪集的基數大於原集合的基數, 同時還構造出基數一個比一個大的無窮 (無窮沒有最大的基數)。

康托又指出: 若實數的基數爲 c, 而定義在 $[0,1]$ 上實函數集的基數爲 f, 則 $f > c$。這樣, 若自然數全體的基數爲 $\aleph_0$, 則其冪集的基數爲 $2^{\aleph_0} = c$, 且 $2^c = f$。

康托做出如下假設: $c = \aleph_1$ (即可數基數 $\aleph_0$ 後面緊接著便是實數基數 c, 換這之 $\aleph_0$ 與 c 之間無其他集合的基數存在)。這便是著名的連續統假設 (簡記爲 CH)。

集　　合	基　　數
$1, 2, 3, \ldots$ 或 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	$\aleph_0$ (可數, 即整數個數)
— 或 或 或 $\cdots$	$\aleph_1$ (線、面、體上幾何點個數)
— $\cdots$	$\aleph_2$ (所有幾何曲線或定義在某區間上的全部函數的基數或勢)

1900年, CH 被希爾伯特 (D. Hilbert) 收錄在他的 “23 個數學問題” 中的第一個。

人們經過數十年的努力, 直至1963年 CH 才由美國數學家科恩 (P. Cohen) 證明它不能用世所公認的策墨略 (E. F. F. Zermelo) 公理體系 (ZF) 證明其對錯 — 這一點早在1947年哥德爾 (K. Gödel) 就曾指出過。

正像歐幾里得的幾何體系中由第五公設而引發的非歐幾何的誕生後, 在認可的相容性前提下, 該公設是獨立 (不可證明) 的。即便如此, 當代集合論的學者們仍然認爲: 連續統假設並沒有解決, 且數學家們對它興致依然。試想當初人們對康托推出集合論時的非難情景, 一切皆隨時間的推移和數學的進展而煙消雲散。

希爾伯特認爲集合論的產生是 “數學思想最驚人的產物, 是純粹理性範疇中人類活動的最美表現之一。” 哲人羅素 (B. A. W. Russell) 也稱康托的工作 “可能是這個時代所能誇耀的最宏大工作”。

三、模糊數學的產生

世界上的事物和現象據其是否有清晰明確的類屬特性, 而可劃分爲 “清晰事物” 與 “模糊事物” 兩種。

對於那些依據確定標準將它們劃分爲彼此界限分明的類別的事物稱爲清晰事物, 如正、負, 盈、虧等。

對於人們目前尚無法找到精確分類標準, 對某一事物類屬很難做出明確判斷的事物稱爲模糊事物, 如高個子、胖子等。

事物的模糊性是現實世界普遍存在的一種特性, 也是人們用數學觀點將現實世界中的各種現象 (事物) 區分後得到的三大類別 (確定現象、模糊現象、隨機現象) 之一。

模糊數學是用精確的數學方法去處理模糊現象 (或事物) 的一門學科。它產生的背景是由研究電子計算機的某些性能與人能力比較而引起的。

提起電子計算機, 你首先會想到它運算速度快、處理問題精細。電子計算機運算速度每秒可達數千億次, 它可以在不長的時間算得人們用手花成千上萬年也算不到的結果 (比如到1999年爲止, 人們已將圓周率算至小數點後2061億位以上; 而人的手算紀錄只是小數點後707位, 且後來經驗算發現528位以後有誤; 又如電子計算機用1200小時進行60億個邏輯判斷證得 “四色定理”, 人們要用手算是無法辦到的), 可它有時卻很難勝任普通人所做的最普通的事 (比如騎自行車穿過繁華的馬路)。

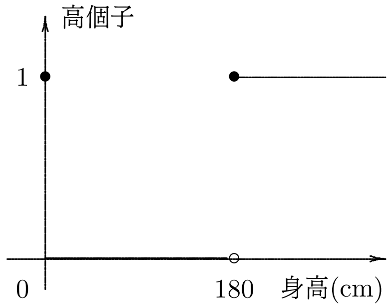
電子計算機有著驚人的 “記憶力” (通過磁蕊可以儲存上千兆位的信息量)、“判斷力”(通過快速邏輯運算), 它可以和世界上頂級象棋大師對奕而不分仲伯, 但玩 “捉迷藏” 時卻不一定能逮住一個孩子。

電子計算機有超乎尋常的控制力 (通過邏輯電路) 和圖象識別能力, 它可以在流水線上以極快的速度、準確地將小得幾乎用眼看不清的元器件焊到電路板上某個極難分辨的預定位置, 它也可以從高空中區分地面上的某些小目標, 但它卻很難區分一個人是中國人還是外國人 (而這點連幼兒園的孩子也能做到)。

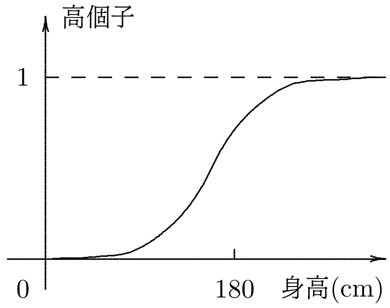
原因何在? 計算機處理精確事物可謂得心應手, 但它處理某些模糊現象則有時顯得 “無能爲力”。

說得具體點, 由於電子計算機使用的運算邏輯是傳統的二值邏輯: 要麼 “是” (值對應1)、要麼 “非” (值對應0), 模棱兩可的判斷它不會。

而現實世界中的模糊事物, 比如判斷某人是否是 “高個子”, 讓計算機來做就要先給其訂個標準, 比如身高在180cm 以上者稱爲 “高個”, 那麼一個身高爲179.9cm 的人, 計算機也只能說他 “不是高個”。這種判斷顯然過於武斷、死板。其實人在做這件事情時不然, 他們會在不同的地點、不同的場合, 對此事做出機動靈活的判斷 (顯然不是簡單地使用1和0即是與非來回答)。



計算機判斷高個子



人判斷高個子程度

1965年美國加州伯克萊分校的計算機教授查德 (L. A. Zaden) 發表了 “模糊集合” 的文章, 文中引入 “隸屬度” 來描述處於中介過渡的事物對差異一面所具有的傾向程度, 從亦此亦彼中區分出非此非彼的信息, 是精確性對模糊性的一種逼近。它成功地用數學方法刻劃了模糊現象, 即由事物的中介過渡性所引起的概念外延的不分明性及識別判斷的不確定性。這也是在特定歷史條件下對特定概念的反復認識的昇華與結晶, 模糊數學從此誕生。

與傳統的集合論相較: 在邏輯判斷中, 同一律、矛盾律、排中律是傳統集合論必須遵循的定律, 且把排中律破壞稱爲二律背反, 而模糊數學則是將其納入以區別傳統的二值 (僅取0或1) 的邏輯。

說得通俗點: 模糊數學是將邏輯值由0或1二值轉向 $[0,1]$ 區間、由取值離散轉向連續取值的一種變革或創新, 比如身高是否爲 “高個” 的 “資格” 或 “隸屬度” 表如:

身　　　　高	180cm 以上	175cm	170cm	165cm	⋯
“高個子”的隸屬度	1	0.9	0.7	0.4	⋯

這樣人們在讓計算機判斷某些模糊事物 (概念) 時, 就不會出現179.9cm 身高的人仍不能算是 “高個子” 的武斷了, 機器可以說: 他有0.9以上的資格 (隸屬度) 稱爲 “高個子”。

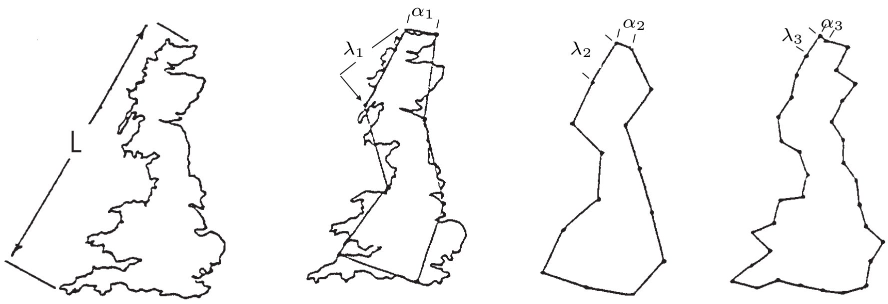
儘管人們曾對模糊數學的出現產生過相左的意見, 但其在諸多領域 (如家電產品開發, 決策分析研究等) 的成功應用已是個不爭的事實, 它也使計算機變得更 “聰明” (特別是在人工智能研究上)。

四、分形 (碎形)

數學中重大問題的提出與解決, 常常是數學發展的重要里程碑。分 (碎) 形的發現亦是如此。

我們生活的世界俗稱三維空間, 數學上平面稱爲二維空間, 直線被叫做一維 (空間), 這樣線段和正方形常被稱作一維、二維圖形 (維數皆爲整數)。

但是, 1967年美籍法裔數學家曼德布魯特 (B. B. Mandelbrot) 曾對 “英國海岸線到底有多長” 進行思考時發現一個怪異現象, 這個長度是不確定的。



測量時若不斷提高精度 (縮短標尺, 即圖中折線 λ_k) 時, 所得海岸線長就會不斷增加, 且隨測量標尺的無限縮短海岸線長無限地增長。隨著過程的延續最終結論是: 海岸線長是一個無窮大量。

這多少有些出乎人們的預料, 但是慧眼識金的數學家們卻認爲是一次 “發現” 的機會, 儘管數學家們對於數學中的某些 “病態怪異” 早已熟視無睹 (有些甚至是他們親手製造出來的): 科赫 (H. V. Koch) 曲線、謝爾品斯基 (W. Sierpinski) 墊和海綿、康托粉塵、皮亞諾 (G. Peano) 曲線、$\cdots$ [4] [11]~[13]。但所有這一切卻都被曼德布魯特識穿了。

1975年他在「分形圖: 形狀、機遇和維數」一文中提出了分數維數概念 (分形)。這也是人們對於空間維數認識上的一種創新 (由整數拓廣到分數, 當然, 德國數學家豪斯道夫 (F. Hausdorff) 早在1919年從測量的角度引進過 Hausdorff 維數, 它亦可爲分數。)。

人們知道: 當線段 (邊或棱) 增加1倍時, 線段長、正方形面積、立方體體積分別擴大到原來的2、4、8即 2^1 、2^2 、2^3 倍, 這兒的指數1、2、3恰好代表該幾何圖形的維數。

曼德布魯特仿上令 l 爲圖形的獨立方向上擴大的倍數, N 爲圖形 (在某種度量下) 擴大的倍數, 則圖形的維數 (這兒指相似維數或 Hausdorff 維數) 定義爲

$$D = \frac{\ln N}{\ln l}.$$

由此產生了分數維數概念, 同時很圓滿地解釋了上述諸怪異圖形的病因 (它們均不是整數維數圖形)。

圖形	科赫曲線	謝爾品斯基墊	謝爾品斯基海綿	康托粉塵	$\cdots$
維數	1.26	1.8928	2.7268	0.6309	$\cdots$

某些圖形的 Hausdorff 或相似維數表

五、微積分概念的推廣

微積分的發明是數學史上的一件大事, 它也是與牛頓 (I. Newton) 與萊布尼茲 (G. W. Leibniz) 的名字緊密相連的。牛頓從質點的運動軌跡入手, 先後在「運用無窮多項的分析學」和「流數法和無窮級數」中, 提出微積分思想, 後來將其發展且寫入他的「自然哲學的數學原理」一書中。

萊布尼茲對微積分的研究較牛頓稍晚些, 但他在其早期著述「論組合的藝術」中, 已有微積分思想萌芽。他是從幾何研究入手的, 得到了兩函數和、積、商的微分法則, 且將它們用於函數圖形研究 (求切線、拐點、極值等), 他同時還給出了某些函數的積分法則 (如今微積分符號體系多沿用萊布尼茲的發明)。

隨著微積分研究的深入, 人們已將它不斷地推廣: 一種是圍繞著函數本身可積性的探討而引發的 (比如 Stieltjes 積分、Lebesgue 積分等的出現); 一種是在微積分重 (階) 數上 (比如高階導數、偏導數; 多重積分; 此外還有方向導數、曲線積分、曲面積分等等)。

人們在從整數階 (或重) 上推廣微積分概念的同時, 有人比如柳維爾 (J. Liouville) 等又將它們推廣到了分數階 (或重) 的情形。

1832年柳維爾給出了分數階積分。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積, 設 $I_1^a f(x)$ 爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的積分, 而 $I_\alpha^a f(x)$ 爲 $I_{\alpha-1}^a f(x)$ 在 $[a,x]$ 上積分 $(\alpha=2,3,4,\ldots)$, 則

$$I_\alpha^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad a\le x\le b, \tag{$*$}$$

其中 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ 是 Γ 函數。

上面 $(*)$ 式定義了以 a 爲始點的 α 階分數階積分。

對於複數參數z, 算子 I_z^a 曾被黎曼 (B. Riemann) 於1847年研究過, 該算子是線性的且有半群性質:

$$I_\alpha^a[I_\beta^a f(x)] = I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

分數階積分的逆運算稱爲分數階微分。

若 $I_\alpha f = F$, 則 f 爲 F 的 α 階分數階導數。

馬爾采特 (Marchaut) 還給出了 $c<\alpha<1$ 時的公式:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \Big\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\Big\}dt.$$

柳維爾也給出:

$$I_\alpha^{-\infty} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

此外, 人們還將 α 推廣到實數的情形。

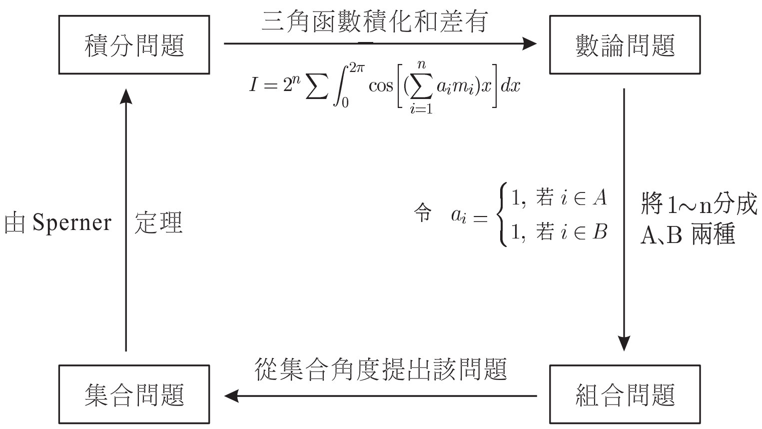
六、思考

德國著名數學家希爾伯特說過 “數學科學是一個不可分割的有機整體, 它的生命力在於各個部分之間的聯繫”[8]。

文 [5] 曾指出下面四個貌似各異的問題的內在聯繫:

1. (微積分問題) 求 $I=\int_0^{2\pi}\cos(m_1x)\cos(m_2x)\cdots\cos(m_nx)dx$ 的極大值, 這裡 $m_i\in Z^+$ $(i=1,2,\ldots,n)$.
2. (數論問題) 若 $m_i\in R^+$, 且 $a_i=\pm1$ $(1\le i\le n)$, 討論方程 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_im_i=0$ 有解 $\{a_i\}$ 的最大個數。
3. (組合問題) 把一個含有 n 種質量的質點組劃分為彼此平衡的兩個質點組, 共有多少種分法?
4. (集合論問題) 若集 S 有 n 個元素, $\mathcal{F}$ 是具有下述性質的子集族: (i) 對所有的 $A\in\mathcal{F}$, 其餘集 $A^c\in\mathcal{F}$; (ii) 對所有的 A 、$B\in\mathcal{F}$, 有 $A\not\subset B$。求 $\mathcal{F}$ 中元素最大個數 (最大含量)。

它們之間的聯繫簡單的可表為 (箭線表示化為之意):



再如英國皇家學會會員, 劍橋大學三一學院院長 (菲爾茲獎得主) 阿蒂亞 (M. F. Atiyah) 在1976年11月19日就任倫敦數學會主席的題為 “數學的統一性” 演講中, 舉了三個 “互不相干” 的例子[7]:

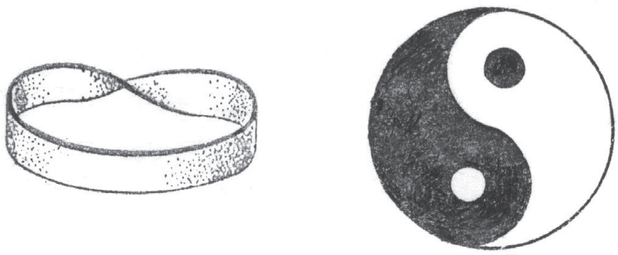
高斯 (C. F. Gauss) 整數環 $Z[\sqrt{-5}]$ (即由元素 $a+b\sqrt{-5}$ 構成的環, a, b 是整數) 中因子分解問題 (代數問題);

莫比烏斯 (A. F. Möbius) 帶的性質 (幾何問題);

由核函數 $a(x,y)$ 確定線性微分–積分方程:

$$f'(x)+\int a(x,y)f(y)dy=0$$

的性質 (分析問題)。



有人認爲中國「易經」中八卦魚形是莫比烏斯帶在平面上的投影。

接著他揭示了這三個問題間的深刻內在聯繫:

莫比烏斯帶的存在和多項式環 $R[x,1-x]$ 的因子分解不唯一相聯繫;

若核函數滿足 $a(x,y)=-a(y,x)$, 則上述微分–積分方程相當於斜伴隨算子 A, 而 A 的奇偶性恰好與莫比烏斯帶的拓樸性質相一致。

筆者也曾在文 [9] 中指出楊輝三角、斐波那契 (Fibonacci) 數列 $(f_0=f_1=1, f_{n+1}=f_n+f_{n-1},\ n\geq 3)$ 與黃金數 $0.618\ldots$ 間的聯繫:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\\
&&&&&&&\cdots\cdots&&&&&&&
\end{array}
\quad\overset{\text{改寫}}{\Longrightarrow}\quad
\begin{array}{c|cccccccc}
& 1 &&&&&&&\\
f_n & 1 & 1 &&&&&&\\
1 & 1 & 2 & 1 &&&&&\\
1 & 1 & 3 & 3 & 1 &&&&\\
2 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 &&&\\
3 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &&\\
5 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 &\\
8 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1\\
13 & \cdots &&&&&&&\\
21 &&&&&&&&\\
\vdots &&&&&&&&
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=0.618\ldots$$

楊輝三角

楊輝三角改寫後, 諸斜線“/”上各數之和分別爲 $\{f_n\}$ 諸項

斐波那契數列中相鄰兩項比的極限是 $0.618\ldots$

這種例子還可以再舉很多, 這兒不囉嗦了。

我們還是回到前面所考察的幾個問題, 列張表比較一下可見:

問　　題	內　　　　　容
數的擴充	$1,2,3,\cdots \to$ 整數 $\to$ 分數 $\to \cdots$
連續統假設	$\aleph_0$ 與 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 間無其他集合基數
模糊數學	引入隸屬度將二值邏輯拓展到 $[0,1]$ 上取值
分 (碎) 形	圖形維數由 $1,2,3,\ldots$ 拓展到正實數
微積分推廣	將階 (或重數) 由 $1,2,3,\ldots$ 拓展到正實數

上述諸多問題 (分支) 看上去似無關係, 但你若仔細品味一下便會發現: 它們產生的背景竟有著驚人的相似! 說穿了, 都是試圖將概念或取值從整數拓展到分數、小數、實數、$\cdots$, 將離散推向連續。若統一是數學的內在制約, 而推廣則是數學研究的永恆主題。

因此我們有理由認爲: 數學的許多概念也許可循上面的路徑去延拓, 比如我們可以預示 1.5 階微分方程、$\sqrt{3}$ 階積分方程、$\cdots$ 會出現, 儘管目前人們尚無願望與需要, 但我們深信這或許是遲早的事情。

數學家認爲: 存在於實驗現象與數學結構之間的密切聯繫, 正被近代物理的發現, 以一種全然出乎人們意料的方式完全加以證實。

不是嗎?

參考文獻

1. 梁宗巨, 世界數學通史 (上), 遼寧教育出版社, 1993。
2. 吳振奎, 數學中的推廣、反例及不可能問題, 遼寧教育出版社, 1986。(九章出版社即將再版)
3. 李學數, 數學和數學家的故事, 新華出版社, 1999。
4. 吳振奎, 漫話分形, 中等數學, 1998(3)。
5. 劉德銘, 數學與未來, 湖南教育出版社, 1987。
6. 張奠宙, 數學的明天, 廣西教育出版社, 2000。
7. M. F. Atiyah (胡作玄譯), 數學的統一性, 數學譯林, 1980(1)。
8. J. N. Kapur (王慶人譯), 數學家談數學本質, 北京大學出版社, 1989。
9. 吳振奎, 巧合? 聯繫? 統一? 數理化信息, 1986(2)。
10. 胡作玄、鄧明立, 20世紀數學思想, 山東教育出版社, 1999。
11. Michael Batty (石厚高譯), 非整數維的幾何—碎形, 數學傳播, 15(3), 1991。
12. 林琦焜, 數, 十進位與 Cantor 集, 數學傳播, 24(4), 2000。
13. 林琦焜, 從 Cantor 集到碎形, 數學傳播, 25(1), 2001。
14. 胡作玄, 引起紛爭的金蘋果, 哲人科學家—康托爾, 業強出版社, 1997。

—本文作者任教於中國天津商學院—