窺視大千於數瞥之間
—— 淺談部份因子實驗設計

斯　人

科學研究是窺探大自然奧秘的工作, 大自然的現象千變萬化, 各種現象之間的關係錯綜複雜, 在這探究大千世界奧秘的過程裡, 經常要做實驗, 如何設計實驗, 使得實驗的次數不用太多, 就能得到想要瞭解的對象的全貌, 這就是「實驗設計」的目標。以「管」即可窺得「全豹」, 於數瞥之間得見大千奧秘, 這就是「實驗設計」之「部份因子設計」(Fractional Factorial Design) 的最高境界。要讓一般大衆對「部份因子實驗設計」的基本精神有一大略的認識, 我想從數學家 Leonhard Euler 細說從頭。雖然 Euler 對於「實驗設計」這學科是無心插柳, 不過, 要談「部份因子實驗設計」我選擇從他說起。

Leonhard Euler (1707-1783), 18世紀最偉大的數學家之一, 1707年生於瑞士的 Basel。他是數學史上最多產的數學家, 他所遺留下來的七十三本經典巨册「歐勒全集」, 無論是質與量都是難以超越的, 他對數學的興趣十分廣泛, 從純粹的理論探討, 到實際的應用問題無所不包。甚至在他雙目失明的狀態下, 仍在光學的研究上取得很高的成果, 我們很難想像一個看不見東西的人, 竟然可以向世人解釋光的奧秘。

他不只研究工作做得好, 他也深深地關心教學的工作, 對於這一點, 詩人 Condorcet 用一句話來稱讚他:

> 他樂於教導他的學生, 使他們感到驚奇, 以獲得一絲絲的滿足感。

這是很多作理論的人都具有的特質, 他要讓別人能領會到他的理論的美而驚奇讚嘆—不只是理解, 更要領會其美。

Euler 在1783年9月7日去世, 他的去世有點突然, 據說, 他是在陪兒孫們玩耍, 和討論有關天王星的最新理論情況下, 度過他的最後一天的。對於 Euler 的去世 Condorcet 說:

> 他雖停止了計算, 卻獲得了永生。

Euler 死後葬於 St. Petersburg, 在那裡他曾度過快樂時光。

首先我要大家欣賞欣賞 Euler 發現的一個美妙的式子。數學家 Morris Kline 說:

> 一個精彩巧妙的證明, 精神上近乎一首詩。

Euler 的這個式子, 無論是它的證明或是它的形式, 眞的美得像一首詩:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

關於 Euler 的生平與這個式子的證明, 參見 Dunham (1990)。

Euler 在他生命晚年, 關於「魔方陣」寫過一篇報告。今天這些方陣被稱爲「拉丁方陣」(Latin Square), 因爲當年 Euler 是用拉丁字母來標示這些方陣的。請看下面的例子:

在這個 4×4 的方陣中, 拉丁字母 a、b、c、d 被巧妙地安排在格子裡, 這樣的安排, 在每一行, 每一列中 a、b、c、d 剛剛好, 不多不少的出現一次。一般而言, 在一個 $n\times n$ 的方陣裡, 巧妙地安排上 n 個符號, 使得每一行, 每一列中, 每一個符號都剛好出現一次, 這樣的方陣稱爲 n 階「拉丁方陣」。再看另一個4階的例子, 這次我們以希臘字母 α β γ δ 標示:

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

要是把以上兩個「拉丁方陣」重疊在一起, 我們得到底下的方陣:

$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	$d\delta$
$c\delta$	$d\gamma$	$a\beta$	$b\alpha$
$d\beta$	$c\alpha$	$b\delta$	$a\gamma$
$b\gamma$	$a\delta$	$d\alpha$	$c\beta$

在這個方陣裡, 我們看到每個拉丁字母跟每個希臘字母, 也剛好不多不少相遇一次。當兩個「拉丁方陣」重疊在一起時, 具有這樣的性質, 我們稱這兩個「拉丁方陣」相互正交 (orthogonal)。而這個重疊而得的方陣稱爲「希臘 – 拉丁方陣」(Graeco-Latin Square, 以後簡稱 G-L Sq.)。這個方陣給十八世紀一個流行的遊戲提供一個解: 從一副牌裡抽出所有的 A、K、Q、J, 把這十六張牌安排在 4×4 的方陣裡, 使得每一行, 每一列都出現 A、K、Q、J, 同時也出現四種花色 Spade、Heart、Diamond、Club。只要將拉丁字母跟希臘字母做如下表的對應, 再將一個「希臘 – 拉丁方陣」, 依照這樣的對應改成牌, 就得到一個解:

a	b	c	d
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$
α	β	γ	δ
Ace	King	Queen	Jack

$\heartsuit A$	$\spadesuit K$	$\clubsuit Q$	$\diamondsuit J$
$\clubsuit J$	$\diamondsuit Q$	$\heartsuit K$	$\spadesuit A$
$\diamondsuit K$	$\diamondsuit A$	$\spadesuit J$	$\heartsuit Q$
$\spadesuit Q$	$\heartsuit J$	$\diamondsuit A$	$\clubsuit K$

利用這個方陣, 我們也可以造出一個「魔方陣」。將1到16的整數安排在 4×4 的方陣裡, 使得每一行, 每一列的和都相等 (甚至對角線也一樣)。我們可以利用「希臘 – 拉丁方陣」來造

「魔方陣」: 將1到16的整數用四進位的方法來表示。第一位用 α、β、γ、δ 分別代表 1、2、3、4。第二位用 a、b、c、d 分別代表 $0\times 4=0$, $1\times 4=4$, $2\times 4=8$, $3\times 4=12$; 如下表:

$$\begin{array}{ll} a\leftrightarrow 0 & \alpha\leftrightarrow 1\\ b\leftrightarrow 4 & \beta\leftrightarrow 2\\ c\leftrightarrow 8 & \gamma\leftrightarrow 3\\ d\leftrightarrow 12 & \delta\leftrightarrow 4 \end{array}$$

例如: $b\gamma=4+3=7$, $d\beta=12+2=14$。所有的對應如下:

$$\begin{array}{cccc} a\alpha=1, & a\beta=2, & a\gamma=3, & a\delta=4\\ b\alpha=5, & b\beta=6, & b\gamma=7, & b\delta=8\\ c\alpha=9, & c\beta=10, & c\gamma=11, & c\delta=12\\ d\alpha=13, & d\beta=14, & d\gamma=15, & d\delta=16 \end{array}$$

因此假若我們將一個「希臘 – 拉丁方陣」, 依照上表的對應方式, 把它改寫成數字, 則因爲每一行, 每一列 a、b、c、d 與 α、β、γ、δ 都剛剛好出現一次, 所以每一行每一列的數的和必然是

$$\begin{array}{rrcrcl} & a= & 0 & + & \alpha=1 & \\ & b= & 4 & + & \beta=2 & \\ & c= & 8 & + & \gamma=3 & \\ + & d= & 12 & + & \delta=4 & \\ \hline & & 24 & + & 10 & =\ 34 \end{array}$$

這樣我們就得到一個「魔方陣」:

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

由此我們還可以造出更多的「魔方陣」, 只要將 a、b、c、d 或 α、β、γ、δ 重新排列。例如用下面這個重排:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

將原來的「希臘 – 拉丁方陣」, 遇到 α 的改成 β, β 改成 α, γ 改成 δ, δ 改成 γ, 則得到另一個具有相同性質的方陣。用這種方法我們就可以得到很多很多的魔方陣。

現在問題來了, G-L Sq. 一定存在嗎? 讓我們從最簡單的情況看起, 2×2 階的 G-L Sq. 存在嗎? 首先2 階的 Latin Square 只有2個:

1	2
2	1

2	1
1	2

$\longrightarrow$

12	21
21	12

而這兩個疊起來並不是 G-L Sq., 因爲11與22這種組合並未出現。所以很容易地, 我們就證明了2 階的 G-L Sq. 不存在。3, 4, 5 階的 G-L Sq. Euler 都找到了:

1 1	2 2	3 3
3 2	1 3	2 1
2 3	3 1	1 2

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5
4 3	5 4	1 5	2 1	3 2
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
5 2	1 3	2 4	3 5	4 1
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3

事實上 Euler 在他的報告裡證明了:

當 n 是奇數 $(n = 2k + 1)$ 或可以被4整除 $(n = 4k)$ 的數時, n 階的 G-L Sq. 都存在。

可是六階的呢? 或者更一般的說, 當 $n = 4k + 2$, 如 $6, 10, 14, 18 \ldots$ 時, n 階的 G-L Sq. 存在嗎? Euler 經過了千百次的嘗試失敗後, 他在他的報告中寫道:

> *I don't hesitate to conclude that it is impossible to produce any complete square of* 36 *cells, and the same possibility extends to the cases of* $n = 10$, 14 *and in general to all unevenly even numbers.*

簡單地說就是:

當 $n = 4k + 2$ 時, n 階的「希臘 — 拉丁方陣」不存在!

這就是有名的 Euler's Conjecture (歐勒臆測), 這個 Conjecture 對不對呢? Euler 只是說:「I don't hesitate to conclude that ...」, 他並沒有提出證明, 不能說沒找到所以就不存在。

這個問題困惑數學家一個半世紀之久, 它的發展回顧起來有點曲折, 最後的結果出人意表, 這是數學史上很有趣的一個例子。第一個進展發生在1901年, 離1783年已經一百多年, 有一位

法國數學家 G. Tarry, 他用窮舉法 (如同2階情況), 把所有6階的 Latin Sq. 完全列出來。然後兩個兩個去配, 試遍所有的可能情況, 結果配不出6階的 G-L Sq., 所以他證明了 Euler's Conjecture 在 $n=6$ 的情況是對的, 在當時一般都相信 Euler's Conjecture 可能是對的。

你一定想到, 我們可以故技重施於 $n=10(4\times2+2)$ 的情況。到了1950年代電腦已經出現了, 這個工作可以用電腦來驗證。沒錯, 你想到了, 有人也想到了, 在 U.C.L.A 的 Marshall Hall 他就曾試圖用電腦快速計算的能力來找10階的 G-L Sq .。他失敗了, 他在「Vol. IV of Surveys in Applied Mathematics」如此報告:

> 在 U.C.L.A 的電腦無法造出一對正交的 10×10 拉丁方陣。但即使讓這高速的電腦再花 100 個小時去尋找, 所試過的部份也微少得無法下結論。(註1)

因爲要試遍所有的可能情況, 即使以當時最快的電腦也要工作100年。到了1958年, E.T. Parker 的一個發現, 使人們對 Euler's Conjecture 的正確性開始懷疑。接著 R.C. Bose 發展出一般性的法則用以構成高階的 G-L Sq., 然後 Bose 和 S.S. Shrikhande 應用這些法則找到了一個 $22(4\times5+2)$ 階的 G-L. Sq., 到此 Euler's Conjecture 被推翻, 可是問題還沒有完全解決。當 E.T. Parker 看到 Bose 和 Shrikhande 的結果, 他又發展出一個新方法, 成功的找到 10×10 的 G-L Sq.:

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

(資料來自 Gardner, 1959)

接著這三位數學家以通訊討論, 把方法更加改善, 最後發現對所有的 $n=4k+2$, $n>6$, Euler's Conjecture 都是錯的。困惑數學家一個半世紀的問題終於完滿的解決。1959年4月,

[註1] The computer at the University of California at Los Angeles have failed to produce an orthogonal 10×10 pair. But even with more than 100 hours of high-speed search, the part of the possible cases tried is so microscopic that no conclusion may be drawn.

美國數學學會在它的年會裡宣佈 Euler's Conjecture 是錯的。這個消息轟動一時, 紐約時報以頭條新聞給於報導。Bose, Shrikhande 和 Parker 他們的結果發表在 Bose et al. (1960)。

關於 G-L Sq. 最出人意料之外的, 並不是 Euler's Conjecture 是錯的, 最不可思議的是, 這看似純粹理論的東西, 後來居然被發現有非常實際的應用, 這是 Euler's 當初發明這東西時, 想都想不到的。Euler在他報告的最後一句話是這樣寫的:

> 我對問題的研究到此爲止, 雖然這問題的本身沒多大用處, 它使我們得到 組合學和魔方陣一般理論 的重要觀察力。(註2)

「希臘 – 拉丁方陣」本身眞的沒多大用處嗎? 這次 Euler 又錯了。在 Euler 死後一百多年的1920年代, 英國的 Ronald A. Fisher 把 Euler 認爲毫無實用價值的 G-L Sq. 用到農業的研究上。「希臘 – 拉丁方陣」如何用到農業研究上, 我用一個例子來說明: 農業試驗所培育出四種新的稻種, 農試人員想比較這四種稻種的 "產量", 但是影響 "產量"的「因子」(Factor), 除了稻種之外還有其他三種: 播種方式 (密度)、肥料、除虫劑, 而且每種因子分別都有四種可能的選擇, 這在「實驗設計」的術語裡稱:「每個因子有四個 levels」。我們所面臨的問題是: 我們想讓稻子的產量達到最大, 而影響產量的因子 (Factor) 有四種: 稻種、播種方式、肥料 和除虫劑, 且每種因子都有四個 levels, 該如何選擇每個因子的 level, 使得在該種組合之下, 產量達到最大? 要回答這個問題, 我們必須作些實驗, 要作多少次實驗呢? 因子有四種, 每種因子有四個 levels, 所有的可能組合有 $4^4 = 256$ 種。乍看之下, 要作256次的實驗, 試遍了所有可能組合後, 才能找到最佳的答案。

我們來看看 R. A. Fisher 是怎麼安排實驗的。他巧妙的利用 G-L Sq. 的正交性質, 只做了十六次實驗就找到了最佳組合 (註3)。一個 G-L Sq. 代表一個實驗的計劃。該方陣的「行」、「列」、「拉丁字母」、「希臘字母」分別代表一種因子。「行」代表 **Factor A** (稻種),「列」代表 **Factor B** (播種方式),「拉丁字母」代表 **Factor C** (肥料),「希臘字母」代表 **Factor D** (除虫劑)。方陣中每一個格子代表一種因子組合, 例如,「第一行第一列, 這一格出現的是 $a\alpha$」, 代表「第一種稻種 (行), 第一種播種方式 (列), 第 a 種肥料 (拉丁字), 第 α 種除虫劑 (希臘字)」這一因子組合。依照一個 G-L Sq., 安排十六次的實驗如下:

[註2] At this point I close my investigation on a question, which though of little use in itself, lead us to rather important observations for the doctrine of combinations, as well as for the general theory of magic squares.

[註3] 假設四種因子之間無「交互作用」。

Factor	(因 子)	Level
A	(稻 種)	1, 2, 3, 4 (行)
B	(播種方式)	1, 2, 3, 4 (列)
C	(肥 料)	a, b, c, d
D	(除 蟲 劑)	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$_B\backslash^A$	1	2	3	4
1	$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	$d\delta$
2	$c\delta$	$d\gamma$	$a\beta$	$b\alpha$
3	$d\beta$	$c\alpha$	$b\delta$	$a\gamma$
4	$b\gamma$	$a\delta$	$d\alpha$	$c\beta$

表一

實驗	A	B	C	D
1	1	1	a	α
2	1	2	c	δ
3	1	3	d	β
4	1	4	b	γ
5	2	1	b	β
6	2	2	d	γ
7	2	3	c	α
8	2	4	a	δ
9	3	1	c	γ
10	3	2	a	β
11	3	3	b	δ
12	3	4	d	α
13	4	1	d	δ
14	4	2	b	α
15	4	3	a	γ
16	4	4	c	β

實驗結果產量 Y 的值如下:

實驗	A	B	C	D	Y
1	1	1	a	α	96
2	1	2	c	δ	100
3	1	3	d	β	96
4	1	4	b	γ	84
5	2	1	b	β	96
6	2	2	d	γ	108
7	2	3	c	α	104
8	2	4	a	δ	100
9	3	1	c	γ	106
10	3	2	a	β	106
11	3	3	b	δ	98
12	3	4	d	α	114
13	4	1	d	δ	106
14	4	2	b	α	98
15	4	3	a	γ	90
16	4	4	c	β	98

總平均:100

十六次的實驗依照 $Factor A$ 的 level 來分類如下:

實驗	A	B	C	D	Y	平均
1	1	1	a	α	96	
2	1	2	c	δ	100	
3	1	3	d	β	96	94
4	1	4	b	γ	84	
5	2	1	b	β	96	
6	2	2	d	γ	108	
7	2	3	c	α	104	102
8	2	4	a	δ	100	
9	3	1	c	γ	106	
10	3	2	a	β	106	
11	3	3	b	δ	98	106^*
12	3	4	d	α	114	
13	4	1	d	δ	106	
14	4	2	b	α	98	
15	4	3	a	γ	90	98
16	4	4	c	β	98	
					總平均: 100	

$Factor A$ 採用 level 1的四次實驗, 平均是94, 在這四次實驗裡, $Factor B$、C、D 的各 level 都剛好出現一次。同樣的情況出現在 $Factor A$ 採用 level 2、level 3、或 level 4 的四次實驗裡, 而他們的平均分別是102, 106和98。顯然這四組的差異來自於 $Factor A$, 其他的 $Factor B$、C、D 條件均等, 而 $Factor A$ 採用 level 3最佳, 該四次實驗平均是106, 比總平均100多6。

十六次實驗依照 $Factor B$ 的 level 來分類如下:

實驗	A	B	C	D	Y	平均
1	1	1	a	α	96	
9	3	1	c	γ	106	
13	4	1	d	δ	106	101
5	2	1	b	β	96	
10	3	2	a	β	106	
6	2	2	d	γ	108	
14	4	2	b	α	98	103^*
2	1	2	c	δ	100	
3	1	3	d	β	96	
11	3	3	b	δ	98	
7	2	3	c	α	104	97
15	4	3	a	γ	90	
4	1	4	b	γ	84	
8	2	4	a	δ	100	
12	3	4	d	α	114	99
16	4	4	c	β	98	
					總平均: 100	

由此知 $Factor B$ 應採用 level 2, 平均是103, 比總平均100多3。

十六次實驗依照 $FactorC$ 的 level 來分類如下:

實驗	A	B	C	D	Y	平均
1	1	1	a	α	96	
8	2	4	a	δ	100	
10	3	2	a	β	106	98
15	4	3	a	γ	90	
4	1	4	b	γ	84	
5	2	1	b	β	96	
11	3	3	b	δ	98	94
14	4	2	b	α	98	
2	1	2	c	δ	100	
7	2	3	c	α	104	
9	3	1	c	γ	106	102
16	4	4	c	β	98	
3	1	3	d	β	96	
6	2	2	d	γ	108	
12	3	4	d	α	114	106*
13	4	1	d	δ	106	

總平均: 100

由此知 $FactorC$ 應採用 level d, 平均是106, 比總平均100多6。

由下表知, $FactorD$ 應採用 level α, 平均是103, 比總平均100多3。

實驗	A	B	C	D	Y	平均
1	1	1	a	α	96	
7	2	3	c	α	104	
12	3	4	d	α	114	103*
14	4	2	b	α	98	
3	1	3	d	β	96	
5	2	1	b	β	96	
10	3	2	a	β	106	99
16	4	4	c	β	98	
4	1	4	b	γ	84	
6	2	2	d	γ	108	
9	3	1	c	γ	106	97
15	4	3	a	γ	90	
2	1	2	c	δ	100	
8	2	4	a	δ	100	
11	3	3	b	δ	98	101
13	4	1	d	δ	106	

總平均: 100

將上述的結果整如下:
總平均: 100
最佳組合:

Factor	Level	在這選擇下, 比總平均多出的產量
A	3	6
B	2	3
C	d	6
D	α	3

最佳組合下的預產量 $100 + 6 + 3 + 6 + 3 = 118$, 這個最佳組合並沒有出現在所執行過的十六次實驗之中。如此, 我們只巧妙的根據一個 G-L sq. 選擇了十六種組合做實驗, 就把最佳組合找到了!

這個實驗設計就是一種「部份因子設計」, 在此例裡, 因子有四個, 每個有四個 levels, 所有可能的組合有256種, 假如我們的實驗設計是: 每一種組合至少執行一次, 這種設計稱「完整因子設計」(Full factorial design)。現在我們只選擇了其中的一部份組合 (十六分之一) 執行實驗, 故稱「部份因子設計」。即使在很平常的情況: 6個因子, 每個有2個 levels, 一個「完整因子設計」的實驗都至少要執行64次, 這是很不經濟, 甚至是不可行的。因此,「部份因子設計」是常採用的設計, 問題是要選擇做多少次的實驗, 與這幾次實驗, 其因子的 level 要怎麼組合, 這就是「部份因子設計」這學門的研究題目。

一般而言, 所有因子聯合起來對「反應變數 Y」(Response variable Y, 在上述的例子, Y 就是稻子的產量) 的「影響力」, 我們稱之爲「聯合效應」(joint effects), joint effects 可以分成好幾個層次, 第一層的叫做 over all effect, 第二層次是每個因子的「主效應」(main effects), 第三層次是因子兩兩之間的「交互作用」, 又稱「2階的交互作用」(2nd order interaction effects), 然後是3階的交互作用, 4階的交互作用 ...。有關這些 effects 的詳細定義我請讀者參考 Wu and Hamada (2000) 第三章。所有因子的 joint effects 就是這些 effects 的總和。假如各層次的 effects 都存在, 我們要知道所有因子的 joint effects, 先要知道每層次的 effects, 則我們必需執行一個 full factorial design 的實驗才有可能辦得到。奇妙的是, 大自然在大部份的情況都是簡單的, 也就是說, 在大部份情況下, 高階的 (3階或3階以上) interactions 都不存在, 或者即使存在也可以忽略, 所以要瞭解所有因子的 joint effects, 我們只要瞭解一些低階的 effects 就夠了, 這就是爲什麼不需要做完完整的組合, 我們還是可以知道所有因子的 joint effects 的原理, 也就是 Fractional factorial design 之所以可行的原因。

如何設計一個「部份因子實驗」, 在 2-levels (每個因子都有2個 levels) 或 3-levels 的情況有一套特別的方法, Wu and Hamada (2000) 的第四、五章有很詳細的介紹。其他一般情

況, 部分因子設計可以用一個「直交表」(Orthogonal Array) 來表示, 前面的 (表一) 就是一個直交表, 那個表我們是利用一個 4- 階的 G-L Sq 建構出來, 關於直交表的建構請讀者參考 Dey (1999)。

從 Euler 抽象數學結構的 G-L Sq, 到 R. A. Fisher 發現這抽象結構在實驗設計上所代表的意義, 這是數學發展過程中, 又一個令人訝異的例子。數學家的工作經常領先時代幾百年, 他們往往被一個理論的 "美" 所吸引而研究, "美" 是唯一的價值標準, 他們不在乎這套理論的 "實用價值", 可是往往若干年後, 這套理論被發現可以用來解決非常實際的問題。類似的例子很多: 群論 (Group Theory) 與晶體學, 黎曼流形 (Riemannian Manifold) 與廣義相對論, 李氏群 (Lie Group) 與核子物理學中內部對稱性原理, 纖維叢 (Fibre Bundle) 與規範場論 ...。這些與物理學如此緊密相關的數學觀念, 其發明都基於數學本身的理由, 數學家皆未曾想過這些觀念會在物理上有所應用。

讓我們來聽聽物理學家, 在領悟了這種「數學超乎常理的有效性, Wigner (1960)」後, 發自內心由衷的讚嘆。楊振寧說:

> 物理的規範場正好是纖維叢上的聯絡, 而後者是在不涉及物理世界的情況下所發展出來的, 這實在令我驚異。到頭來忽然領悟到, 客觀的宇宙奧秘與純粹用「邏輯」及「優美」這些概念發展出來的數學觀念竟然完全吻合, 那眞是令人感到悚然! (張奠宙 (1995))

純數學美妙的理論在實際的物理世界中可能都有它對應的部份。Dirac推崇 Einstein 的一個偉大貢獻是:

「他給我們引進一個觀念: 凡是在數學上是美的東西, 在基礎物理上很可能是有價值的。」(註4)

也許受到數學家的影響, 很多物理學家抱持著類似數學家的「唯美主義」,「美」是「眞」的前題:

「先追求 "美", "眞" 將自行相隨。」這是基礎物理學家的口號。(Zee (1986)) [註5]

物理學家 H. Bondi 有一段關於 Einstein 的精采的回憶:

> 我清楚地記得一件事, 當時我寫下一個建議, 對我來説那是適切而合理的, Einstein 卻一點也不同意, 但他只淡淡地説「喔!多醜!」

[註4] The Lorentz transformations are beautiful transformations from the mathematical point of view, and Einstein introduced the idea that something which is beautiful mathematically is very likely to be valuable in describing fundamental physics. This is really a more fundamental idea than any previous idea. I think we owe it to Einstein more than to anyone else, that one needs to have beauty in mathematical equations which describe fundamental physical theories. (Dirac (1980))

[註5] " Let us worry about beauty first and truth will take care of itself!" Such is the rallying cry of fundamental physicists. (Zee (1986))

> 只要是他覺得醜的方程式, 他都會對它失去興趣, 而且無法理解爲何有人願意在它上面花費功夫。他有一個堅定的信念: "美"是在理論物理裡追尋重要結果的指導原則。(註6)

Weinberg 說:

> 我相信廣義相對論所以受到人們廣泛接受的大部份理由在於理論本身的魅力, 簡言之即它的美麗。(Weinberg (1994))

我想用 Feynman (Feynman (1967)) 的一句話來概括數學與大自然的關係:

> 那些不了解數學的人, 很難對自然的美感, 那最深刻的美感, 能夠眞正有所體會。

最後我想談談 E.T. Parker 這個人。數學家 Karl Weierstrass 說過一句話:

> 沒有一點詩人氣質的數學家, 不是個完整的數學家。(註7)

E. T. Parker 是個很具浪慢情懷跟詩人氣質的數學家, 他就是 Weierstrass 這句話的一個註解。他於1987年8月退休, 退休之前他是 U of Illinois at Urbana Champaign 的數學系教授。伊大數學系教授一百多位, 我第一次聽到關於他的事是1985年的秋季, 那一學期他教「線性代數」, 有一陣子生病身體衰弱, 需要人幫他教學, 系裡爲他找到我的 office mate — Tim Stemple。據 Tim 告訴我, 上課時, Parker 會指定他講某一段, 他就坐在學生席上聽, 中途偶爾打斷, 自己上台補充一番。有天他請 Tim 喝啤酒, 告訴 Tim, 他想爲他的幫忙付給 Tim 每小時5元。大概 Parker 覺得5塊實在太少了, 有必要解釋一番, 他鄭重其事的告訴 Tim 他實在付不起更多的了, 他說:「你瞧! 我住在狹小的房子裡, 到現在 我還在開那部76年的老雪佛蘭。」

第二次聽到他是在 Experimental Design 的課上, 老師問我們: 各位知不知道推翻 Euler's Conjecture 的是誰, 他就是本系的 Prof. E. T. Parker, 當年這件事 在報上喧騰一時。

第一次看到他本人是在離數學系不遠的 Green Street 上。當時我坐在一家 McDonald's 裡, 從窗子望出去, 我看到一位與衆不同的老人, 他鬚髮斑白, 行動緩慢的走在對面的人行道上, 他不時彎腰拾起他看到的垃圾, 小心翼翼地放到路旁的垃圾桶裡。我的朋友告訴我, 他就是 E. T. Parker, 他經常作這種事。我的內心一陣莫名的感動, 視線被這一幕所吸引: 路人在他身旁

[註6] What I remember most clearly was that when I put down a suggestion that seemed to me cogent and reasonable, Einstein did not in the least contest this, but he only said "Oh, how ugly". As soon as an equation seemed to him to be ugly, he really rather lost interest in it and could not understand why somebody else was willing to spend much time on it. He was quite convinced that beauty was a guiding principle in the search for important results in theoretical physics. (Whitrow (1973)).

[註7] A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician.

冷漠地走過, 對這老人的存在毫不在意, 而老人也不太理會他週圍的行人, 自得其樂, 旁若無人, 很認真, 很虔誠地撿著垃圾。他看起來似乎不屬於這個社會, 不屬於這個年代, 倒像穿過時空來到廿世紀的古希臘哲學家。後來有機會就此事請教他, 他說他不能忍受這些醜陋的東西放在那不該放的地方。

E. T. (註8) 熱愛音樂, 尤其是巴哈的音樂, 他家裡有一套音響, 不過他只有一個喇叭, 賣音響給他的人說:「E. T. 是 世界上唯一用一個喇叭在聽 CD 的人」。E. T. 的解釋是他家太狹窄, 擺不下兩個。音樂對他似乎跟空氣一般重要, 在研究室裡他擺著一部手提收音機, 走在路上的時候, 戴著他的隨身聽, 夏天, 在太陽下, 他還喜歡加上一副大墨鏡。

E. T. 對音樂家瞭如指掌, 在 Champaign 有家電台, WILL Beautiful 90.5 頻道, 專播放古典音樂, 有些節目中, 他們會贈送聽衆一些小禮物。有一天主持人說: 現在我手上有幾張音樂會的入場券, 聽衆朋友中最先回答下面問題的, 我們將贈送給他。請各位說出底下這段音樂的曲名、作曲家, 還有該作曲家在什麼學校教過音樂? 音樂開始 ···, 不久, 節目主持人說, 我們接到兩位朋友的電話, 提供了正確的答案, 一位是 E. T. Parker ···, 正確答案:

The Planet (行星組曲)
Holst (1874-1934)
St. Paul's Girls' School, London.

E.T.喜歡音樂, 也喜歡談音樂, 他有時候會在上課時談, 通常他在黑板左上角寫下音樂家的名字、出生、逝世年份, 然後開始細數音樂家的生平, 及他們的音樂, 講著講著, 有時候甚至被音樂家的事蹟及音樂感動得在學生面前老淚縱橫。一個六十多歲的人, 仍懷著一顆敏感而熱烈的赤子之心。

在 Illinois 的 Capital, Springfield 有個公園, Washington Park, 裡頭有座鐘塔—The Thomas Ree's Memorial Carillon。這鐘塔是一位熱愛鐘聲的伊利諾參議員 Thomas Ree 捐款建造, Carillon由荷蘭一家鑄鐘有300年歷史的老店所鑄造。鐘塔完成於1962年, 塔高132英尺, 裡頭懸掛大小66口鐘, 從最大的七噸半, 到最小的廿二磅, 音域含跨五個半音階, 可以當一組樂器演奏, 音質優美。據 E. T. 的品評, 那是「全西半球最美妙的鐘聲」, 第二名的是 Florida 的 Singing Tower。他經常在週末, 從 Champaign 開兩個鐘頭的車到 Springfield 去, 只爲了聆聽鐘聲。有時他覺得自己開車太辛苦, 星期五上課時會問學生想不想跟他一道去, 由學生開他的那部 Old Chevy, 大家一起去。

1987年6月20日, 我陪他去一次。The Thomas Ree's Memorial Carillon 矗立在 Springfield 的最高點。聽這鐘聲最好的地方在鐘塔300英尺外開闊之處。聽姑蘇城外寒山寺

[註8] Prof. Parker 的全名是 Ernst Tilton Parker, 但是他堅持人家只 用 E. T. 稱呼他, Ernst Tilton 也是一位他原來很崇拜的政治家的名字, 後來被發現是同性戀者, Prof. Parker 恥與他同名, 此後從不用全名。

的夜半鐘聲, 也許你該低眉合十, 而在這裡你卻應昂首天外, 你似乎可以看到一串串的音符從對面的塔頂翩翩飛起, 像雁陣一般, 在中西部大平原上橫空而過, 漸去漸遠。

1987年8月 E. T. 退休了, 我問他退休後作什麼。他說他還會繼續作數學, 不過另方面他也要開始嘗試 "Write music"。這就是 E. T. Parker。

参考文獻

1. Bose, R. C., Shrikhande, S. S. and Parker, E. T., *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the Falsity of Euler's conjecture*, Canad. J. Math., 12, 1960, 189-203.
2. Dey, Aloke, *Fractional factorial plans*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
3. Dirac, P. A. M., *"Why we believe in the Einstein theory"*, Bruno Gruber and Richard S. Millman ed., Symmetries in Science, Plenum Press, New York, 1980.
4. Dunham, William, *Journey Through Genius: the great theorems of mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1980, 中譯本: 林傑斌譯,「天才之旅—偉大數學定理的創立」, 科學與人6, 牛頓出版社, 台北, 1995年。
5. Feynman, R. P., *The Character of Physical Law*, M. I. T. Press, Cambridge, MA., 1967, p.58. 中譯本: 陳芊蓉、吳程遠譯,「物理之美—費曼與你談物理」, 天下文化, 台北, 1996年, p78。
6. Gardner, Martin. "Mathematical Games, How three modern mathematicians disproved a celebrated conjecture of Leonhard Euler", Scientific American, Nov. 1959.
7. Weinberg, S., *Dreams of a Final Theory: the scientist's search for the ultimate laws of nature*, Vintage Books, New York, 1994, p98. 中譯本: 張蔡舜譯,「最終理論: 自然界基本法則的探尋」, 科學與人9, 牛頓出版社, 台北, 1996年, p108。
8. Whitrow, G. J. ed., *Einstein: the man and his achievement*, Dover, New York, 1973.
9. Wigner, E. P., *"The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural science"*, Commun. Pure & Appl. Math., 13, 1960, 1-14.
10. Wu, C. F. Jeff and Hamada, Michael, *Experiments—planning, analysis, and parameter design optimization*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
11. Zee, A., *Fearful symmetry: the search for beauty in modern physics*, Macmillan, New York, 1986, p3.
12. 張奠宙,「楊振寧與當代數學」, 楊振寧文選: 讀書教學再十年, 時報文化, 台北, 1995年, 184-205。譯自 *"C.N. Yang and contemporary mathematics"*, Mathematical Intelligencer, Vol. 15, No.4, 1993.

—本文作者任教於清華大學統計研究所—