『數學? 數學!』演講系列：

獵殺紅色十月——談正弦函數的數學

演講人 : 沈昭亮
時　間 : 民國九十一年九月十八日
地　點 : 清華大學 (數學系 101 教室)

當我們用心地觀察我們週遭的事、物或現象, 仔細地去想, 常會有意想不到的收穫。聽一首好歌, 看一幅作者很用心的畫或一部好的電影, 如果我們仔細地去體會, 常可在我們的腦中浮現一種意境, 那種意境或者是作者的安排或者是我們自己的幻想。那一些「意境」可能會觸發我們某種靈感。

當家裡的收音機正在播放呂傳梓作詞, 楊三郎作曲的「港都夜雨」時, 我在想「數學? 數學!」第一場演講的題目。

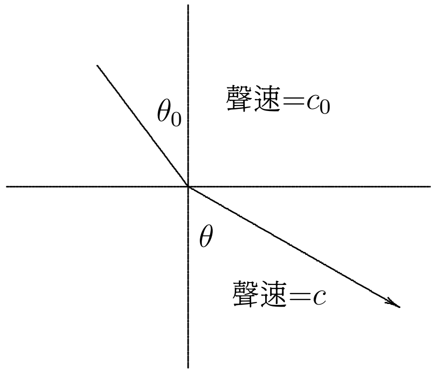
今夜又是風雨微微, 異鄉的都市, 路燈青青照著水滴引我的悲意...

這首歌意境十足, 我很喜歡。聽著歌, 隨著旋律, 腦中出現了「史恩 · 康那來」這位最早扮演 007 的演員。我和我太太都很喜歡他演的電影, 覺得他越老演的越好, 越老越有男人的魅力。想著想著便想到他主演的「獵殺紅色十月」。這部電影演的是蘇聯核子潛艇「紅色十月」艇長投誠的過程, 有很多心裡戲, 當然少不了刺激的潛艇戰。海底作戰, 少不了使用「聲納」, 我想, 我就來談談聲音在海裡的路線。

如光線一般, 我們把聲音的傳遞想成 "聲線" (Ray), 有其方便之處。在海洋中, 壓力隨著深度而增加, 壓力導致了聲音速率的變化。以 x 表深度, $x = 0$ 表海平面。以 $c(x)$ 表示在深度爲 x 時的聲速。實驗告訴我們:

$$c(x) \approx c_0 + c_0\alpha x,$$

其中 c_0 表海平面的聲速, $\alpha > 0$ 為一常數。由於聲速的變化, 使聲音的傳遞產生折射的現象。

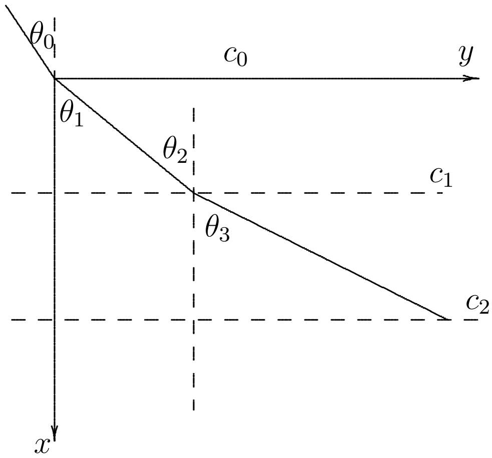


折射的現象是由 Snell 定律所主宰: 設一介面以上的聲速為 c_0, 以下的聲速為 c, 而設入射角為 θ_0, 折射角為 θ, 則

$$\frac{\sin\theta_0}{c_0} = \frac{\sin\theta}{c}. \tag{1}$$

顯然, 當 $c > c_0$ 時, $\theta > \theta_0$。如此遞移, 發現

$$\frac{\sin\theta_0}{c_0} = \frac{\sin\theta(x)}{c(x)}. \tag{2}$$



以 $y = y(x)$ 表示入射角為 θ_0 的聲線的軌跡。當 dx 很小時 $c(x + dx) \cong c(x)$, 因此

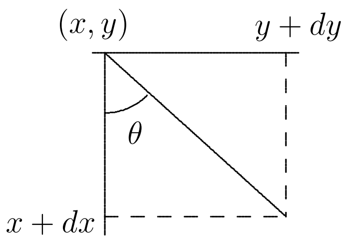
$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}.$$

將此式代入 (2), 我們藉由:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin\theta_0 \cdot \frac{c(x)}{c_0}\\ &= (1 + \alpha x) \cdot \sin\theta_0.\end{aligned}$$

發現 $$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} = (1+\alpha x) \cdot \sin\theta_0,$$

因此 $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\alpha x) \cdot \sin\theta_0}{\sqrt{1-(1+\alpha x)^2 \cdot \sin^2\theta_0}}. \tag{3}$$



注意到: y(0)=0。

我們可以利用 (3) 式, 求出 $y(x)$, 方法是: 使用積分! 由 (3),

$$y(x) = \int_0^x \frac{(1 + \alpha t) \cdot \sin\theta_0}{\sqrt{1 - (1 + \alpha t)^2 \cdot \sin^2\theta_0}} dt.$$

令 $u = 1 - (1 + \alpha t)^2 \cdot \sin^2\theta_0$, 則由 (3) 可算出

$$y(x) = \frac{\mp 1}{\alpha\sin\theta_0}\sqrt{1 - (1 + \alpha x)^2 \cdot \sin^2\theta_0} \pm \frac{\cos\theta_0}{\alpha\sin\theta_0}. \tag{4}$$

上式 (4) 可簡化為

$$\Big(y-\frac{\cot\theta_0}{\alpha}\Big)^2+\Big(x+\frac{1}{\alpha}\Big)^2=\frac{\csc^2\theta_0}{\alpha^2}. \tag{5}$$

因此我們的聲線是一個圓弧!

聲納的應用如中國武俠小說的「聽音辨位」。

很多自然的現象, 可以用正弦函數來描述。我的數學家族的第二代 Joseph Fourier (1768-1830, 其師為 Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813), 因為對熱傳, 以及小提琴弦的振動的研究, 而發明了 Fourier 級數的理論, 其基礎即在於正弦函數優美的性質。前人的貢獻令人無法掠美。有一項成形於 1980 年代末期的理論, 稱為反節點理論 (Inverse nodal theory), 其研究的課題, 與「聽音辨位」有一點類似, 例如: "有一定邊弦, 知其長, 但不知其密度"。當我們"聽到": 很多此弦發出的聲音 (頻率), "看到": 弦振動的 "節點", 試問: 能否決定此弦的密度?

反節點理論與正弦函數有密切的關係。在避免運用複雜的定理, 而且不要太在乎, 但又不能不在乎其嚴謹性的前提下, 我用不是很嚴謹的方式, 來介紹反節點理論的一條基本定理—Weyl 極限公式。

首先, 一條長 l, 密度函數為 $\rho(x)$ 的定邊弦, 其振動由下列的方程式所主宰:

$$y''(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,\quad y(0)=y(l)=0. \tag{6}$$

使 (6) 式有非零解的 λ 稱為此定邊弦的一個固有值 (其平方根即為頻率)。固有值之個數無限可數, 固有值有下界而無上界, 依大小排列, 記為

$$\lambda_1[\rho]<\lambda_2[\rho]<\cdots.$$

例如, 當 $\rho(x)$ 為常數, 設為 ρ, 則 λ 為 (6) 之固有值若且唯若

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda\rho}l}{\sqrt{\lambda}}=0$$

即

$$\sqrt{\lambda\rho}l=n\pi,\quad n=1,2,\ldots$$

因此, 當密度均勻時 ($\rho(x)\equiv\rho$), 弦的固有值 λ_n 由下式所決定:

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{\sqrt{\rho}l}\quad\Big(\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\rho}\Big(\frac{l}{n}\Big)=\pi\Big) \tag{7}$$

固有函數為

$$y_n(x)=\sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big),$$

而 $y_n(x)$ 之 節點 (即使 $y_n(x)$ 爲零的點) 爲

$$\frac{jl}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

而 $\frac{l}{n}$ 爲兩相隨節點的距離。

我們注意到:

(i) $y_n(x)$ 在 $(0, l)$ 區間內有 $n-1$ 個節點。

(ii) $y_n(x)$ 在節點的兩側異號。

(iii) 隨 n 的增大, 節點的分佈趨密。

以上三個性質, 在一般弦振動都成立。

其次, 當 $\rho(x)$ 不是常數時, 令

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = l$$

爲固有函數 $y_n(x)$ 的節點。當 n 夠大時, 在 $(x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})$ 內

$$\rho(x) \approx \rho(x_{j-1}^{(n)}),$$

由 (7), 得

$$\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\rho(x_{j-1}^{(n)})}(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) \approx \pi. \tag{8}$$

由 (8), 得

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\rho(x_{j-1}^{(n)})}(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) \approx \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda n}}.$$

也就是說 $\sqrt{\rho(x)}$ 對 $[0, l]$ 區間的 “分割” $\{0, x_1^{(n)}, \ldots, x_{n-1}^{(n)}, l\}$ 的黎曼和近似 $\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$。若設 $\sqrt{\rho(x)}$ 連續, 則得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}} = \int_0^l \sqrt{\rho(t)}dt,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \frac{\pi^2}{(\int_0^l \sqrt{\rho(t)}dt)^2}.$$

此即有名的 Weyl 公式。今日的演講就以這個左邊是物理, 右邊是數學的 Weyl 公式的一個簡單的應用來結束:

應用問題: 有一弦, 其密度爲連續函數。若知其所有 (或“夠多個”) 固有函數 $y_n(x)$ 的節點 $\{0, x_1^{(n)}, \ldots, x_{n-1}^{(n)}, l\}$, 將 $[0, l]$ 做 n 等分。試問: $\rho(x)$ 是否爲常數?

解: 由 (8) 式以及關於固有函數的節點的已知條件, 我們發現:

$$\begin{aligned}\rho(x_{j-1}^{(n)})(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)}) &\approx \frac{\pi^2}{\lambda_n}\frac{1}{x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)}}\\ &= \frac{\pi^2}{\lambda_n}\frac{n}{l}.\end{aligned}$$

因此, $\rho(x)$ 在 $[0,l]$ 上對"分割" $\{0,x_1^{(n)},\ldots,x_{n-1}^{(n)},l\}$ 的黎曼和近似 $\frac{n^2\pi^2}{\lambda_n l}$:

$$\sum\rho(x_{j-1}^{(n)})(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)})\approx\frac{n^2\pi^2}{\lambda_n l}.$$

由上式, 以及 Weyl 公式得:

$$\int_0^l\rho(t)dt=\frac{(\int_0^l\sqrt{\rho(t)}dt)^2}{l},$$

$$\Big(\int_0^l\sqrt{\rho(t)}dt\Big)^2=\Big(\int_0^l 1^2dt\Big)\Big(\int_0^l\big(\sqrt{\rho(t)}\big)^2dt\Big). \tag{9}$$

經由 (9) 式, Schwarz 定理告訴我們: $\sqrt{\rho(t)}$ 是 1 的倍數, 即 $\rho(x)$ 爲常數。

—本文演講人沈昭亮現任教於清華大學數學系—