

我們為什麼要學習數學

——兼及新世紀中小學數學課程目標

李善良 · 單 樽

新世紀到來，各國都在進行中小學數學課程標準的研製工作。在建立數學課程目標時，首要回答的問題是：我們為什麼要學習數學（然後才是學什麼樣的數學，怎樣學習這些數學）。站在不同角度，對這些問題有不同的回答。因而給數學課程目標制訂帶來困擾與困難，甚至出現種種誤解與偏差。本文從數學與自然的關係、數學對人的發展的影響、數學與人類文化的相互作用三個方面來重新認識這個問題。通過對數學與科學發展的歷史分析，揭示數學與自然，數學與科學的密切關係。並闡述這種關係使數學成爲人類認識自然、認識現實世界的中介與工具，是一種高級的認識論與方法論系統。在人類探索宇宙規律（這種規律更多的是用數學進行表述的）的過程中，數學這種獨特的性質促進了人類智慧的發展、品德的完善、人格的健全，同時促進了人類思維的不斷創造。這種對人類智慧的記錄、傳遞與創造作用，使數學成爲人類文化的重要組成部份，在人類文化發展中起著不可替代的作用。從而說明，只有對數學與自然的關係，數學與人的發展，數學與文化的作用等有正確的認識，才能建立合理的中小學數學課程目標。

一、數學：人類認識自然的仲介

數學與自然的關係十分密切，這裡只討論與課程目標關係密切的兩個問題：數學為什麼總是有效的，數學僅僅是爲了應用嗎？

1. 數學為什麼總是有效的

這個問題一直困擾著哲學家、科學家與數學家，並激勵著他們不停地探索自然的真諦，探索數學中隱藏的巨大力量和源泉。

西元前6世紀古希臘人認爲，自然界是被合理的安排好了的，一切現象都是按一個精密的不可變的計劃進行的。這個計劃就是數學計劃，世界是建立在數學原理之上的。這期間占統治地

位的畢達哥拉斯學派認為，數是描述大自然的第一原理，是一種物質，“萬物皆數”。他們創立兩種學說：(1) 自然界是根據數學原則安排的。(2) 數比是實質的、是基礎、是唯一本質，是自然界中序列認識的工具。這種觀點雖然很快就被找出謬誤，但它的影響卻一直延續到近代。這是因為他“終究提出了宇宙的本性問題，提出人可以通過對數的研究達到對宇宙本質的認識”^[1]。原子論學派也斷言，以現實世界的經常性變化為基礎的現實性可以用數學語言來表示，數學定律嚴格預定了在這個世界上正在產生的一切。柏拉圖認為，現實世界是建立在數學原則之上的，“現實的、為事物的表現現象所涵蓋的，表示事物內部實質的那些東西，就是數學”^[2]。亞里士多德學派也支持以整個宇宙為基礎的數學計劃的說法，認為數學的抽象是從物質世界中吸取的。

中世紀歐洲哲學家由於無法解釋數學與自然的神奇聯繫，避免與神學的衝突，便認為用數學表現、創造世界的正是上帝。他們在數學中看到了通往認識自然之路，世界的和諧就是數學結構的表現，上帝用嚴格的數學秩序奠定了世界的基礎。正如數學史家克萊因所評：“16-18世紀，數學家的工作實質就是宗教的尋找，在尋覓數學定律之中舉行宗教儀式，揭示神的創造力的光榮與偉大”^[3]。他們“深信存在著自然界所有現象的數學定律。每一次發現自然定律，都又一次證明上帝的英明”^[4]。

17世紀，“回歸自然”口號提出，歐洲“科學革命”，數學起了重要的作用。分析這以後哲學家的思想，可以對數學與自然的關係有更深入的認識。首先是笛卡兒和伽利略把自然科學與數學有機地組合起來。笛卡兒認為“只有研究秩序或度量的那些學科才屬於數學領域……”^[5]，相信自然界是以數學原理為基礎的。“現實世界就是數學定律表現物體在時空中運動的總和，而整個宇宙則是一個以數學定律構成的龐大而協調的機器”^[6]。因而認為，正是數學方法為人類開闢了一條獲得自然規律的道路。伽利略認為，自然科學家在研究自然時應該遵循某個數學模型，“數學符號就是上帝用來書寫自然這一偉大著作的統一語言，不瞭解這些文字就不可能懂得自然的統一語言，只有用數學概念和公式所表達的物理世界性質才可認識……”^[7]。

其後是牛頓、萊布尼茲等科學家的進一步擴展。牛頓“努力使自然現象服從於數學規律”，以其著作「自然科學的數學原理」向人類顯示出一個新的世界秩序——宇宙的運動可用幾條數學定律描述，使古希臘的理念得到確切的證實，擺脫了畢達哥斯拉學派的數學神祕主義。萊布尼茲認為現實世界與數學世界是協調的，這種科學哲學觀奠定了他的宇宙基礎的數學原理說的基礎。

總之，“笛卡兒、伽利略、牛頓、萊布尼茲及其他現代數學的奠基人始終信仰的實質就是：自然界內部固有著某個隱藏的和諧，它以簡單數學定律的形式在我們的意識中反映出來。由於這一和諧性，結合數學分析的觀察能預言自然現象”^[8]。

隨著科學與數學的進一步發展，數學的推演與實際觀測的吻合，人們從信仰宗教，轉到信仰自然，堅信自然規律就是數學規律，一切注意力都集中在探索宇宙的數學規律上。數學家魏爾的思想“在自然界中存在著其內部固有的隱藏著的協調，它反映在我頭腦中的形式為簡單的數

學定律”^[9]，更是明確指出了自然與數學的密切關係。巴雷特甚至斷言：“整個數學的歷史證明數學理性與自然之間存在著相互聯繫”^[10]。因此，數學彷彿是一種人與自然，人們的內在世界與周圍外部世界之間的媒介物^[11]。

對於現代科學的重大成就稍作分析就會發現，它們幾乎全是數學的成就，甚至完全依賴於數學。首先，電磁場理論就是最好的例證。它在理論物理中的重要地位是眾所知的，然而它幾乎是純數學理論。近代物理的精神就是數學理論。愛因斯坦認為這種變化是“從牛頓時代以來物理所經受的最深刻、最富有成效的變化”^[12]。其次，原子結構觀點對於物理學具有非常重要的意義，對化學和生物的研究也有極大的促進作用。然而，原子模型卻是數學模型。“數學在充滿混亂的地方展示和建立了秩序”^[13]。第三，今天的微電子技術，資訊網路技術更是由數學編織而成。

總之，從古希臘至今，人們一直在探索數學與自然的關係。科學史的大量資料也顯示數學的巨大力量和源泉，在人類的創造中最強大的方法就是數學。數學使得我們對形形色色的自然現象取得確定的認識，數學是人類認識自然現象必不可少的仲介。它“體現了最有效地使現實世界與感性認識世界聯繫的環節，長期以來，數學處於人類思維的前沿，它保持先進的位置，迄今，它仍是加以百般愛護的人類理性的無價之寶”^[14]。“數學的事業是一樁偉大的探究，探索宇宙和人類自己最深的奧秘”^[15]。

2. 數學僅僅是為了應用嗎

數學與自然的密切關係使數學成為一切科學的基礎，因而具有廣泛的應用性。數學在人類生活、生存、科學與文化發展中一直發揮著至關重要的作用。培根認為“對自然界的許多部份，如果沒有數學的幫助和參與，則既不能以足夠的技巧予以製造，也不能以充份的表白予以演示，也不能以足夠的靈巧使之適於應用”^[16]。尤其在今天科技發展的時代，“被人如此稱頌的高技術本質上是一種數學技術”^[17]。

由於數學的應用給人類物質方面帶來數不盡的巨大成就，導致了對數學本質認識的各種偏差。最典型的幾種情形是，(1) 忘記了數學的應用是建立在數學與自然的密切關係基礎上的，過分片面地強調數學的應用性。能用的即予保留，暫時用不上的即予放棄；對物質生產直接起作用的即予發展，無直接作用的便不予接納。這種現象在東方的數學史上尤為突出。中國古代數學受經世致用思想的導引，數學只在商業、運輸、水利、天文、曆法等實踐中具體應用。在早期階段，隨著農商業迅速發展，數學也迅速發展，許多成果在世界數學史上領先達千年之久。然而隨著農業社會的緩慢發展，以應用為目的的數學的生存與擴展空間便越來越窄，最終成為無源之流，漸趨枯竭。(2) 對“無用的”數學加以拒絕、否定，直到看到其“用”才接受、吸納。虛數的承認，非歐幾何的建立在數學史上都經歷波折。儘管它們解決了數學內部矛盾，但由於在數學之

外尙未看到可“用”，因此當初都被拒絕過。(3) 爲了使數學有“用”，許多人曾堅信、辯解、斷言，所有數學都是有用的。非歐幾何、數論中的一些定理常被引爲例證。他們聲稱這些有用可能在若干年後，“這叫你難以相信，你不可能到達那一步，讓你永久地期待”（鍾開萊「數學與應用數學」）。

這些觀點把數學“用”擺在第一位，“用”是最高目標，可用即爲數學，不可用即非數學。儘管已受到多次否定、批評，但至今在一些人的意識裡，仍占著主導地位。實際上，這是對數學與自然的關係的曲解。一方面，混淆了“數學的應用”與“應用的數學”這兩個本質不同的概念。實際上，“數學的應用”不僅包括應用“應用數學”，還包括數學思想方法、“數學化”過程。數學品質等更廣闊的內容。只有從數學與自然的辨證關係認識，把數學視作與自然統一的地位，才能真正體現數學的應用性。否則，捨棄掉數學是認識自然、征服自然的仲介，捨棄其作爲認識論、方法論、思維創造乃至文化、藝術於一體的特徵，把數學只視作一種工具，爲應用而學習數學的功利主義或實用主義，不僅會降低數學的地位，而且也不利於學生素質的整體發展。

3. 啓示

隨著對數學價值的深入認識，各國在21世紀的數學課程標準中，都極爲重視數學與自然的關係作用，重視數學的應用，並使數學的應用與應用的數學二者有機結合起來。在確立數學作爲認識自然、改造自然的仲介地位的基礎上，既考慮社會需要，更注重人的整體素質的培養。在對學生進行基本的數學認識、思維、推理、評價、聯繫、交流、問題解決教育的同時，儘可能選擇當今社會中應用廣泛的數學內容，如微積分、線性代數、概率統計、電腦等作爲學習內容。儘管各國課程有不同的哲學文化背景，有不同的政治經濟制度制約，但最終的根仍紮在數學與自然的關係之中，很少有強調以“應用數學”爲終極目標的課程。

二、數學：人的發展中不可或缺的內容

數學與自然的特殊關係，使得數學成爲人的發展中不可或缺的主要內容。首先，在上文中已揭示，數學不僅給人以應用的數學知識，更爲重要的是，數學給人如何運用數學去看待世界、去認識自然的方法。通過數學，使人掌握宇宙發展的普遍規律。因此，數學對人的世界觀的形成具有特殊作用。第二，數學是一種思維形式，是思維創造的產物，表現著人類智慧本質與特徵。數學活動是智力體操與創造發明的活動。他對人的科學思維與創新意識、創新能力培養起著重要的作用。第三，數學與自然的關係，揭示了現實世界的內在不變的規律，揭示了自然的奧秘、事物之間的相互關係，揭示了物體運動發展的動力與源泉，對形成學生鑒別真善美的能力有一

定促進作用。對形成學生興趣，培養學生自信、毅力、批判性等良好的個性品質方面也極爲有益。

1. 數學有利於正確的認識論與世界觀的形成

數學對於人的認識論形成的功用，上文已有說明。同時我們還看到，數學物件具有雙重性^[18]，它的理論是思維創造的產物，而非客觀世界中的真實存在。客觀世界中不存在數學中的點、線、面、三角形、圓，數學中的概念、命題等都是抽象思維的產物。然而，究其內容而言，數學物件則又具有明確的客觀意義，它是人的思維對於客觀現實的正確反映。這裡的現實與感性是相對而言、具有層次的。在同一公理系統內，數學的真理具有絕對性，而對於不同的公理系統，數學真理又具有相對性。這些思想對人的認識論、方法論、世界觀的形成都是非常有益的。

2. 數學有助於人的思維能力與創造能力的發展

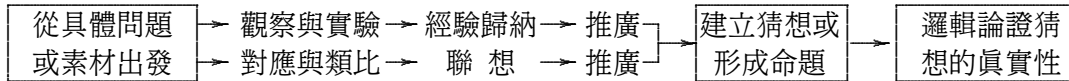
美籍學者項武義說過：“基礎數學教育的首要目的，在於開發腦力，提供解析思維的基本訓練。而其第二個主要目的才是讓學生掌握現代技術工藝上普遍應用的基礎數學知識，數學基礎當然十分有用、十分重要，但是，認識問題、解決問題的思維訓練實在更加有用、更加重要”^[19]。美國「人人關心數學教育的未來」則認爲“中等教育特別缺乏揭示數學的思維方式，而這都是提高公民的理解力所需要的”^[20]。長久以來，人們已認識到數學對人的思維訓練是極爲有益的。首先，數學是思維的工具，通過數學活動可以提高人的思維能力。第二，數學活動過程是一種再創造、重新發現過程，通過觀察、實驗、歸納、類比、猜想、驗證等活動，概括抽象出數學概念，提出數學命題；通過建立數學模型，解決實際問題。這一系列活動，對人的思維能力與創造能力進行了全方位培養。因此，數學活動對人的思維訓練來說，既是素材，又是過程。

(1) 數學是思維的工具。數學是思維創造的結果，也是思維的工具，可以充當思維訓練的素材。

第一，數學思維是一種抽象邏輯思維，主要表現在兩個方面。a. 數學具有抽象思維的能力。數學是研究思想事物的抽象科學。儘管數學與現實世界關係密切，但數學內容一經建立，它便脫離現實，它的物件與結果都是思維的創造。運用數學解決問題，也是對現實進行抽象，建立其數學模型的結果。b. 數學具有邏輯的嚴謹性，結論的可靠性。正如愛因斯坦所言，“爲什麼數學比其他一切科學受到特殊尊重，一個理由是它的命題是絕對可靠和無可爭辯的”，另一個理由是“是數學給予精密自然科學以某種程度的可靠性。沒有數學，這些科學是達不到這種可靠性的”^[21]。

第二，數學思維也是形象思維與直覺思維。儘管其他學科（文學、藝術等）也培養學生形象思維能力，但其內容與程度遠沒有數學豐富與深刻。這種形象思維與邏輯思維緊密結合，相互補充，相互促進。

- (2) 數學活動是訓練思維的最佳途徑。朱梧檟先生對數學活動過程作了深入的分析^[22]，並給出圖示：



他認為前一階段是創新過程，以形象思維、直覺思維為主，後一階段是驗證過程，以邏輯思維為主。實際上，在前一階段中也滲透邏輯思維，在後一階段也借助於形象思維與直覺思維。兒童學習數學的活動實質上是再創造過程。每個人都是在學習過程中，根據自己的體驗，用自己的思維方式，重新創造有關的數學內容。這種活動除了提供各種定理和理論之外，還提供各種特定的思維方式，包括抽象化、模型化、最優化、邏輯分析、資料推斷、符號運用等。在數學活動過程中既包括抽象思維訓練，又包括形象思維訓練。因而數學活動是訓練思維的最佳途徑。

3. 數學有益於人的心靈淨化

數學除了在人的智力發展方面的巨大影響外，對人的心靈淨化，良好的個性品質形成，乃至身心健康有重要促進作用。

- (1) 數學有益於人類對真善美的追求

過去的教育中，數學的德育或者被忽略或者被狹義的國家主義、民族自尊心替代而流於形式。實際上，“數學在人們品質形成上有不可替代的作用”。數學既然是自然的秩序與規則的反映，它有自己的“道”，因而有自己的“德”。

數學推理的嚴謹性與結論的精確性，促使進行數學活動的人必須嚴格遵守相應的規則、體系。在同一系統內，數學真理具有絕對性，數學追求的目標幾乎是一種清晰可達的信仰。因而，學習與從事數學的活動追求的是一種抽象的“真”，一種心靈上的純真與虔誠，“首先在工作中，他必須是完全忠實的，這倒不是出於任何優秀的道德品質，而是因為他無法拿著冒牌逍遙法外”^[23]。

柏拉圖在兩千年前就把善與數學等同起來，認為數學對於“理想”的探求是具有重要意義的。二十世紀四十年代，懷特海又舊話重提，對數學這一學科的一般性質作了一般的揭示，認為“數學是從模式化的個體做抽象的過程中對模式進行研究”^[24]。因為“數學對於理解模式和分析模式之間的關係，是最強有力的技術”^[25]，所以，模式在人類生活中佔有重要地位。“每一種藝術都奠基於模式的研究，社會組織的結合也依賴於行為模式的保持，文明的進步也僥倖地依賴於這些行為模式的變更”^[26]。因此，他指出，關於數學與善的概念的關係便得到清楚的說明。數學應用於人類生活的一切領域，幫助人們建立自然的秩序與規則，阻礙災難的發生，為人類的福利與文明不斷地作出奉獻，數學在人類價值序列中佔有不可替

代的地位：這就是數學的善。追求數學，同時也追求著數學之善，促進整個世界的和諧與秩序建立，促進整個世界科技進步，促進文化藝術的增加，從而使文明不斷提昇。

數學是一門藝術，數學美是數學發展的動力，這方面的論述已有很多共識。我們認為，至少包含三種含義。首先，數學發展的歷史表明，應用是數學產生的源泉，而美學標準是數學發展最為關鍵的動力，“進行數學創造的最主要的驅策力是對數學美的追求”^[27]。十八世紀，科學與自然向數學提出眾多問題，牛頓與萊布尼茲創立了微積分，但真正使微積分成為數學的還是柯西等人的工作，是美學的作用。“美觀與高雅對數學概念的評價來說，比是否嚴格正確，是否可能應用都重要得多”^[28]。

第二，數學是藝術，是美的化身，但這種美是思維抽象創造的產物，是一種精神。欣賞數學、鑒賞數學、評價數學活動只有在學習數學和做數學的過程中才可進行。只有置身其中，才能分享這種美，才能產生喜悅的感受，感覺到精神上的亢奮，而不是感官的滿足。學習數學是再創造活動，與一般的藝術學習有較大的區別。臨摹與演練不會產生創造時的激動，很難達到心靈與精神上的美的享受。

第三，數學美的追求，是人的一種精神動力。美的需要，與生俱有。物質生活需要永遠都是相對的，而追求美的精神需要幾乎是絕對的。這就可以理解數學的產生有許多方面不僅是為了應用，數學與藝術為什麼會有天然的密切關係等問題。人有物質需要，更有精神需要、審美需要。數學在滿足人類物質需要（作為應用工具）的同時，又為其提供了高層次的智力活動與美的享受。這是人的生命中不可缺少的一種精神動力。而數學活動（包括學習數學），實際上是一個探索自然美潛藏奧祕的過程，這本身就是一個體驗美的過程。經歷這個過程“使我們的智力變得精緻和洗煉”^[29]，使我們的精神世界不斷得到昇華。“我們才在心靈深處感受到了真正的神的形象，真正的美的本質，真正的藝術的芬芳……這時，我們才從心底感到無比喜悅，並情不自禁地使人類理性得以發揚”^[30]。

(2) 數學有益於良好個性品質形成

由於數學是思維創造的產物，數學活動是思維創造活動，學習數學是思維的再創造過程，因而它有益於形成人的許多良好的個性品質。首先，數學可以激發人思維的興趣，激發其探索自然奧祕的好奇心。數學的實踐活動尤其是解決問題，實際是在失敗中進行探索，試圖找到一條成功的道路。通過嘗試、失敗、挫折的磨練，可以增強人的自信心與學習毅力，可以堅定學生的意志，使學生不畏錯誤，勇於探索。

在追求數學目標的過程中，通過對自己的方案進行不斷的反思、否定、批判，可以培養學生的批判能力，培養其正確的科學態度，及獨立思考，解決問題的能力。在學習數學過程中通過對自己的動機、自信、成就等不斷評價、評估，認識自己的價值，不斷對自己的行為進行監控、調整。這些內容對於學生追求人生目標，實現自我價值等方面也有遷移或示範作用。

4. 啓示

數學在人的發展中這種特殊的作用，愈來愈受到教育的關注。首先，現代教育普遍重視數學的思維價值，各國把培養學生的思維能力放在數學課程目標的中心地位。其中包括邏輯思維能力與形象思維能力的培養，並通過解決問題來達到訓練學生的數學思維。其次是重視數學對於人的道德與個性品質的作用。在處理知識與能力，能力與品質等方面，進行廣泛的研究與探索。忽視人的整個思維能力培養，僅以邏輯思維為主的課程已受到多方面挑戰。而那種把數學僅作為應用工具的觀點也受到廣泛的批評，數學課程愈來愈發揮它在促進人的發展方面的全方位功能。

三、數學：人類文化的重要組成部份

上文我們已論述，數學是人類認識自然的仲介，是自然科學的工具，是思想方法體系；數學是思維的工具，數學活動是一種創造與發現活動；數學同時是一種藝術。因此，數學是人類文化的重要組成部份。它在創造、保存、傳遞、交流、發展人類文化中充當著重要角色，發揮著巨大的作用。數學促進人類文化不斷進步，促進人類文明不斷邁向更高階段，數學精神也是人類文化精神的最高代表。

1. 數學是人類文化的有機組合部份

在人類文化的長河中，我們隨機取一個片段，都可以發現數學是其中的一個重要組成部份。古希臘、東方中國至今保存下來的文化遺產中，有很大部分是藝術與數學。數學在文化保存與傳播中發揮著潛在作用，並直接或間接地影響人的精神的改變。數學能幫助人們認識生活和世界，是人類從事普遍活動的有效工具，數學幫助並促進人類整個文化目標的實現。因此，數學應視作社會文化的一個方面。

從歷史角度考察，數學在不同的歷史發展時期，都扮演著重要的角色，發揮著重要作用。古希臘理性，導致希臘文化的興盛。古羅馬的專制，輕視數學，導致文化的衰落。文藝復興，也緣于恢復古希臘的理性，追根揭底仍與數學有不解之緣。近代工業技術與數學的互相促進，新技術革命起源於計算技術改進，現代網路世界更是與數學息息相關。數學發展促進了技術發展，技術發展也刺激了數學發展，二者共同促進了人類文化的發展。這是因為，數學與技術的共同發展，使物質得以迅速增長，人們隨之而來的對世界與自然的認識，即思想方法發生變革。這些變革促進了藝術等更多領域的變化，因此文化本身向前發展了。

同時，我們也應看到，數學與文化發展有同步速度現象。“數學還是一棵有生命力的樹，他隨著文明的興衰而榮枯”^[31]。當數學發展迅速時，正是人類文化發展最繁榮的時代。古希臘時

期，文藝復興之後的科學時代，等等都是例證。當數學發展緩慢時，也正是科學技術、文化藝術發展最緩慢的時代。歐洲中世紀長達千年的桎梏，儘管把數學捧作上帝，但上帝並不領情，中國明清數學的僵化，科技文化同樣衰落。這其中是否是數學起主導作用，還有爭議，但數學與文化息息相通，處於整個文化群體之中，這一點是不可否認的。“數學的生命力正是根植於養育她的文明的社會之中。事實上，數學一直是文明和文化的重要部份”^[32]。

“數學作爲文化的一個部份，又扮演不同的角色，發揮不同作用。因此，數學在文化方面的反映可以是宗教的、藝術的、實際的、技術的或是爲自身而研究的等等，因此，每種文化下有自己的數學”^[33]。由於人類發展的地域、種族等不同，物質與文化成分的不同，造成了早期數學發展的差異，因而文化也產生差異。這種差異形成遺傳力量（內部的差異）。

同時，我們又看到，數學作爲人們對自然界，宇宙的規則的認識，在人類進化的同一階段，人有共同認識自然的趨勢與水平。這樣，數學發展又有等同水平性。例如，不同的民族都想到以符號記數，想到數的運算，幾何和代數學的初步內容。正是這種文化上的等同性，才使得在一定階段，人類具有文化交流的可能與實現，人類智慧才得以傳播與交流，整個人類文化才獲得不斷的創新。“每種文化的數學都具有同等價值，因爲一切文化具有同等效力”^[34]。

數學作爲人類文化的組成部份，我們還可以從數學發展的力量來考察，Wilder 較早對此作了分析。他認爲，數學的發展是由其內部力量和外部力量共同決定的。內部力量指遺傳力量（包括知識成分與觀念成分），外部力量指環境力量（包括人類直接需要的物質成分和一般科學對數學的需要——文化成分）。Wilder斷言，數學發展的外部力量主要是其他科學，特別是物理科學的需要，而非人類物質生活的直接需要^[35]。把數學看成是一個由於起內在力量與外部力量共同作用，而處於不斷發展和進化之中的文化系統，數學活動就其性質來說是社會性的，數學家是社會成員，他們研究的是某種潛在的數學文化認爲是重要的問題，也即存在某種文化力量在促使人們去解決那些問題^[36]。儘管美學和哲學決定性地塑造了數學的特徵，並且作出像歐氏幾何和非歐氏幾何這樣不可超越貢獻，然而數學家登上純思維的頂峰，主要是借助於社會力量的推動。“如果這些力量不能爲數學家們注入活力，那麼他們就立刻會心疲力竭，然後他們就僅僅只能保持這門學科處於孤立的境地”^[37]。

2. 數學促進人類文化發展，促進人類文明進步

除了具有一般文化特徵之外，數學還具有自己獨特的性質。可概括爲：打開科學大門的鑰匙，科學的語言，思維的工具，一種思想方法，理性的藝術，充滿理性精神^[38]。這些獨特性，使數學具有獨特的文化價值，促進人類文化不斷發展，促進人類文明不斷進步。“數學一方面是出乎意料的實用性，一方面是審美的行動準繩”^[39] 構成了數學發展的兩大支柱。數學在文化中的地位，包括柏拉圖在內的許多哲學家把數學看作是文化的最高理想，這的確是個崇高的要求。

探索宇宙的規律，提供自然現象的合理結構，解決社會需要提出的問題，永遠是科學與生活的主題，而這些主題最終又歸到數學上。在美學原則指引下，數學確切告訴人們自然和宇宙是什麼，人類應該遵循什麼規律與規則。

總之，數學無論是追求美學而產生創新，還是作為工具解決現實世界中的問題，它所進行的活動都是對已有文化的重新整理或突破，是一種不斷創造的過程。正是通過數學的不斷加工，使人類既獲得物質方面的財富，又獲得精神的不斷昇華。數學在人類文化進步、文明發展中具有不可替代的作用。

3. 數學促進人類智慧的傳遞

數學是一種理性，又是一種技術，這種二重性幾乎只有數學才具有。技術的進步是高速的，而理性的進展猶如進化一樣，是相對緩慢的。作為技術的數學變化是巨大的，它必須跟隨有時甚至超前於飛速發展的科技步伐。然而作為理性的數學思想方法及精神等內容變化又相對緩慢。因此，兩千年前古希臘的許多數學思想方法，在今天對人的思維訓練等方面仍發揮著重要的作用，但一百年前（甚至幾十年前）的技術在今天已顯得陳舊。值得注意的是，理性一旦獲得突破，將給數學與科學帶來巨大的飛躍。“沒有非歐幾何，自然也就沒有相對論，沒有全部現代的物理以及以之為基礎的全部現代技術。那樣也不會有全部關於數學基礎的研究，不會有形式系統這樣的思想，不會有哥德爾定理，同樣也不會有電腦。更重要的是，沒有人類理性思維的高度發展，人的精神狀態會是什麼樣呢？”^[40]。同時還應注意到，在理性發展方面，“數學是兩個方向生長的，即向研究宇宙的深度，也向自身——作為人類的理性——的深度”^[41]。

實際上，“在最廣泛的意義上說，數學是一種精神，一種理性精神。正是這種精神，使得人類的思維得以運用最完美的程度，亦正是這種精神使得人類的所謂得以運用到最完善的程度，亦正是這種精神，試圖決定性影響人類的物質、道德和社會生活；試圖回答有關人類自身存在提出的問題；努力去理解和控制自然，盡力去探求和確立已經獲得知識的最深刻和最完美的內涵”^[42]。

注意區分技術的數學和精神的數學（理性的數學），對於認識數學促進人類進步是極為有益的。認識到數學不僅僅作為一種應用工具，而且是一種精神，至少從柏拉圖時代就開始。柏拉圖的學院雖培養社會、經濟、政治的人才，但門口卻掛著“不懂幾何者不許入內”的牌子^[43]。中國古代六藝也曾設過算學。西方教育史表明，數學歷來都作為貴族教育的一門課程。甚至現代美國著名的西點軍校也對數學學習有較高要求。這一切似乎不僅僅是重視數學的技術側面，更主要的可能是重視數學對人的精神方面的作用。

關於數學對人的精神作用的論述已有很多。古代的柏拉圖，近代的培根都有過深刻的闡述。柯朗明確要求數學教育改革，必須使學生“真正領悟數學是對科學思考和科學行動的基礎”^[44]。

克萊茵更一針見血指出：“數學學科並不是一系列技巧，這些技巧只不過是它微不足道的方面……技巧是將數學的激情、推理美和深刻的內涵剝落後的產物”^[45]。

近代科學尤其是現代高科技的迅猛發展，對數學技術要求愈來愈高，數學的技術側面也愈來愈受到重視。加上實用主義、功利主義的影響，二十世紀數學的地位一再受到挑戰。數學從自然科學的皇后變成奴婢，從作爲認識自然的仲介變成了服務性的工具。這種對數學的片面認識導致了數學教育的不公正改革（這從二十世紀幾次數學課程改革即可看出，另文研究）。這些改革忽視了數學對文化的作用，忽視了數學作爲文化活動的面目，僅把數學作爲一種技能或工具去傳授或訓練。

這種短視行爲，不僅導致對這門學科的厭惡與忽視，造成未來公民素質低下，而且會給整個人類文明與文化帶來巨大的損失。許多國家爲此已付出巨大的代價，今天對此有了較爲清醒的認識，在新的數學課程標準中，把數學精神方面的功用提到一個較高的水平。

4. 啓示

人類文化應當不斷向前發展，人類的智慧應當不斷傳遞。融理性和技術於一體的數學，對人類文化的傳遞與發展的作用，早已爲有識之士認識。數學教育除了提高人的認識，除了提高人的智慧，除了爲人提供應用工具之外，還擔負著傳遞文化的重要作用。今天各國的數學課程改革都在關注這個問題。

二十世紀數學教育經歷的幾次大的革命（F. Klein 的改革，新數運動，問題解決，大眾數學）都是與數學課程緊密相連的。對數學課程的改革最終又落到對數學價值的認識上。由於受到政治、哲學、技術等方面的影響與干預，不能正確全面的認識數學價值與作用，出現了種種行爲與指導上的偏差，曾給數學教育帶來不可挽救的損失，給人的素質培養帶來難以彌補的失誤。數學教育之一任務應幫助學生通過數學認識自然，包括培養學生的認識論、方法論、世界觀、自然觀等一系列內容。在此之下，才是數學的應用的工具性，二者不可偏廢，捨本逐末。之二任務是培養學生的思維與發展學生的身心並進。那種把數學當作機器，不僅使學生得不到應有的發展，而且實踐證明，其思維能力也得不到發展。之三任務是使學生認識數學在人類文化發展中的重要作用，重視技術，更重視理性與精神。以上三者 in 數學課程中應有機統一，相互協調，共同發展。

參考文獻

- [1][15][40][41] 齊民友，數學與文化，長沙湖南教育出版社，1991年，第20，216，218，217頁。
 [2] 柏拉圖，理想國，北京商務印書館，1986年，第268頁。

- [3][4][5][6][7][8][9][10][11][12][13][14] M. 克萊茵著, 郭思樂譯, 數學真理論, 廣東教育出版社, 1993年, 第51, 51, 109, 291, 260, 262, 271, 274, 279, 181, 241, 257頁。
- [16] [美] D. A. 格勞斯主編, 陳昌平等譯, 數學教育研究手冊, 上海教育出版社, 1999年, 第82頁。
- [17][19][22] 嚴士健主編, 面向二十一世紀的數學教育, 江蘇教育出版社, 1994年, 第5, 92-93, 266頁。
- [18][24][25][26][27][31][32][33][37][42][45] 鄧東皋等, 數學與文化, 北京大學出版社, 1990年, 第20, 20, 21, 21, 41, 46, 46, 46, 42, 46, 39頁。
- [20] 美國國家委員會, 人人關心數學教育的未來, 北京世界圖書出版公司, 1993年, 第9頁。
- [21] 孫小禮, 數學-科學-哲學, 北京光明日報出版社, 1988年, 第37頁。
- [23] J. E. Littlewood, 數學家的工作藝術, 數學譯林, 1983年, 第4期, 第60-66頁。
- [28][39] [美] L. A. 斯蒂恩主編, 馬純芳譯, 今日數學, 上海科技出版社, 1982年, 第12, 18頁。
- [29][30] [日] 米山國藏著, 毛正中等譯, 數學的思想方法與精神, 成都四川教育出版社, 1986年, 第203, 94頁。
- [34] [英] Paul Ernest 著, 齊建華等譯, 數學教育哲學, 上海教育出版社, 1998年, 第311頁。
- [35] 鄭毓信, 數學教育哲學, 成都四川教育出版社, 1995年, 第106頁。
- [36] 黃翔, 關於數學發展中若干現象的研究, 曲阜師範大學學報 [自然], 1995年, 第4期。
- [38] 張維忠, 數學文化與數學課程, 上海教育出版社, 1999年, 第79-97頁。
- [43] H. 伊夫斯著, 歐陽絳譯, 數學史概論, 太原山西人民出版社, 1986年, 第98頁。
- [44] R. 柯朗著, 汪浩譯, 數學是什麼, 長沙湖南教育出版社, 1985年, 第1頁。

通信地址: 南京師範大學數科院 郵編: 210097

—本文作者李善良現為南京師範大學課程與教學論專業博士生, 單教授為博士生導師—