古埃及的單位分數問題

文耀光

1. 引言

怎樣把一眞分數分解成若干個相異的「單位分數」(即分子爲1的分數) 之和是一個古埃及的數學問題。雖經歷數千載, 然而其吸引力絲毫未減, 至今仍然是一個有研究價値的題材。本文會介紹有關此問題的幾個算法式解法, 包括「埃及方法」(Egyptian Method)、「菲波那契法」(Fibonacci's Algorithm) 及「史都華法」(Stewart's Method) 等。此外, 本文亦會介紹把眞分數分解成固定數目的相異「單位分數」的一些研究結果, 以及一些尙未解決的問題。

2. 古埃及的方法

目前我們對古埃及數學的認識, 主要是來自兩卷用埃及僧侶文寫成的紙草書, 分別是成書於公元前1850年左右的莫斯科紙草書 (Moscow Mathematical Papyrus), 以及成書於公元前1650年左右的蘭德 (Rhind Papyrus) 紙草書, 亦稱阿默士 (Ahmes) 紙草書。蘭德紙草書的內容非常豐富, 包括有古埃及的乘法和除法的介紹、單位分數 (指分子是 1 的分數) 的用法、計算方程的試位法 (method of false position)、求圓面積的方法, 以及數學應用題的解法等。

古埃及的分數, 除了 $2/3$ 之外, 其餘都以若干個單位分數之和表示[1]。究竟原因何在? 至今仍然是一個謎, 不論數學史家或考古學家都沒有一確切的定論。在蘭德紙草書中, 有一張很大的分數表, 上面記載著很多形如 $2/n$ (其中 n 爲奇數) 的分數用 2 至 4 個相異單位分數之和表示的式子。

如果以 a, b, c, d 分別表示 $2/n$ 展成單位分數後的每個分數之分母, 而且把 a, b, c, d 由小至大排列, 那麼紙草書上的結果可以總結成下頁表1。

根據數學史家的分析, 當時的埃及人很可能已懂得運用以下的方法 (不妨稱之爲「埃及方法」(Egyptian Method)) [2] 把眞分數化成相異單位分數之和:

---

[1]單位分數的表示式不是唯一的, 因爲若給定一任意單位分數 $\frac{1}{n}$, 我們都可以把它分解成 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$。

[2]參考 Eves(1990) 頁61-62。

定理1: 設 p, q, r 爲正整數, 且 $r < pq$。若 $z = \frac{p+q}{r}$ 是一整數, 則 $\frac{r}{pq} = \frac{1}{pz} + \frac{1}{qz}$。

證明: $\frac{r}{pq} = \frac{r(p+q)}{pq(p+q)} = \frac{p+q}{pqz} = \frac{1}{pz} + \frac{1}{qz}$, 其中 $z = \frac{p+q}{r}$。

n	a	b	c	d
3	2	6		
5	3	15		
7	4	28		
11	6	66		
23	12	276		
35	30	42		
91	70	130		
13	8	52	104	
17	12	51	68	
19	12	76	114	
31	20	124	155	
37	24	111	296	
41	24	246	328	
47	30	141	470	
53	30	318	795	
59	36	236	531	
67	40	335	536	
71	40	568	710	
95	60	380	570	
97	56	679	776	
29	24	58	174	232
43	42	86	129	301
61	40	244	488	610
73	60	219	292	365
79	60	237	316	790
83	60	332	415	498
89	60	356	534	890
101	101	202	303	606

表1: 蘭德紙草書上的單位分數展開式

如果以 $r = 2$, $p = 1$ 及 $q = 2n+1$ 代入定理1, 可得以下結果:

推論1: 若 n 爲正整數, 則 $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

例1: 把 $2/91$ 分解成兩個單位分數之和。

解:
$$\frac{2}{91} = \frac{2}{1\times 91} = \frac{1}{46} + \frac{1}{4186}$$
或
$$\frac{2}{91} = \frac{2}{7\times 13} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

事實上, 表1中的首七個分數皆可以引用此法分解成兩個相異單位分數之和。不過, 我們會注意到古埃及人較喜愛選取 b 值較小的分解式作爲答案。譬如, 在例1 的結果中, 只有第二個出現在蘭德紙草書上。

大家可能會問:「表1中的 n 值都是奇數, 按理皆可引用定理1或推論1把它們分解成兩個相異單位分數之和, 爲何有些卻要分解成三個或四個單位分數之和呢? 而具體的分解法又是怎樣進行?」對於第一個問題, 由於缺乏第一手的古埃及文獻作爲參考, 現時考古學家或數學史家還沒找到一個完滿的答案。不過就第二個問題而言, 他們有以下的推斷:

埃及分解法

設 n 爲奇正整數。形如 $2/n$ 的眞分數可採用以下步驟分解成若干個相異單位分數之和:

步驟一: 選取一整數 m 使得 $m>n/2$, 且 $2m-n$ 可分解成若干個 m 的因數之和。應用以下的恆等式把 $2/n$ 分解成兩個相異分數: $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}+\frac{2m-n}{mn}$ 若 $2m-n=1$, 則分解完成。不然, 要進行步驟二。

步驟二: 把 $2m-n$ 分解成若干個 m 的因數之和, 則約簡後便可將 $(2m-n)/mn$ 分解成單位分數之和。

例2: 把 $2/13$ 分解成單位分數之和。

解:取 $m=8$, 得

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{2\times 8-13}{8\times 13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8\times 13}=\frac{1}{8}+\frac{2+1}{8\times 13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}.$$ [3]

例3: 把 $2/89$ 分解成單位分數之和。

解:取 $m=60$, 得:

$$\begin{aligned}\frac{2}{89}&=\frac{1}{60}+\frac{2\times 60-89}{60\times 89}=\frac{1}{60}+\frac{31}{60\times 89}\\&=\frac{1}{60}+\frac{15+10+6}{60\times 89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}.\end{aligned}$$

在表1之中, 分解後含有三個至四個單位分數的例子皆可以引用此法計算出來, 讀者不妨動手一試[4]。不過, 值得指出的是:「如何有效地選取一個比 $n/2$ 大的整數 m 使得 $2m-n$ 可分解成若干個 m 的因數之和? 」顯然是埃及分解法中最關鍵的一步。相信埃及人是採用「倍乘法」來進行的[5], 所以開始時宜選擇一含有多因子的 m 值較佳。以 $31\div 60$ 爲例 (參考例3), 其具體做法如下:

1	6		(代表 $60/60=1$)
1/2	30		(代表 $30/60=1/2$)
1/4	15	*	(代表 $15/60=1/4$)
1/6	10	*	(代表 $10/60=1/6$)
1/10	6	*	(代表 $6/60=1/10$)

把附有*號的數字相加得 $15+10+6=31$, 所以 $31/60$ 可以分解成單位分數 $1/4$, $1/6$ 及 $1/10$ 之和。雖然過程有點繁複, 不過仍不失爲一個好方法, 而且亦充分反映出古埃及人的數學智慧。

3. 菲波那契法

[3]注意: 若取 $m=7$, 可得 $\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$, 此結果與應用定理1分解所得一致。

[4] 對 $2/101$ 來說, 有數學史家認爲埃及人已懂得應用公式 $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}$ 直接進行分解。

[5] 參考梁宗巨 (1995) 頁156-157。

由於埃及分解法只集中討論形如 $2/n$ 的分數, 那麼對一般的眞分數而言, 是否亦一定可以把它分解成相異單位分數之和呢? 直到 1202 年, 才由中世紀的收學家斐波那契 (Fibonacci, 1170-1250) 給予肯定的答案, 並記載於其名著「算盤書」之中 [6], 但他沒有給出證明。直到 1880 年, 才由英國數學家西爾維斯特 (Sylvester, 1814-1897) 所補證, 因此斐波那契法有時亦被稱爲西爾維斯特方法 [7]。以下是這種方法的具體計算步驟:

斐波那契法 (即貪心算法)

設 a, b 爲互質正整數, 且 $a < b$ 。分數 a/b 可用以下的步驟分解成若干個相異單位分數之和:

步驟一: 用 a 除以 b, 得商數 q_1 及餘數 r_1。
把 a/b 記作:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1+1} + \frac{a-r}{b(q_1+1)}$$

(註: $\frac{1}{q_1+1}$ 是不大於 $\frac{a}{b}$ 的最大單位分數, 而 $\frac{a-r}{b(q_1+1)}$ 是剩餘分數。)
若 $a-r=1$, 則分解完成。不然, 要進行步驟二。

步驟二: 仿照步驟一求不大於 $\frac{a-r}{b(q_1+1)}$ 的最大單位分數及其對應的剩餘分數。重複此步驟, 直至剩餘分數成爲單位分數爲止。[8]

例4: 把 3/7 分解成單位分數之和。

解: $\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{21}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{231}$.

例5: 應用斐波那契法把 5/121 分解成單位分數之和。[9]

解:

$$\begin{aligned}\frac{5}{121} &= \frac{1}{25}+\frac{4}{3025} = \frac{1}{25}+\frac{1}{757}+\frac{3}{2289925} \\ &= \frac{1}{25}+\frac{1}{757}+\frac{1}{763309}+\frac{2}{1747920361825} \\ &= \frac{1}{25}+\frac{1}{757}+\frac{1}{763309}+\frac{1}{873960180913}+\frac{1}{1527612795642093418846225}\end{aligned}$$

[6] 有些作者稱此法爲「貪心算法」(Greedy Algorithm), 見 Graham (1994) 及 Hoffman(1998)。
[7] 參考 Eves(1990) 頁 61-62。
[8] 由於剩餘分數在約簡後的分子會較原先的小, 所以經過有限步之後, 最終的剩餘分數之分子必定是 1。
[9] 在 Gardner(1978) 與 Hoffman (1998) 中都曾討論此例, 但可能是運算繁複之故, 其列出的答案並不正確。

此結果與一已知的展開式 $\frac{5}{121}=\frac{1}{25}+\frac{1}{759}+\frac{1}{208725}$ 相比 [10], 可見由斐波那契法所得出的展開式並不一定以最少的項表示, 亦不保證展開後的單位分數中的最大分母是最小。

4. 史都華法

1964年, 史都華 (Stewart) 在其著作「Theory of Numbers」中提出了一個新方法, 就是不斷應用簡單恆等式 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 把一個眞分數分解爲單位分數之和。以下是這種方法的具體描述:

史都華法: 設 a, b 爲互質正整數, 且$a<b$。分數 a/b 可用以下的步驟分解成若干個相異單位分數之和:

步驟一: $$\frac{a}{b}=\underbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b}}_{\text{共 } a \text{ 個相同}}$$

步驟二: $$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}+\underbrace{\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b(b+1)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b(b+1)}\right)}_{\text{共 } a-1 \text{ 對相同}}$$

步驟三: $$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b(b+1)}+$$
$$\underbrace{\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{b(b+1)+1}+\frac{1}{b(b+1)[b(b+1)+1]}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{b(b+1)+1}+\frac{1}{b(b+1)[b(b+1)+1]}\right)}_{\text{共 } a-2 \text{ 對相同}}$$

$$\vdots$$

餘此類推, 不斷分拆直至右邊全部化成相異單位分數之和爲止。

例6: 把 3/7 分解成單位分數之和。

解:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7}&=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)\\&=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\right)+\left(\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{56}+\frac{1}{57}+\frac{1}{72}+\frac{1}{3192}\end{aligned}$$

若跟斐波那契法相比 (見例4), 直接應用史都華法所涉及的運算步驟和展開項都明顯較多。不過, 如果把過程中的步驟稍加改良, 此法有時可能會給出較佳的單位分數展開式。譬如以例6

[10] 參考 Beck, Bleicher and Patashnik(2000) 頁434。

中的第二步來說, 將兩個 1/8 之和化成 1/4, 另外將兩個 1/56 之和化成 1/28, 即可護得相異單位分數的展開式 $\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$。明顯單位分數中最大的分母比斐波那契法得出的 231 較小。不過, 是否每次在中間過程都可以將若干項合併成爲一項? 還是一個未解之謎!

5. 固定項數的分解問題

我們曾經指出過將眞分數展成若干個單位分數之和並不是唯一的, 於是數學家有興趣探討固定項數的分解問題, 譬如是2項、3項或4項等的展開。不過目前所得的結果仍然十分零碎, 沒有較一般的結果。本節會簡略介紹其中一些初等的結果, 以及一些尙末解決的問題之進展情況。

首先要介紹的是一個比 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 更一般的結果。

定理2: 設 n, x, y 爲正整數, 且 $x<y$。若 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 則 $x=n+d$, 及 $y=n(1+\frac{n}{d})$, 其中 $d<n$ 且 d 是 n^2 的正因數。換言之, $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+d}+\frac{d}{n(n+d)}$。

證明: 若 $1/n$ 可表爲相異分數 $1/x$ 及 $1/y$ 之和, 且 $x<y$, 則明顯 $x>n$。因此存在正整數 d 使得 $x=n+d$。若 $d<n$ 且 d 是 n^2 的因數, 則 $\frac{1}{y}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}=\frac{d}{n(n+d)}=\frac{1}{n(1+\frac{n}{d})}$, 故 $y=n(1+\frac{n}{d})$。

利用定理2, 可以立即得出一個判別眞分數是否可分解爲兩個相異單位分數之和的方法。(證明從略, 有興趣的讀者不妨動手一試。)

推論2: 設 m, n 爲正整數, 且$m<n$。若 $\frac{m}{n}$ 可表爲兩相異分數之和, 則 m 必能整除 $n+d$ 及 $n(1+\frac{n}{d})$, 其中 $d<n$ 且 d 是 n^2 的正因數。[11]

例7: 試列舉 2/99 分解成兩個相異單立分數之和的各種可能形式。

解: 考慮所有小於 99, 且可以整除 99^2 的正數 d 之可能值, 即: 1, 3, 9, 11, 27, 33 及 81。由於 $m=2$ 及 $n=99$, 明顯對 n 的各個可能値而言, m 都能整除 $n+d$ 及 $n(1+\frac{n}{d})$, 所以把 2/99 分解成兩個相異單立分數之和的可能形式如下:

$$\begin{aligned}\frac{2}{99}&=\frac{1}{50}+\frac{1}{4950}=\frac{1}{51}+\frac{1}{1683}=\frac{1}{54}+\frac{1}{594}\\&=\frac{1}{55}+\frac{1}{495}=\frac{1}{63}+\frac{1}{231}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}=\frac{1}{90}+\frac{1}{110}\end{aligned}$$

例8: 試判斷 4/5 是否可分解成兩個相異單立分數之和。

[11] 換言之, $\frac{m}{n}=\frac{1}{(n+d)/m}+\frac{1}{n(1+n/d)/m}$。

解: 考慮所有小於 5, 且可以整除 25 的正數 d 之可能數值僅有 1。由於 $m=4$ 及 $n=5$, 而 m 不能整除 $n+d$, 所以 4/5 不可能分解成兩個相異單立分數之和。

雖然 4/5 不可以分解成兩個相異單立分數之和, 但使用菲波那契法卻可以把它展成 $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$, 所以數學家有興趣解決一個更一般的問題:「對任意大於 1 的整數 n 而言, 是否都可以把 $4/n$ 分解成三個相異單立分數之和呢? 」對一些特別形式的 n 來說, 答案是肯定的[12]:

定理3: 對任意形如4k+3的正整數而言, 以下等式成立:

$$\frac{4}{4k+3}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(4k+3)}$$

證明很簡單, 此處從略。對於一般的 n 來說, 數學家保羅厄多斯 (Paul Erdös) 與愛爾斯特勞斯 (Ernst Strauss) 曾在 1948 年提出了以下的猜想:

厄多斯與斯特勞斯猜想:

對任意整數 $n\geq 4$ 而言, 不定方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 均有正整數解。[13]

對於這個猜想, 有不少數學家都曾經嘗試給出證明, 其中包括 Bernstein, Oblath, Rosati, Shapiro, Strauss, Yamamoto, Nicola Fanceschine 和柯召等人, 但都沒有成功。值得一提的一個研究結果是在 1978 年由 Franceschine 的碩士論文中發表的, 他驗證了所有 $n<10^8$ 的情況, 發覺上述猜想都成立。不過, 對任意整數 $n\geq 4$, 這個猜想是否成立至今仍是一個謎。[14]

類似的問題是:「對於任意整數 $n\geq 5$, $5/n$ 是否可分解成 3 個單位分數之和? 」數學家 Sierpinski, Palama, Stewart, Schinzel, Breusch, Graham, Hofmeister 及 Stoll 都曾經研究過, 不過同樣沒能徹底解決。

6. 結語

有關古埃及的單位分數問題, 其衍生的問題相當多。除了上面介紹的固定項數的展開問題外, 另一個是「最優的分解」問題。所謂最優分解, 是指將一個眞分數分解成相異單位分數之和的時候, 要求 (1) 項數最少、(2) 最大的分母最小, 或 (3) 分母的總和最小等, 這個研究方向很有挑戰性。因此除了要探求單位分數起源的問題外, 有關各類單位分數問題的研究, 至今仍然是頗有趣味和研究價值的。

[12] 參考 Shumer(1996) 頁5。
[13] 注意: 猜想中要求的 x, y, z 不一定是互異的。
[14] 見 Richard Guy (1994) 的 Unsolved Problems in Number Theory。

参考文獻

1. Beck, Bleicher and Crowe, *Excursions into Mathematics*, Massachusetts: A K Peters, 2000.
2. Graham, Knuth and Patashnik, Concrete Mathematics: *A Foundation for Computer Science*, New York: Addison-Wesley, 1994.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (6^{th} Edition), London: Saunders College Publishing, 1990.
4. Martin Gardner, *Puzzles and Number Theory problems arising from the curious fractions of ancient Egypt*, Scientific American, 239(4), 22-26, 1978.
5. Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*, New York: Hyperion, 1998. (中譯本: 米緒軍、章曉燕及繆衛東,「數字愛人」, 台北: 台灣商務印書館, 2001.)
6. Richard Guy, *Unsolved Problems in Number Theory* (2^{nd} Edition), New York: Springer Verlag, 1994.
7. Peter Shumer, *Introduction to Number Theory*, New York: PWS Publishing Company, 1996.
8. B.M. Stewart, *Theory of Numbers* (2^{nd} Edition), New York: Macmillan Company, 1964.
9. Nicola Franceschine, *Egytian Fractions*, MA Dissertation, CA: Sonoma State College, 1978.
10. 梁宗巨,「世界數學通史」, 遼寧: 遼寧教育出版社, 1995。

—本文作者現任職於香港教育學院數學系—