妙用坐標參數化法以解圓錐曲線諸弦中點圖形之描述問題

張國男

弁　言

近日審核大陸某學者投寄「數學傳播季刊」之稿件, 其中探討「二次曲線的弦的中點軌跡」約四、五百字, 所得結論 「於是, 二次曲線的弦的中點軌跡方程爲

$$2Ax\cos\alpha + B(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 2Cy\sin\alpha + D\cos\alpha + E\sin\alpha = 0 \tag{4}$$

(其中 α 爲弦的傾斜角)

根據各種弦的具體條件 (例如已知弦所在直線的斜率或過已知點或弦長爲定值等), 設法消去 (4) 中的 $\cos\alpha$ 、$\sin\alpha$, 即可得到所要求的二次曲線的弦的中點軌跡方程。」既不符實情, 且失之空泛。筆者深覺, 棄此專題誠可惜也, 故不揣譾陋, 特循其法, 作嚴謹、詳盡之推導, 而完成本篇, 以匡謬補闕, 並提供原作者及數學同好參考焉。

本文前三節針對圓錐曲線 (拋物線、橢圓、圓、雙曲線), 就 (i) 諸弦平行、(ii) 諸弦所在之直線共點及 (iii) 諸弦定長三款, 研究如何藉方程式, 或方程式及不等式, 以描述 (或謂刻畫、界定) 諸弦中點所構成之圖形 [計九則主題]; 第四節處理相交二直線之對應問題 [共三則副題]。此四節巧妙運用坐標參數化法, 俾削減繁瑣, 而附錄則簡介傳統解法, 並舉三例示範, 且略作評比。

在討論過程中, 爲方便計, 常將直角坐標平面上之點與其坐標 (實數對) 認同以互通, 有時方程式 (不等式) 與其圖形 (區域) 亦不予區分而混用。再者, 於本篇中, Φ 恆表空集, O 必指原點, a, b 及 p 俱係固定之正數, x_0 與 y_0 均爲固定之實數。併此聲明, 敬請亮鑒。

第一節 平行諸弦中點圖形之描述

爲免重複多次類似之推導, 先作如下之一般性論述。

在直角坐標平面上, 設有圓錐曲線 Γ, 其方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

其中 A,B,C,D,E 與 F俱係固定之實數 (A,B,C 三數不全爲零)。若 $M(\bar{x},\bar{y})$ 爲此平面上一定點, α 爲固定之實數, $\Lambda(M,\alpha)$ 爲過點 M 且平行於單位向量 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之直線, 則可將 $\Lambda(M,\alpha)$ 上點 P 之坐標參數化, 而表爲

$$(x,y)=(\bar{x}+s\cos\alpha,\bar{y}+s\sin\alpha), \tag{2}$$

其中參數 $s\in R$ (R 爲所有實數所構成之集合)。注意: 當 $s=0$ 時, $P=M$; 當 $s\neq 0$ 時, s 係由 M 至 P 之有向距離 (以 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之方向爲正向)。

形式上, 以 (2) 代入 (1), 可得

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)s^2+[2A\bar{x}\cos\alpha+B(\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha)\\&+2C\bar{y}\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha]s+A\bar{x}^2+B\bar{x}\bar{y}+C\bar{y}^2+D\bar{x}+E\bar{y}+F\\&=0.\end{aligned} \tag{3}$$

據是, 遂知 $\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha)$ 乃由相異二點 P_1 與 P_2 所構成之充要條件係 (3) 爲 s 之二次方程式且有相異二實根 $s=s_1$ (對應於 P_1) 及 $s=s_2$ (對應於P_2), 即下列之 (4) 與 (5):

$$A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha\neq 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&[2A\bar{x}\cos\alpha+B(\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha)+2C\bar{y}\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha]^2\\&-4(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)(A\bar{x}^2+B\bar{x}\bar{y}+C\bar{y}^2+D\bar{x}+E\bar{y}+F)\\&>0;\end{aligned} \tag{5}$$

又因 M 對應於 $s=0$, 故 $\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha)$ 乃由相異二點 P_1 與 P_2 所構成, 且線段 P_1P_2 中點爲 M 之充要條件係上列之 (4), (5) 及 $s_1+s_2=0$, 即 (4), (5) 及由根與係數之關係可得之

$$2A\bar{x}\cos\alpha+B(\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha)+2C\bar{y}\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0. \tag{6}$$

顯然, 此結果可改述如下:

$\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha)$ 乃由相異二點 P_1 與 P_2 所構成, 且線段 P_1P_2 中點爲 $M(\bar{x},\bar{y}) \Leftrightarrow \quad 2A\bar{x}\cos\alpha+B(\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha)+2C\bar{y}\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0$,

$$(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)(A\bar{x}^2+B\bar{x}\bar{y}+C\bar{y}^2+D\bar{x}+E\bar{y}+F)<0. \quad (7)$$

事實上, 前示 (7) 之推導亦可濃縮如次: 以 (2) 代入 (1), 可得 (3), 遂知 $\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha)$ 乃由相異二點 P_1 (對應於 $s=s_1$) 與 P_2 (對應於 $s=s_2$) 所構成, 且線段 P_1P_2 中點爲 $M(\bar{x},\bar{y})$ (對應於 $s=0$) 之充要條件, 係 (3) 爲 s 之二次方程式, 且有絕對值相等、符號相反之實根 s_1 及 s_2 ($s_1+s_2=0, s_1s_2<0$)。據此及根與係數之關係, 即得 (7) 矣。

本節將探究圓錐曲線之所有平行弦之中點所構成之圖形。因平面圖像之形狀與直角坐標系之選取無關, 爲方便計, 不妨假設所予圓錐曲線 Γ 之方程式爲 $x^2=4py$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。[其中, a, b 與 p 皆爲固定之正數, 已於弁言末段聲明矣。下俱同此, 不再贅述。] 上示三式可稱爲圓錐曲線之範式。

備註: 任一圓錐曲線與任一直線之交點個數必屬於 $\{0,1,2\}$。[可設圓錐曲線之方程式爲範式, 直線之方程式爲 $y=mx+k$ 或 $x=c$, 以驗證此項基本事實。]

[I] Γ 為拋物線之情況

設 Γ 爲拋物線 $x^2=4py$, Ω_α 爲平行於向量 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (7) 中, 置 $A=1$, $E=-4p$, $B=C=D=F=0$, 可知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha \Leftrightarrow \bar{x}\cos\alpha=2p\sin\alpha$ 且 $(\bar{x}^2-4p\bar{y})\cos^2\alpha<0$, 亦即

$$(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha \ \Leftrightarrow \bar{x}\cos\alpha=2p\sin\alpha, \quad \bar{x}^2<4p\bar{y}. \qquad (7.\mathrm{I})$$

若 $\cos\alpha=0$, 則據 (7.I) 知 $\Omega_\alpha=\Phi$, 無圖形 (即無縱向弦)。

若 $\cos\alpha\neq 0$, 則據 (7.I) 知 Ω_α 即直線 $x=2p\tan\alpha$ 在 Γ 內部之部份。

[II] Γ 為橢圓或圓之情況

設 Γ 爲橢圓或圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, Ω_α 爲平行於向量 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (7) 中, 置 $A=\frac{1}{a^2}$, $C=\frac{1}{b^2}$, $F=-1$, $B=D=E=0$, 並注意 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}>0 \ \forall\ \alpha\in R$, 可知

$$(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha \ \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x}+\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y}=0, \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}<1. \qquad (7.\mathrm{II})$$

因此, Ω_α 即直線 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x+\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 在 Γ 內部之部份。

[III] Γ 為雙曲線之情況

設 Γ 為雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, Ω_α 為平行於向量 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (7) 中, 置 $A=\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $F=-1$, $B=D=E=0$, 可知

$$(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha \;\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y}=0,\quad (\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}-1)<0. \quad (7.\mathrm{III})$$

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}=\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 (7.III) 知 $\Omega_\alpha=\Phi$, 無圖形 (即無斜率為 $\tan\alpha=\pm\frac{b}{a}$ 之弦)。

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}<\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 (7.III) 知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha\Leftrightarrow$ $\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y}=0$, $\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}>1$。將方程式 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 與不等式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1$ 聯立, 實際求解集合, 即可推得此時 Ω_α 為直線 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 除去其與 Γ 二交點間之線段。[此二交點為 (x',y') 與 $(-x',-y')$, 其中 $x'=\frac{a^2\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}}$, $y'=\frac{b^2\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}}$。]

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}>\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 (7.III) 知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega_\alpha\;\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y}=0$, $\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}<1$。

仿上處理, 即可推得此時 Ω_α 為直線 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ (全部)。

第二節　所在直線共點諸弦中點圖形之描述

若 P_0 為圓錐曲線 Γ 所在平面上之一定點, 則可考慮過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線。本節將描述如是直線對應弦之中點所構成之圖形。

[I] Γ 為拋物線之情況

設Γ 為拋物線 $x^2=4py$, $P_0=(x_0,y_0)$, Ω 為過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線所對應之弦之中點所構成之圖形。[其中 x_0 與 y_0 均為固定之實數, 已於弁言末段聲明矣。下俱同此, 不再贅述。]

由 (7.I), 可知 $(x_0,y_0)\in\Omega\Leftrightarrow$ 有 $\alpha\in R$ 能使 $x_0\cos\alpha-2p\sin\alpha=0$, 且 $x_0^2<4py_0$。但 $\langle x_0,-2p\rangle$ 非零向量, 必有單位向量 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 與之垂直, 故二者之內積 $x_0\cos\alpha-2p\sin\alpha=0$ 。[詳言之: 因 $\langle x_0,-2p\rangle$ 非零向量, 必有 $\beta\in R$ 能使 $\langle x_0,-2p\rangle=|\langle x_0,-2p\rangle|\langle\cos\beta,\sin\beta\rangle$。令 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$, 則 $\langle x_0,-2p\rangle$ 與 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 垂直, 其內積 $x_0\cos\alpha-2p\sin\alpha=0$。] 因此, $(x_0,y_0)\in\Omega\Leftrightarrow x_0^2<4py_0$。

由 (7.I), 又知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\backslash\{P_0\}\Leftrightarrow(\bar{x}-x_0)\bar{x}=2p(\bar{y}-y_0)$, $\bar{x}^2<4p\bar{y}$, $(\bar{x},\bar{y})\neq(x_0,y_0)$。

綜上, 推得 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\Leftrightarrow(\bar{x}-x_0)\bar{x}=2p(\bar{y}-y_0)$ 且 $\bar{x}^2<4p\bar{y}$。是故, Ω 可由方程式 $(x-x_0)x=2p(y-y_0)$ 與不等式 $x^2<4py$ 聯合界定之, Ω 即方程式 $(x-x_0)x=2p(y-y_0)$ 之圖形 Ψ [爲拋物線] 在 Γ 內部之部份。

由上, 有 $(x,y)\in\Omega\Leftrightarrow y=\frac{(x-x_0)x+2py_0}{2p}$ 且 $2[(x-x_0)x+2py_0]-x^2=x^2-2x_0x+4py_0>0$。

當 P_0 在 Γ 之外部時, $x^2-2x_0x+4py_0\le 0\Leftrightarrow x_0-\sqrt{x_0^2-4py_0}\le x\le x_0+\sqrt{x_0^2-4py_0}$, 據上遂知 Ω 即 Ψ 除去其弧 $Q_1P_0Q_2$, 其中 Q_1 及 Q_2 爲 Ψ 與 Γ 之交點 [交點之 x 坐標爲 $x_0\pm\sqrt{x_0^2-4py_0}$。]

當 P_0 在 Γ 上時, $x^2-2x_0x+4py_0>0\Leftrightarrow x\neq x_0$, 據上遂知 Ω 即 Ψ 除去 P_0。

當 P_0 在 Γ 之內部時, $x^2-2x_0x+4py_0>0\ \forall x\in R$, 據上遂知 $\Omega=\Psi$。

[II] Γ 為橢圓或圓之情況

設 Γ 爲橢圓或圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P_0=(x_0,y_0)$, Ω 爲過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線所對應之弦之中點所構成之圖形。

由 (7.II), 可知 $(x_0,y_0)\in\Omega\Leftrightarrow$ 有 $\alpha\in R$ 能使 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0+\frac{\sin\alpha}{b^2}y_0=0$, 且 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$。顯然, 當 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 時, $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0+\frac{\sin\alpha}{b^2}y_0=0\ \forall\alpha\in R$; 再者, 當 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 時, $\langle\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\rangle$ 非零向量, 確有 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 與之垂直, 故二者之內積 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0+\frac{\sin\alpha}{b^2}y_0=0$。因此, $(x_0,y_0)\in\Omega\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$。

由 (7.II), 又知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\backslash\{P_0\}\Leftrightarrow\frac{(\bar{x}-x_0)\bar{x}}{a^2}+\frac{(\bar{y}-y_0)\bar{y}}{b^2}=0$, $\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}<1$, $(\bar{x},\bar{y})\neq(x_0,y_0)$。

綜上, 推得 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\Leftrightarrow\frac{(\bar{x}-x_0)\bar{x}}{a^2}+\frac{(\bar{y}-y_0)\bar{y}}{b^2}=0$ 且 $\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}<1$。是故, Ω 可由方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}+\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 與不等式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$ 聯合界定之, Ω 即方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}+\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 之圖形 Ψ 在 Γ 內部之部份。

若 $P_0\neq O$, 則 Ψ 爲橢圓 $(a\neq b)$ 或圓 $(a=b)$。此時, 設 Υ 爲直線 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, 則 Υ 分割坐標平面爲 Υ_+ 與 Υ_- 二半平面 (Υ 之二側), 其中

$$\Upsilon_+=\{(x,y)|\tfrac{x_0x}{a^2}+\tfrac{y_0y}{b^2}>1\},$$
$$\Upsilon_-=\{(x,y)|\tfrac{x_0x}{a^2}+\tfrac{y_0y}{b^2}<1\}.$$

注意 $\Psi\cap\Upsilon=\Gamma\cap\Upsilon(=\Psi\cap\Gamma)$ 及 $O\in\Omega=\Psi\cap\Upsilon_-$, 實際試解方程組 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 與 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ (分 $y_0\neq 0$ 及 $y_0=0$ 二種情形處理之), 可知: P_0 在 Γ 之外部時, Ψ 與 Υ 有相異二交點 Q_1 及 Q_2 [交點之 x 坐標爲 $\frac{a^2b^2x_0\pm a^2y_0\sqrt{r}}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}$, y 坐標爲 $\frac{a^2b^2y_0\mp b^2x_0\sqrt{r}}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}$, 其中 $r=b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2$。($Q_1$, Q_2 亦爲 Ψ 與 Γ 之交點)], Ω 即 Ψ 除去其弧 $Q_1P_0Q_2$; P_0 在 Γ 上時, P_0 爲 Ψ 與 Υ 之唯一交點, Υ 切 Ψ 於 P_0, Ω 即 Ψ 除去 P_0; P_0 在 Γ 之內部且 $P_0\neq O$ 時, Ψ 與 Υ 不相交, $\Omega=\Psi$。此外, $P_0=O$ 時, Ψ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, Ω 即原點。

[III] Γ 為雙曲線之情況

設 Γ 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $P_0 = (x_0, y_0)$, Ω 爲過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線所對應之弦之中點所構成之圖形, Ω_α 爲平行於 $\langle \cos\alpha, \sin\alpha \rangle$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

爲便引用, 特將 (7.III) 更改編號, 而重述於下:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_\alpha \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x} - \frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y} = 0, \quad (\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0. \qquad \text{(H.1)}$$

據 (H.1), 可推得

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_\alpha \setminus \{O\} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x} - \frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y} = 0, \quad (\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) > 0. \qquad \text{(H.2)}$$

茲證如次:

(i) 設 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_\alpha \setminus \{O\}$。據此與 (H.1), 有 $\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x} - \frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y} = 0$, $(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0$ 及 $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$。若 $\bar{x} \neq 0$, 則 $\frac{\bar{x}^2}{a^2}(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}) = \frac{\sin^2\alpha}{b^4}\bar{y}^2 - \frac{\sin^2\alpha}{a^2b^2}\bar{x}^2 = \frac{\sin^2\alpha}{b^2}(\frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{x}^2}{a^2})$, 故 $\frac{\sin^2\alpha}{b^2}(\frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{x}^2}{a^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) = \frac{\bar{x}^2}{a^2}(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0$, 遂知 $(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) > 0$; 若 $\bar{y} \neq 0$, 仿此 (同理) 可證 $(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) > 0$。

(ii) 設 $\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x} - \frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y} = 0$, 且 $(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) > 0$, 則必 $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$, 故 $\bar{x} \neq 0$ 與 $\bar{y} \neq 0$ 至少有一爲眞。若 $\bar{x} \neq 0$, 必 $\sin\alpha \neq 0$ (否則 $\sin\alpha = 0$, $\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y} = 0$, $\cos\alpha = \pm 1$, $\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x} \neq 0$, 矛盾!), 而 $\frac{\bar{x}^2}{a^2}(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}) = \frac{\sin^2\alpha}{b^4}\bar{y}^2 - \frac{\sin^2\alpha}{a^2b^2}\bar{x}^2 = \frac{\sin^2\alpha}{b^2}(\frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{x}^2}{a^2})$, 故 $\frac{\bar{x}^2}{a^2}(\frac{\cos^2\alpha}{a^a} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) = \frac{\sin^2\alpha}{b^2}(\frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{x}^2}{a^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0$, 遂知 $(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0$; 若 $\bar{y} \neq 0$, 仿此 (同理) 可證 $(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) < 0$。據 (H.1), 得 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_\alpha$。

設 Γ_1 爲直線 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, Γ_2 爲直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, 並設 R_1, R_2 與 R_3 分別爲由不等式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0$, $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1) \leq 0$ (即 $0 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$) 與 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ 所界定之平面區域。當然, $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 即 Γ 之二條漸近線 ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$), R_1 爲 $y = \frac{b}{a}|x|$ 之上部與 $y = -\frac{b}{a}|x|$ 之下部二者之聯集, R_3 係 Γ 之內部, $R_4 = R_1 \cup R_3$ 可由不等式 $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1) > 0$ 界定之。

$\langle 1^\circ \rangle$ 當 $P_0 = O$ 時

於 (H.1) 中, 置 $\alpha = 0$, 可知 $(0, 0) \in \Omega$。據此與 (H.2), 又知 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \setminus \{O\} \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 0$ 且 $(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1) > 0$。合之, 推得 Ω 即原點。[亦可不用 (H.1) 與 (H.2) 而推導如次: 考慮過原點之所有直線。易證其中斜率絕對值小於 $\frac{b}{a}$ 者, 均與 Γ 有對稱於原點之相異二交點, 其餘俱與 Γ 不相交。由是, 遂知 Ω 爲原點。]

以下, 假設 $P_0 \neq O$, 繼續探討之。

因 $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ 時, $\frac{\cos\alpha}{a^2}\bar{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\bar{y}=0\ \forall\alpha\in R$, 故據 (H.1) 推得

$$O\in\Omega\setminus\{P_0\}\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>0. \tag{H.3}$$

由 (H.2), 可知 $P_0\in\Omega\setminus\{O\}\Leftrightarrow$ 有 $\alpha\in R$ 能使 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0-\frac{\sin\alpha}{b^2}y_0=0$, 且 $(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2})(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1)>0$。但 $\langle\frac{x_0}{a^2},-\frac{y_0}{b^2}\rangle$ 非零向量, 必有 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 與之垂直, 故二者之內積 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0-\frac{\sin\alpha}{b^2}y_0=0$。因此, $P_0\in\Omega\setminus\{O\}\Leftrightarrow(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2})\ (\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1)>0$。

由 (H.2), 又知 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\setminus\{O,P_0\}\Leftrightarrow\frac{(\bar{x}-x_0)\bar{x}}{a^2}-\frac{(\bar{y}-y_0)\bar{y}}{b^2}=0$, $(\frac{\bar{x}^2}{\alpha^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}-1)>0$, $(\bar{x},\bar{y})\neq(x_0,y_0)$。

綜上二段論述, 推得 $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\setminus\{O\}\Leftrightarrow\frac{(\bar{x}-x_0)\bar{x}}{a^2}-\frac{(\bar{y}-y_0)\bar{y}}{b^2}=0$ 且 $(\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2})(\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}-1)>0$。是故, $\Omega\setminus\{O\}$ 可由方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 與不等式 $(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1)>0$ 聯合界定之。易言之:

$$\Omega\setminus\{O\}\text{ 爲方程式 }\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0\text{ 之圖形 }\Psi\text{ 在 }R_4\text{ 之部份。} \tag{H.4}$$

若 Υ_0 及 Υ 分別表直線 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=0$ 及 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$, 則顯然可知 $\Psi\cap\Gamma_0=\Psi\cap\Upsilon_0$, $\Psi\cap\Gamma=\Psi\cap\Upsilon$, 且

$$\Psi\cap R_4\text{ 即 }\Psi\text{ 除去其在平行二直線 }\Upsilon_0\text{ 與 }\Upsilon\text{ 間之部份。} \tag{H.5}$$

$\langle 2^\circ\rangle$ 當 $P_0\in\Gamma_0\setminus\{O\}$ 時

據 (H.3), 知 $O\notin\Omega$。合此與 (H.4), 推得 Ω 即 Ψ [爲相交二直線 $\frac{2x-x_0}{a}-\frac{2y-y_0}{b}=0$ 及 $\frac{2x-x_0}{a}+\frac{2y-y_0}{b}=0$] 在 R_4 之部份。

設 $Q_0=(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2})$, 而 Ψ_+ 及 Ψ_- 分別爲直線 $\frac{2x-x_0}{a}+\frac{2y-y_0}{b}=0$ 及 $\frac{2x-x_0}{a}-\frac{2y-y_0}{b}=0$。

(i) 若 $P_0\in\Gamma_1\setminus\{O\}$, 則 $\Psi_-=\Upsilon_0$, 據首段所得及 (H.5) 知 $\Omega=\Psi\cap R_4$ 即 Ψ_+ 除去線段 Q_0Q_+, 其中 Q_+ 爲 Ψ_+ 與 Υ 之交點。

(ii) 同理, 若 $P_0\in\Gamma_2\setminus\{O\}$, 則 $\Psi_+=\Upsilon_0$, $\Omega=\Psi\cap R_4$ 即 Ψ_- 除去線段 Q_0Q_-, 其中 Q_- 爲 Ψ_- 與 Υ 之交點。

$\langle 3^\circ\rangle$ 當 $P_0\in R_1$ 時

據 (H.3), 知 $O\notin\Omega$。合此與 (H.4), 推得 Ω 即 Ψ [爲雙曲線] 在 R_4 之部份。

設 Ψ 過 O 之一支爲 Ψ_1, 其過 P_0 之一支爲 Ψ_2。

(i) 顯然, 由 Ψ 之漸近線 $\frac{2x-x_0}{a}-\frac{2y-y_0}{b}=0$ 與 $\frac{2x-x_0}{a}+\frac{2y-y_0}{b}=0$ 可構成上、下、左、右四角, 其公共角頂爲 $(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2})$, 其邊分別平行於 Γ_1 與 Γ_2。若 $y_0>0$, 則 Ψ_2 在前述上角之上方 (即內部), 且此上角在 $y=\frac{b}{a}|x|$ 之上部, 故 Ψ_2 在 $y=\frac{b}{a}|x|$ 之上部; 若 $y_0<0$, 則由對稱性即知 Ψ_2 在 $y=-\frac{b}{a}|x|$ 之下部。總之, Ψ_2 必在 R_1 內。

(ii) 將 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 與 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 二式相減, 可求得 $y=\frac{b^2(x_0x-a^2)}{a^2y_0}$。以此代入首式, 並整理之, 則所獲二次方程式 $(a^2y_0^2-b^2x_0^2)x^2+2a^2b^2x_0x-a^4(y_0^2+b^2)=0$ 有相異二實根 [其判別式 $4a^4y_0^2(a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2)>0$], 故 Γ 與 Ψ (Υ 與 Ψ) 有相異二交點 Q_1 及 Q_2。據此與 (i), 即知 Q_1, $Q_2\in\Psi_1$。

(iii) 利用切線公式, 易證 Υ_0 切 Ψ_1 於 O。

綜上論述及 (H.5), 推得 Ω 爲 Ψ 除去其弧 Q_1OQ_2。

$\langle 4^\circ\rangle$ 當 $P_0\in R_2\setminus\Gamma_0$ 時

據 (H.3), 知 $O\in\Omega$。合此與 (H.4), 推得 Ω 即 Ψ [爲雙曲線] 在 R_4 之部份添上原點。

設 Ψ 過 O 之一支爲 Ψ_1, 其過 P_0 之一支爲 Ψ_2。

(i) 實際解方程組 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 與 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$, 易知 O 爲 Γ_0 與 Ψ 之唯一交點。若 $y_0=0$, 則 Ψ_1 在 O 有縱向切線 Υ_0; 若 $y_0\neq 0$, 則 Ψ_1 在 O 之切線 Υ_0 之斜率爲 $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, 而 $\frac{x_0^2}{a^2}>\frac{y_0^2}{b^2}$, 故此斜率之絕對值必大於 Γ_1 與 Γ_2 斜率之絕對值 $\frac{b}{a}$。合之, 推得 $\Psi_1\setminus\{O\}$ 必在 R_1 內。

(ii) 當 $P_0\in R_2\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma)$ [即 $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$] 時, 將 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 與 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 二式相減, 可求得 $x=\frac{a^2(y_0y+b^2)}{b^2x_0}$。以此代入首式, 並整理之, 則所獲二次方程式 $(b^2x_0^2-a^2y_0^2)y^2-2a^2b^2y_0y+b^4(x_0^2-a^2)=0$ 有相異二實根 [其判別式 $4b^4x_0^2(-b^2x_0^2+a^2y_0^2+a^2b^2)>0$], 故 Γ 與 Ψ (Υ 與 Ψ) 有相異二交點 Q_1 及 Q_2。據此與 (i), 即得 Q_1, $Q_2\in\Psi_2$。

(iii) 當 $P_0\in\Gamma$ 時, Υ 切 Ψ_2 於 P_0。

綜上論述及 (H.5), 遂知: $P_0\in R_2\setminus(\Gamma_0\cup\Gamma)$ 時, Ω 爲 Ψ 除去其弧 $Q_1P_0Q_2$; $P_0\in\Gamma$ 時, Ω 爲 Ψ 除去 P_0。

$\langle 5^\circ\rangle$ 當 $P_0\in R_3$ 時

據 (H.3), 知 $O\in\Omega$。合此與 (H.4), 推得 Ω 即 Ψ [爲雙曲線] 在 R_4 之部份添上原點。設 Ψ 過 O 之一支爲 Ψ_1, 其過 P_0 之一支爲 Ψ_2。仿 $\langle 4^\circ\rangle$ (i) 推導, 可知 $\Psi_1\setminus\{O\}$ 必在 R_1 內。仿 $\langle 4^\circ\rangle$ (ii) 推導, 可證此時 $\Psi\cap\Gamma=\Phi$; 據是, 注意 Ψ_2 上有點 P_0 在 R_3 內 (R_3 爲 Γ 之內部), 即知 R_3 必含 Ψ_2。綜之, 遂有 $\Omega=\Psi$。[另解: 由 Υ_0 切 Ψ_1 於 O, 與 $\Psi\cap\Upsilon=\Phi$, 可

知平行二直線 Υ_0 與 Υ 必在 Ψ_1 與 Ψ_2 之間, 即 Υ_0 與 Υ 之間必無 $\Psi\setminus\{O\}$ 之點, 據 (H.5) 遂得 $\Psi\cap R_4=\Psi\setminus\{O\}$, 故 $\Omega=\Psi$。]

備註: (一) [I]亦可探討如次:

$\langle 1°\rangle$ 當 P_0 在 Γ 之外部或在 Γ 上時, 由 (7.I) 即知 (1) $P_0\notin\Omega$, (2) $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\Leftrightarrow(\bar{x}-x_0)\bar{x}=2p(\bar{y}-y_0)$ 且 $\bar{x}^2<4p\bar{y}$, 故 Ω 即方程式 $(x-x_0)x=2p(y-y_0)$ 之圖形 Ψ [爲拋物線] 在 Γ 內部之部份。進一步, 可證: P_0 在 Γ 之外部時, Ω 即 Ψ 除去其弧 $Q_1P_0Q_2$, 其中 Q_1 及 Q_2 爲 Ψ 與 Γ 之相異二交點; P_0 在 Γ 上時, Ω 即 Ψ 除去 P_0。

$\langle 2°\rangle$ 當 P_0 在 Γ 之內部時, 由 (7.I) 知 $P_0\in\Omega\Leftrightarrow$ 有 $\alpha\in R$ 能使 $x_0\cos\alpha-2p\sin\alpha=0$。易證確有如是之 α, 故 $P_0\in\Omega$。據 (7.I), 仿 $\langle 1°\rangle$ 推導之, 可知 $\Omega\setminus\{P_0\}$ 即方程式 $(x-x_0)x=2p(y-y_0)$ 之圖形 Ψ [爲拋物線] 在 Γ 內部之部份除去 P_0。又因 $P_0\in\Omega$ (見上), 且 P_0 在 Ψ 上, 故 Ω 爲 Ψ 在Γ 內部之部份。進一步, 可推得 $\Omega=\Psi$。

(二) 當然, [II] 亦可據 (7.II) 仿 (一) 分 $\langle 1°\rangle$ P_0 在 Γ 之外部或在 Γ 上及 $\langle 2°\rangle$ P_0 在 Γ 之內部二款處理之。

(三) [III] $\langle 2°\rangle\sim\langle 5°\rangle$ 之推導亦可不用 (H.3) 及 (H.4), 茲以 $\langle 4°\rangle$ 爲例示範如次: 此時, 注意 $P_0\neq O$ 且 $P_0\notin R_4$, 由 (H.2) 即知 (1) $P_0\notin\Omega$, (2) $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega\setminus\{O\}\Leftrightarrow\frac{(\bar{x}-x_0)\bar{x}}{a^2}-\frac{(\bar{y}-y_0)\bar{y}}{b^2}=0$ 且 $(\bar{x},\bar{y})\in R_4$。再者, 據 $P_0\neq O$ 與 (H.1) 知 $O\in\Omega\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>0$, 而由 $P_0\in R_2\setminus\Gamma_0$ 則有 $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\leq 1$, 故 $O\in\Omega$。合之, 推得 Ω 即方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 之圖形 Ψ [爲雙曲線] 在 R_4 之部份添上原點。下接原示第二至末段之論述。

第三節 定長諸弦中點圖形之描述

本節將設法描述圓錐曲線定長諸弦之中點所構成之圖形。

沿用第一節一般性論述中之符號, 易知: 若 l 爲固定之正數, 則 $\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha)$ 乃由 P_1 與 P_2 二點所構成, $|P_1P_2|=2l$, 且線段 P_1P_2 中點爲 M 之充要條件係 (3) 爲 s 之二次方程式, 且其二根 s_1 與 s_2 恰爲 l 與 $-l(s_1+s_2=0,\ s_1s_2=-l^2)$。據此及根與係數之關係, 即得下述結果:

$$\Gamma\cap\Lambda(M,\alpha) \text{ 乃由 } P_1 \text{ 與 } P_2 \text{ 二點所構成}, |P_1P_2|=2l, \text{ 且線段 } P_1P_2 \text{ 中點爲 } M(\overline{x},\overline{y})\Leftrightarrow$$

$$2A\overline{x}\cos\alpha+B(\overline{x}\sin\alpha+\overline{y}\cos\alpha)+2C\overline{y}\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0,$$
$$\frac{A\overline{x}^2+B\overline{x}\,\overline{y}+C\overline{y}^2+D\overline{x}+E\overline{y}+F}{A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha}=-l^2. \tag{8}$$

以下假設所予圓錐曲線 Γ 之方程式爲第一節所示之範式, 俾便推導。

[I] Γ 為抛物線之情況

設 Γ 爲抛物線 $x^2 = 4py$, l 爲固定之正數, Ω 係長度爲 $2l$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (8) 中, 置 $A = 1$, $E = -4p$, $B = C = D = F = 0$, 可知

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega \Leftrightarrow \text{有 } \alpha \in R \text{ 能使} \\ &\qquad \overline{x}\cos\alpha - 2p\sin\alpha = 0, \qquad\qquad (\mathrm{I.1}) \\ &\qquad l^2\cos^2\alpha = 4p\overline{y} - \overline{x}^2. \qquad\qquad (\mathrm{I.2}) \end{aligned}\right\} \tag{8.I}$$

據 (8.I), 於 (I.1) 及 (I.2) 中, 置 $\alpha = 0$, 可知 $(0, \frac{l^2}{4p}) \in \Omega$, 故 $\Omega \neq \Phi$。[先此驗明 $\Omega \neq \Phi$, 以示下段之論述並非空談。]

若 $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$, 則據 (8.I) 知必有 $\alpha \in R$ 能使上列之 (I.2) 及下列之 (I.3) 俱成立:

$$\overline{x}^2\cos^2\alpha - 4p^2\sin^2\alpha = 0. \tag{I.3}$$

由 (I.2) 與 (I.3), 顯然可得

$$\cos^2\alpha = \frac{4p\overline{y} - \overline{x}^2}{l^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{\overline{x}^2(4p\overline{y} - \overline{x}^2)}{4l^2p^2},$$

故 $(\overline{x}^2 + 4p^2)(4p\overline{y} - \overline{x}^2) = 4l^2p^2$, 遂知 $(\overline{x}, \overline{y})$ 在方程式

$$(x^2 + 4p^2)(4py - x^2) = 4l^2p^2 \tag{I.4}$$

之圖形 Ψ 上。

[據上 (或實際代入), 可知 $(0, \frac{l^2}{4p}) \in \Psi$, 故 $\Psi \neq \Phi$。]

反之, 若 $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Psi$, 則必有 $\alpha \in R$ 能使

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4p\overline{y} - \overline{x}^2}}{l}, \quad \sin\alpha = \frac{\overline{x}\sqrt{4p\overline{y} - \overline{x}^2}}{2lp},$$

因而 (I.1) 與 (I.2) 俱成立, 據 (8.I) 遂知 $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$。

合上, 推得 Ω 即方程式 (I.4) 之圖形。

[II] Γ 為橢圓或圓之情況

設 Γ 爲橢圓或圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l 爲固定之正數, Ω 係長度爲 $2l$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (8) 中, 置 $A=\frac{1}{a^2}$, $C=\frac{1}{b^2}$, $F=-1$, $B=D=E=0$, 並注意 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}>0\ \forall\ \alpha\in R$, 可知

$$\left.\begin{aligned}&(\overline{x},\overline{y})\in\Omega\Leftrightarrow \text{有 } \alpha\in R \text{ 能使}\\ &\qquad\tfrac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}+\tfrac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0, &&(\text{II}.1)\\ &\qquad\left(\tfrac{\cos^2\alpha}{a^2}+\tfrac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)l^2=1-\tfrac{\overline{x}^2}{a^2}-\tfrac{\overline{y}^2}{b^2}. &&(\text{II}.2)\end{aligned}\right\}\qquad(8.\text{II})$$

爲便討論, 不訪假設 $a\geq b$。

若 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$, 則由 (8.II) 知有 $\alpha\in R$ 能使 (II.2) 成立, 故 $1\geq 1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}=(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})l^2\geq(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{a^2})l^2=(\frac{l}{a})^2$。因此, 若 $\Omega\neq\Phi$, 必 $a\geq l$。

若 $(0,0)\in\Omega$, 則由 (8.II) 知 $(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})l^2=1$ 有解 $\alpha\in R$ [見 (II.2)]。據此與 $a\geq b>0$, 即得 $a\geq l\geq b$。反之, 若 $a\geq l\geq b$ 且 $a\neq b$, 則必有 $\alpha\in R$ 能使

$$\cos^2\alpha=\frac{a^2(l^2-b^2)}{l^2(a^2-b^2)},\quad \sin^2\alpha=\frac{b^2(a^2-l^2)}{l^2(a^2-b^2)},$$

據此與 (8.II), 即知 $(0,0)\in\Omega$; 又若 $a=l=b$, 則由 (8.II) 顯然可知 $(0,0)\in\Omega$。

若 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega\setminus\{O\}$, 則據 (8.II) 知方程組 (II.1) 與 (II.2) 有解 $\alpha\in R$, 又由 (II.1) 有

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^4}\overline{x}^2-\frac{\sin^2\alpha}{b^4}\overline{y}^2=0, \tag{II.3}$$

而以 Cramer 法則求方程組 (II.2) 與 (II.3) 中之 $\cos^2\alpha$ 及 $\sin^2\alpha$, 可得

$$\cos^2\alpha=\frac{a^2\overline{y}^2}{b^2l^2}\left(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right)\bigg/\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right),$$

$$\sin^2\alpha=\frac{b^2\overline{x}^2}{a^2l^2}\left(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right)\bigg/\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right),$$

故 $\frac{a^2b^2}{l^2}(\frac{\overline{x}^2}{a^4}+\frac{\overline{y}^2}{b^4})(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2})=\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}$, 遂知 $(\overline{x},\overline{y})$ 在方程式

$$\frac{a^2b^2}{l^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{II.4}$$

之圖形 Ψ 上。

顯然, $(0,0)\in\Psi$。再者, 若 $l=a$, 易證 Ψ 爲原點。

若 $l<a$, 則 $(0,\pm\frac{b\sqrt{a^2-l^2}}{a})\in\Psi$, 故 $\Psi\setminus\{O\}\neq\Phi$。此時, 若任取 $(\overline{x},\overline{y})\in\Psi\setminus\{O\}$, 則必有 $\alpha\in R$ 能使

$$\cos\alpha=\frac{a\overline{y}}{bl}\sqrt{1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}}\bigg/\sqrt{\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}},$$

$$\sin\alpha=-\frac{b\overline{x}}{al}\sqrt{1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}}\bigg/\sqrt{\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}},$$

因而 (Ⅱ.1) 與 (Ⅱ.2) 俱成立, 據 (8.Ⅱ) 遂知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$。

綜上論述 (假設 $a\geq b$), 可得下列結果:

$\langle 1^\circ\rangle$ 若 $l>a$, 則 $\Omega=\Phi$, 無圖形 [即無長度大於橢圓之長軸 (圓之直徑) 之弦]。

$\langle 2^\circ\rangle$ 若 $l=a$, 則 Ω 爲原點。

$\langle 3^\circ\rangle$ 若 $a>l\geq b$, 則 Ω 即方程式 (Ⅱ.4) 之圖形。

$\langle 4^\circ\rangle$ 若 $b>l$, 則 Ω 爲方程式 (Ⅱ.4) 之圖形除去原點。[特別當 $a=b>l$ (Γ 爲圓) 時, Ω 即圓 $x^2+y^2=a^2-l^2$。]

[III] Γ為雙曲線之情況

設 Γ 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, l 爲固定之正數, Ω 係長度爲 $2l$ 之所有弦之中點所構成之圖形。

於 (8) 中, 置 $A=\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $F=-1$, $B=D=E=0$, 可知

$$\left.\begin{array}{ll}(\overline{x},\overline{y})\in\Omega\Leftrightarrow \text{有 } \alpha\in R \text{ 能使} & \\ \qquad \frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0, & (Ⅲ.1)\\ \qquad \frac{1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}}=l^2. & (Ⅲ.2)\end{array}\right\}\qquad (8.Ⅲ)$$

據 (8.Ⅲ), 於 (Ⅲ.1) 及 (Ⅲ.2) 中, 置$\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\overline{y}=0$以求$\overline{x}$, 可知$\Big(\pm\frac{a\sqrt{b^2+l^2}}{b},0\Big)\in\Omega$, 故 $\Omega\neq\Phi$。

若 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$, 則據 (8.Ⅲ) 知有 $\alpha\in R$ 能使下列之 (Ⅲ.3) 與 (Ⅲ.4) 俱成立:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^4}\overline{x}^2-\frac{\sin^2\alpha}{b^4}\overline{y}^2=0, \tag{Ⅲ.3}$$

$$\Big(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\Big)l^2=1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}. \tag{Ⅲ.4}$$

不妨將上列二式中之 $\cos^2\alpha$ 及 $\sin^2\alpha$ 視爲未知數, 注意其係數行列式之值爲 $\frac{l^2}{a^2b^2}\Big(\frac{\overline{y}^2}{b^2}-\frac{\overline{x}^2}{a^2}\Big)$。(i) 若 $\frac{\overline{x}^2}{a^2}=\frac{\overline{y}^2}{b^2}$, 則由 (Ⅲ.3) 與 (Ⅲ.4) 易知 $(\overline{x},\overline{y})=(0,0)$, 且 $l\geq a$ [據 (Ⅲ.4)]。反之, 若 $l\geq a$, 則必有 $\alpha\in R$ 能使

$$\cos^2\alpha=\frac{a^2(l^2+b^2)}{l^2(a^2+b^2)},\quad \sin^2\alpha=\frac{b^2(l^2-a^2)}{l^2(a^2+b^2)},$$

據此與 (8.Ⅲ), 即知 $(0,0)\in\Omega$。(ii) 若 $\frac{\overline{x}^2}{a^2}\neq\frac{\overline{y}^2}{b^2}$ [當然 $(\overline{x},\overline{y})\neq(0,0)$], 則據 Cramer 法則, 由 (Ⅲ.3) 與 (Ⅲ.4) 可得

$$\cos^2\alpha=\frac{a^2\overline{y}^2}{b^2l^2}\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\Big)\Big/\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\Big),$$

$$\sin^2\alpha=\frac{b^2\overline{x}^2}{a^2l^2}\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\Big)\Big/\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\Big),$$

故有

$$\frac{a^2b^2}{l^2}\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^4}+\frac{\overline{y}^2}{b^4}\Big)(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1)=\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}, \tag{Ⅲ.5}$$

遂知$(\overline{x},\overline{y})$在方程式

$$\frac{a^2b^2}{l^2}\Big(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\Big)\Big(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\Big)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \tag{Ⅲ.6}$$

之圖形Ψ上。

顯然, $(0,0)\in\Psi$。再者, $(\pm\frac{a\sqrt{b^2+l^2}}{b},0)\in\Psi$, 故 $\Psi\backslash\{O\}\neq\Phi$。

若 $(\overline{x},\overline{y})\in\Psi\backslash\{O\}$, 則必 $\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\neq 0,1$ [由 (Ⅲ.5) 易知], 且有 $\alpha\in R$ 能使

$$\cos\alpha=\frac{a\overline{y}}{bl}\sqrt{r},\quad \sin\alpha=\frac{b\overline{x}}{al}\sqrt{r},$$

其中 $r=\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\Big)\Big/\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\Big)$, 因而 (Ⅲ.1) 與 (Ⅲ.2) 俱成立, 據 (8.Ⅲ) 遂知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$。

綜上論述, 可得下列結果:

$\langle 1^\circ\rangle$ 若 $l\geq a$, 則 Ω 即方程式 (Ⅲ.6) 之圖形。

$\langle 2^\circ\rangle$ 若 $a>l$, 則Ω 即方程式 (Ⅲ.6) 之圖形除去原點。

第四節 相交二直線之對應問題

設 Γ_1 與 Γ_2 均爲直線, $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ 僅含一點, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$。顯然, 若某直線與 Γ 之交點個數爲二, 則其一交點必在 Γ_1 上且不在 Γ_2 上, 另一交點必在 Γ_2 上且不在 Γ_1 上。以此兩交點爲端點之線段, 稱爲截線段。本節將探求諸截線段中點所構成之圖形。

顯然, 第一、三節所作之一般性論述於 Γ 爲相交二直線時亦俱正確, 故可逕用其中所得之結果。再者, 因平面圖像之形狀與直角坐標系之選取無關, 不妨假設 Γ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, 以便處理。

[I] 平行諸截線段中點之圖形

設 Γ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, α 爲固定之實數, Ω_α 爲平行於 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之所有截線段之中點所構成之圖形。

於 (7) 中, 置 $A=\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $B=D=E=F=0$, 可知

$$(\overline{x},\overline{y})\in\Omega_\alpha\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0,\quad\Big(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\Big)\Big(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\Big)<0. \tag{$*$}$$

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}=\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 $(*)$ 知 $\Omega_\alpha=\Phi$, 無圖形 (即斜率爲 $\tan\alpha=\pm\frac{b}{a}$ 之截線段)。

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}<\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 $(*)$ 知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega_\alpha\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0$, $\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}>0$。將方程式 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 與不等式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0$ 聯立, 實際求解集合, 即可推得此時 Ω_α 爲直線 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 除去原點。[由前式, 得 $y=\frac{b^2\cos\alpha}{a^2\sin\alpha}x$; 代入後式, 知 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha}x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$。]

若 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}>\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, 則據 $(*)$ 知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega_\alpha\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0$, $\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}<0$。仿上處理 [以 $x=\frac{a^2\sin\alpha}{b^2\cos\alpha}y$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$], 即可推得此時 Ω_α 爲直線 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x-\frac{\sin\alpha}{b^2}y=0$ 除去原點。

[其實, 逕據初等平面幾何之基本常識 (不用以上之推導), 易知: 過原點及平行於 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之任一截線段之中點作直線, 並除去原點, 即得所求之圖形 Ω_α。]

[II] 所在直線共點諸截線段中點之圖形

設 Γ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, $P_0=(x_0,y_0)$, Ω 爲過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線所對應之截線段之中點所構成之圖形, Ω_α 爲平行於 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之所有截線段之中點所構成之圖形。

注意 $\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0$ 且 $\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right)<0\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0$ 且 $\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\neq 0$, 其中由前至後之蘊涵關係顯然成立, 而由後至前之蘊涵關係則可仿第二節 [Ⅲ](H.2) 證 (ii) 推得之。據此與 $(*)$, 即知

$$(\overline{x},\overline{y})\in\Omega_\alpha\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}-\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0,\quad\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\neq 0. \tag*{$\binom{*}{*}$}$$

$\langle 1^\circ\rangle$ 當 $P_0\in\Gamma$ 時

由 $\binom{*}{*}$ 知 (i) $P_0\notin\Omega$, (ii) $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega\Leftrightarrow\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}-\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0$ 且 $\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\neq 0$, 故 Ω 即方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}-\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 之圖形 Ψ 除去 Γ 上之點。

以下, 設 Γ_1, Γ_2, Ψ_1, Ψ_2 與 Q_0 分別爲直線 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, $\frac{2x-x_0}{a}-\frac{2y-y_0}{b}=0$, $\frac{2x-x_0}{a}+\frac{2y-y_0}{b}=0$ 與點 $(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2})$。當然, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Psi=\Psi_1\cup\Psi_2$, $\Psi_1\cap\Psi_2=\{Q_0\}$, Q_0 爲線段 OP_0 之中點 (若 $P_0\neq O$)。

若$P_0=O$, 則$\Psi_1=\Gamma_1$, $\Psi_2=\Gamma_2$, $\Omega=\Psi\backslash\Gamma=\Phi$, 無圖形 (即過原點之直線無截線段)。

若 $P_0\in\Gamma_1\backslash\{O\}$, 則 $Q_0\in\Gamma_1$, $\Psi_1=\Gamma_1$, $\Psi_2\|\Gamma_2$, $\Omega=\Psi_2\backslash\{Q_0\}$。[其實, 逕據初等平面幾何之基本常識 (不用以上之推導), 易知: 當 $P_0\in\Gamma_1\backslash\{O\}$ 時, 過線段 OP_0 之中點 Q_0 作 Γ_2 之平行線 (Ψ_2), 並除去其與 Γ_1 之交點Q_0, 即得所求之圖形 Ω。]

若 $P_0\in\Gamma_2\backslash\{O\}$, 則 $Q_0\in\Gamma_2$, $\Psi_2=\Gamma_2$, $\Psi_1\|\Gamma_1$, $\Omega=\Psi_1\backslash\{Q_0\}$。

$\langle 2^\circ\rangle$ 當 $P_0 \notin \Gamma$ 時

由 $\binom{*}{*}$ 知 $P_0 \in \Omega \Leftrightarrow$ 有 $\alpha \in R$ 能使 $\frac{\cos\alpha}{a^2}x_0 - \frac{\sin\alpha}{b^2}y_0 = 0$。但仿第二節 [I]推導, 易證確有如是之 α, 故 $P_0 \in \Omega$。由是與 $\binom{*}{*}$, 又知 $\Omega\backslash\{P_0\}$ 即方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2} - \frac{(y-y_0)y}{b^2} = 0$ 之圖形 Ψ [爲雙曲線]除去 P_0 及 Γ 上之點。合之, 遂得 $\Omega = \Psi\backslash\Gamma = \Psi\backslash(\Psi\cap\Gamma)$。實際求交點, 易知 $\Psi\cap\Gamma = \{O\}$, 故 Ω 爲雙曲線 $\frac{(x-x_0)x}{a^2} - \frac{(y-y_0)y}{b^2} = 0$ 除去原點。

[III] 定長諸截線段中點之圖形

設 Γ 之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, l 爲固定之正數, Ω 係長度爲 $2l$ 之所有截線段之中點所構成之圖形。

於 (8) 中, 置 $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, $B = D = E = F = 0$, 可知

$$\left.\begin{array}{ll}(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega \Leftrightarrow \text{有 } \alpha \in R \text{ 能使} & \\ \qquad \frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x} - \frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y} = 0, & \text{(i)} \\ \qquad \dfrac{-\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2}}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}} = l^2. & \text{(ii)}\end{array}\right\} \quad \binom{*}{**}$$

據 $\binom{*}{**}$, 於 (i) 與 (ii) 中, 置 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\overline{y} = 0$ 以求 $\overline{x}$, 可知 $\left(\pm\frac{al}{b}, 0\right) \in \Omega$, 故 $\Omega \neq \Phi$。

若 $(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega$, 則由 $\binom{*}{**}$ 知必 $\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} \neq 0$ [據 (ii)], 即 $(\overline{x},\overline{y}) \notin \Gamma$, 且有 $\alpha \in R$ 能使下列之 (iii) 與 (iv) 俱成立:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^4}\overline{x}^2 - \frac{\sin^2\alpha}{b^4}\overline{y}^2 = 0, \tag{iii}$$

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)l^2 = -\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2}. \tag{iv}$$

將上列二式中之 $\cos^2\alpha$ 與 $\sin^2\alpha$ 視爲未知數, 因其係數行列式之值 $\frac{l^2}{a^2b^2}\left(\frac{\overline{y}^2}{b^2} - \frac{\overline{x}^2}{a^2}\right) \neq 0$, 由 Cramer 法則, 可得 $\cos^2\alpha = \frac{a^2\overline{y}^2}{b^2l^2}$, $\sin^2\alpha = \frac{b^2\overline{x}^2}{a^2l^2}$, 故有 $b^4\overline{x}^2 + a^4\overline{y}^2 = a^2b^2l^2$, 遂知 $(\overline{x},\overline{y})$ 在方程式

$$b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2l^2 \tag{v}$$

之圖形 Ψ [爲橢圓 (若 $a \neq b$) 或圓 (若 $a = b$)]上。

反之, 若$(\overline{x},\overline{y}) \in \Psi\backslash\Gamma$, 則必有 $\alpha \in R$ 能使 $\cos\alpha = \frac{a\overline{y}}{bl}$, $\sin\alpha = \frac{b\overline{x}}{al}$, 因而 (i) 與 (ii) 俱成立, 據 $\binom{*}{**}$ 遂知 $(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega$。

合上, 推得 Ω 即方程式 (v) 之圖形 Ψ 除去其與 Γ 之交點。[交點有四, 其 x 坐標爲 $\pm\frac{al}{\sqrt{a^2+b^2}}$, y 坐標爲 $\pm\frac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}}$。]

[其實, 逕據初等平面幾何之基本常識 (不用以上之推導), 易知: 若 Γ 爲正交二直線 ($a = b$), 則以其交點爲中心、以 l 爲半徑作圓, 並除去其與 Γ 之交點, 即得所求之圖形 Ω。]

備註: 因平行二直線之對應問題, 俱可逕據初等平面幾何之基本常識, 而以尺規作圖快速求解, 故本文不予論列。

附錄 一般傳統解法及評比

衆所周知, 吾人常依不同之已知條件, 而將直線之方程式, 以不同之形式表之。例如斜率爲 m 且 y 截距爲 k 之直線方程式可表爲 $y = mx + k$, 謂之斜截式; 縱向直線之方程式可表爲 $x = c$, 不妨稱爲鉛垂式; 過點 (x_0, y_0) 且斜率爲 m 之直線方程式可表爲 $y = m(x-x_0)+y_0$, 謂之點斜式; 又如本文第一節之 (2) 式, 亦可書爲

$$\begin{cases} x = \overline{x} + s\cos\alpha \\ y = \overline{y} + s\sin\alpha \end{cases}$$

或 $x = \overline{x} + s\cos\alpha$, $y = \overline{y} + s\sin\alpha$, 係將過點 $(\overline{x}, \overline{y})$ 且方向爲 $\langle\cos\alpha, \sin\alpha\rangle$ (即與單位向量 $\langle\cos\alpha, \sin\alpha\rangle$ 平行) 之直線上之點之 x 坐標及 y 坐標俱表爲 s 之函數 (即參數化, 以有向距離 s 爲參數), 稱爲坐標參數式。

對於本文第一節至第三節所論圓錐曲線 (含拋物線、橢圓、圓、雙曲線) 諸弦中點圖形之描述問題, 一般傳統解法 (即數學課本、參考書常用之解法) 係藉斜截式及鉛垂式, 點斜式及鉛垂式, 或坐標參數式

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$$

以處理之。下舉第一節至第三節中三題爲例示範之, 並與此三節所介紹之解法略做評比。

例一: 若 l 爲固定之正數, Γ 爲拋物線 $x^2 = 4py$, 試求長度爲 $2l$ 之所有弦之中點所成圖形 Ω 之方程式。

解答: 已予拋物線 Γ 之方程式爲

$$x^2 = 4py. \tag{1.1}$$

考慮橫向弦, 易知 $(0, \frac{l^2}{4p}) \in \Omega$, 故 $\Omega \neq \Phi$。[先此驗明 $\Omega \neq \Phi$, 以示下段之論述並非空談。]

設弦 P_1P_2 之中點為 M, 其中 $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$, $M=(\overline{x},\overline{y})$。顯然, Γ 無縱向弦, 故可設 P_1P_2 所在直線之方程式為

$$y=mx+k. \tag{1.2}$$

以 (1.2) 代入 (1.1), 可得

$$x^2-4mpx-4kp=0, \tag{1.3}$$

故 x_1 與 x_2 即為方程式 (1.3) 之二根。由根與係數之關係, 有

$$x_1+x_2=4mp, \quad x_1x_2=-4kp, \tag{1.4}$$

因而

$$x_1+x_2=2\overline{x}, \quad m=\frac{\overline{x}}{2p}, \tag{1.5}$$

遂知 $\overline{y}=m\overline{x}+k=\frac{\overline{x}^2}{2p}+k$, 即

$$k=\overline{y}-\frac{\overline{x}^2}{2p}. \tag{1.6}$$

以 (1.6) 代入 (1.4) 之後式, 得

$$x_1x_2=2\overline{x}^2-4p\overline{y}. \tag{1.7}$$

因 $|P_1P_2|=2l$, 故 $(1+m^2)(x_1-x_2)^2=4l^2$, 即 $(1+m^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=4l^2$。以 (1.5) 及 (1.7) 代入此式, 並整理之, 可得 $(\overline{x}^2+4p^2)(4p\overline{y}-\overline{x}^2)=4l^2p^2$。由是, 遂知 $(\overline{x},\overline{y})$ 在方程式

$$(x^2+4p^2)(4py-x^2)=4l^2p^2 \tag{1.8}$$

之圖形 Ψ 上, 故 $\Omega\subseteq\Psi$。

[據上 (或實際代入), 可知 $(0,\frac{l^2}{4p})\in\Psi$, 故 $\Psi\neq\Phi$。]

反之, 若 $(\overline{x},\overline{y})\in\Psi$, 則 $(\overline{x}^2+4p^2)(4p\overline{y}-\overline{x}^2)=4l^2p^2$, 故 $4p\overline{y}-\overline{x}^2>0$。令 $m=\frac{\overline{x}}{2p}$, $k=\overline{y}-\frac{\overline{x}^2}{2p}$, 考慮直線 $y=mx+k$。因 (1.3) 式之判別式 $16m^2p^2+16kp=16p(m^2p+k)=4(4p\overline{y}-\overline{x}^2)>0$, 故拋物線 $x^2=4py$ 與直線 $y=mx+k$ 必有相異二交點 P_1 及 P_2。若 P_1 與 P_2 之坐標分別為 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2), 則由 (1.3), 據根與係數之關係, 可知 $\frac{x_1+x_2}{2}=2mp=\overline{x}$, 因而 $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m(x_1+x_2)}{2}+k=\frac{\overline{x}^2}{2p}+(\overline{y}-\frac{\overline{x}^2}{2p})=\overline{y}$, 故 $(\overline{x},\overline{y})$ 為線段 P_1P_2 之中點。由是, 遂知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$, 故 $\Psi\subseteq\Omega$。

綜上, 推得 $\Omega=\Psi$, 故 Ω 之方程式可表為 (1.8), 即 $(x^2+4p^2)(4py-x^2)=4l^2p^2$。

備註: (一) 此種傳統解法與第三節 [I]之推導, 均分別證明 $\Omega\subseteq\Psi$ 及 $\Psi\subseteq\Omega$。略加比較, 二者似無甚繁簡之別。

(二) 若將拋物線之方程式改爲 $y^2 = 4px$, 則第三節 [I]之推導模式仍適用之。但若採用一般傳統解法, 則於證明 $\Omega \subseteq \Psi$ 時, 須分別考慮斜向弦中點及縱向弦中點 [參看後示例二解答及例三解二]。當然, 若注意此時無橫向弦, 亦可逕設弦所在直線之方程式爲 $x = m'y + k'$ [不知宜名此爲何式?!] 而仿上示解答探討之 [將其中之 x 與 y 互換, 將 m 改爲 m', 並將 k 改爲 k' 即可]。如是, 則二者之論證形式全同; 可視此爲一般傳統解法之變形, 其中已隱含 x 軸 與 y 軸之互換矣。

例二: 若 Γ 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 試求所有平行弦之中點所構成之圖形 Ω。

解答: 已予雙曲線 Γ 之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.1}$$

[I] 斜 (橫) 向平行諸弦中點之圖形

考慮斜率爲 m 之直線

$$y = mx + k. \tag{2.2}$$

以 (2.2) 代入 (2.1), 並整理之, 可得

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2(b^2 + k^2) = 0. \tag{2.3}$$

若 $b^2 = a^2m^2$ (即 $m = \pm\frac{b}{a}$), 則 x 之方程式 (2.3) 至多有一根, 故雙曲線 (2.1) 與直線 (2.2) 至多有一交點。由是, 遂知無斜率爲 $\pm\frac{b}{a}$ 之弦。

若 $b^2 \neq a^2m^2$ 且雙曲線 (2.1) 與直線 (2.2) 有相異二交點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$, 設弦 P_1P_2 之中點爲 $M(\overline{x}, \overline{y})$, 則 x_1 及 x_2 必爲二次方程式 (2.3) 之相異根, 故其判別式 $4a^4k^2m^2 + 4a^2(b^2 + k^2)(b^2 - a^2m^2) = 4a^2b^2(b^2 - a^2m^2 + k^2) > 0$, 即

$$b^2 - a^2m^2 + k^2 > 0; \tag{2.4}$$

且由根與係數之關係, 有 $x_1 + x_2 = \frac{2a^2km}{b^2 - a^2m^2}$, 故 $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2km}{b^2 - a^2m^2}$, $\overline{y} = m\overline{x} + k = \frac{b^2k}{b^2 - a^2m^2}$。據此與 (2.4), 遂知

$$b^2\overline{x} - a^2m\overline{y} = 0, \quad b^2 - a^2m^2 + (\overline{y} - m\overline{x})^2 > 0. \tag{2.5}$$

反之, 若 $b^2 \neq a^2m^2$, 且有 $\overline{x}, \overline{y} \in R$ 能使 (2.5) 成立, 則可令 $k = \overline{y} - m\overline{x}$, 並考慮直線 $y = mx + k$, 即 (2.2)。因二次方程式 (2.3) 之判別式 $4a^2b^2(b^2 - a^2m^2 + k^2) = 4a^2b^2[b^2 - a^2m^2 + (\overline{y} - m\overline{x})^2] > 0$ [據 (2.5) 之後式], 故 (2.3) 必有相異二實根 x_1 及 x_2,

遂知雙曲線 (2.1) 與直線 (2.2) 有相異二交點 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$。由 (2.3), 據根與係數之關係, 有 $x_1+x_2=\frac{2a^2km}{b^2-a^2m^2}$; 又因 $b^2\overline{x}=a^2m\overline{y}$ [據 (2.5) 之前式], 且 $k=\overline{y}-m\overline{x}$, 故 $a^2km=a^2m\overline{y}-a^2m^2\overline{x}=(b^2-a^2m^2)\overline{x}$, 於是 $x_1+x_2=2\overline{x}$, 且 $y_1+y_2=m(x_1+x_2)+2k=2(m\overline{x}+k)=2\overline{y}$, 遂知 $(\overline{x},\overline{y})$ 爲弦 P_1P_2 之中點。

合之, 推得 $b^2\neq a^2m^2$ 時, Ω 爲由方程式 $b^2x-a^2my=0$ 與不等式 $b^2-a^2m^2+(y-mx)^2>0$ 所界定之圖形。

將上述方程式與不等式聯立, 實際求解集合, 易知: 當 $b^2>a^2m^2$ 時, Ω 即直線 $b^2x-a^2my=0$; 當 $b^2<a^2m^2$ 時, Ω 爲直線 $b^2x-a^2my=0$ 除去線段 Q_1Q_2, 其中

$$Q_1=\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right),\quad Q_2=\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$$

爲平行二直線 $y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 與直線 $b^2x-a^2my=0$ 之交點, 亦爲雙曲線 Γ 與直線 $b^2x-a^2my=0$ 之交點。

[II]縱向諸弦中點之圖形

考慮縱向直線

$$x=c. \tag{2.6}$$

以 (2.6) 代入 (2.1), 並整理之, 可得

$$y^2-b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=0. \tag{2.7}$$

由是, 據中點坐標公式、二次方程式之判別式及根與係數之關係, 易知 $(c,d)\in\Omega\Leftrightarrow|c|>a$ 且 $d=0$, 故若 $A_1=(-a,0)$, $A_2=(a,0)$, 則所有縱向弦之中點所構成之圖形即 x 軸除去線段 A_1A_2。

備註: 上示傳統解法實遜於前法 (見第一節 [III] 之論述)。二者解題之模式, 有二大異處: 其一, 本解答將弦之斜率絕對值大於 $\frac{b}{a}$ 之情形與縱向弦之情形分開處理, 而前法則將此二者併爲 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}<\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$ 一款探求之; 其二, 前法恆以充要條件推導之, 而本解答於 $b^2\neq a^2m^2$ 時則分別證明 $\Omega\subseteq\Psi$ 及 $\Psi\subseteq\Omega$, 其中 Ψ 爲由方程式 $b^2x-a^2my=0$ 與不等式 $b^2-a^2m^2+(y-mx)^2>0$ 所界定之圖形。

例三: 若 Γ 爲橢圓或圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P_0=(x_0,y_0)$, 試求過 P_0 且與 Γ 有相異二交點之所有直線之對應弦中點所構成之圖形 Ω。

解一: 已予 Γ 之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.1}$$

設弦 P_1P_2 在過 P_0 且平行於 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 之直線 Λ_α 上。顯然, Λ_α 之坐標參數式可表爲

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

以 (3.2) 代入 (3.1), 並整理之, 可得

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)t+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0. \tag{3.3}$$

因 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}>0$, (3.3) 爲 t 之二次方程式。若 $P_1=(x_1,y_1)$ 及 $P_2=(x_2,y_2)$ 分別對應於 $t=t_1$ 及 $t=t_2$, 且弦 P_1P_2 之中點爲 $M=(\overline{x},\overline{y})$, 則方程式 (3.3) 有二個相異實根 t_1 及 t_2, 故其判別式

$$\begin{aligned} &4\left[\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\right] \\ &=\frac{4}{a^2b^2}\left[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2\right]>0, \end{aligned}$$

即

$$b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha>(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2; \tag{3.4}$$

且由根與係數之關係, 有

$$t_1+t_2=-\frac{2(b^2x_0\cos\alpha+a^2y_0\sin\alpha)}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

故

$$\begin{aligned} \overline{x}&=x_0+\frac{t_1+t_2}{2}\cos\alpha=\frac{a^2(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)\sin\alpha}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}, \\ \overline{y}&=y_0+\frac{t_1+t_2}{2}\sin\alpha=\frac{b^2(y_0\cos\alpha-x_0\sin\alpha)\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

據此與 (3.4), 遂知

$$\frac{\cos\alpha}{a^2}\overline{x}+\frac{\sin\alpha}{b^2}\overline{y}=0,\quad \frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}<1. \tag{3.5}$$

若 $t_1+t_2\neq 0$, 則以 $\cos\alpha=\frac{2(\overline{x}-x_0)}{t_1+t_2}$ 及 $\sin\alpha=\frac{2(\overline{y}-y_0)}{t_1+t_2}$ 代入 (3.5) 之前式, 即有 $\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0$; 若 $t_1+t_2=0$, 則 $(\overline{x},\overline{y})=(x_0,y_0)$, 當然亦有 $\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0$。合此與 (3.5) 之後式, 遂得

$$\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0,\quad \frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}<1. \tag{3.6}$$

設 Ψ 爲方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}+\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 之圖形, 其在 Γ 內部之部份爲 $\tilde{\Psi}$, 則由上論述即知 $\Omega\subseteq\tilde{\Psi}$。

反之, 設 $(\overline{x},\overline{y})\in\tilde{\Psi}$, 即實數 $\overline{x}$, $\overline{y}$ 能使 (3.6) 成立。茲分三種情況推導如次:

$\langle 1^\circ\rangle$ 若 $(\overline{x},\overline{y})\neq(x_0,y_0)$, 則必有 $\alpha\in R$ 能使

$$\cos\alpha=\frac{\overline{x}-x_0}{r},\quad \sin\alpha=\frac{\overline{y}-y_0}{r},\tag{3.7}$$

其中 $r=\sqrt{(\overline{x}-x_0)^2+(\overline{y}-y_0)^2}>0$。考慮過 P_0 且與 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 平行之直線 Λ_α, 其方程式爲 (3.2)。由 (3.7), 顯然有 $(\overline{x}-x_0)\sin\alpha=(\overline{y}-y_0)\cos\alpha$, 故 $x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha=\overline{x}\sin\alpha-\overline{y}\cos\alpha$; 又由 (3.6) 之前式與 (3.7), 可得 $\frac{\overline{x}\cos\alpha}{a^2}+\frac{\overline{y}\sin\alpha}{b^2}=0$。據是與 $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}>0$ 及 (3.6) 之後式, 知 (3.3) 之判別式

$$\begin{aligned}
&4\left[\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\right]\\
&=\frac{4}{a^2b^2}\left[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2\right]\\
&=\frac{4}{a^2b^2}\left[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-(\overline{x}\sin\alpha-\overline{y}\cos\alpha)^2\right]\\
&=4\left[\left(\frac{\overline{x}\cos\alpha}{a^2}+\frac{\overline{y}\sin\alpha}{b^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\right)\right]\\
&=4\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right)>0,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

故 (3.3) 有相異二實根 t_1 及 t_2, 從而 Γ 與 Λ_α 有相異二交點 P_1 及 P_2。再者, 因 $\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}=\frac{(\overline{x}-r\cos\alpha)\cos\alpha}{a^2}+\frac{(\overline{y}-r\sin\alpha)\sin\alpha}{b^2}=-r(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})$, 由 (3.3), 據根與係數之關係, 遂得 $\frac{t_1+t_2}{2}=r$, 故知此時 $(\overline{x},\overline{y})$ 即弦 P_1P_2 之中點。

$\langle 2^\circ\rangle$ 若 $(\overline{x},\overline{y})=(x_0,y_0)\neq(0,0)$, 則 $\langle\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\rangle$ 非零向量, 必有 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 與之垂直, 故二者之內積 $\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}=0$。考慮過 P_0 且與 $\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 平行之直線 Λ_α, 其方程式爲 (3.2)。此時 (3.3) 即爲 $(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})t^2-(1-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2})=0$, 其二實根絕對值相等、符號相反, 故 $(\overline{x},\overline{y})$ 係 Λ_α 之對應弦之中點。

$\langle 3^\circ\rangle$ 若 $(\overline{x},\overline{y})=(x_0,y_0)=(0,0)$, 則過 P_0 之任一直線必與 Γ 交於相異二點, 此二點對稱於 O [即 $(\overline{x},\overline{y})$], 故 $(\overline{x},\overline{y})$ 實爲過 P_0 之所有直線之對應弦之公共中點。

合 $\langle 1^\circ\rangle$, $\langle 2^\circ\rangle$ 與 $\langle 3^\circ\rangle$, 知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$。遂推得 $\tilde{\Psi}\subseteq\Omega$。

綜上, 即有 $\Omega=\tilde{\Psi}$ 矣。

更進一步推導, 可知: 若 P_0 在 Γ 之外部, 則 Ω 即 Ψ 除去其弧 $Q_1P_0Q_2$(Q_1 及 Q_2 爲 Ψ 與 Γ 之相異二交點); 若 P_0 在 Γ 上, 則 $\Omega=\Psi\setminus\{P_0\}$; 若 P_0 在 Γ 之內部, 則 $\Omega=\Psi$。(參看第二節 [II] 末段之論述)

解二: 已予 Γ 之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.1}$$

考慮過點 P_0 且斜率爲 m 之直線

$$y=m(x-x_0)+y_0. \tag{4.2}$$

以 (4.2) 代入 (4.1), 並整理之, 可得

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2m(mx_0-y_0)x+a^2[(mx_0-y_0)^2-b^2]=0。 \tag{4.3}$$

因 $a^2m^2+b^2>0$, (4.3) 爲 x 之二次方程式。

若橢圓或圓 (4.1) 與直線 (4.2) 有相異二交點 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$, 設弦 P_1P_2 之中點爲 $M(\overline{x},\overline{y})$, 則方程式 (4.3) 有相異實根 x_1 及 x_2, 故其判別式

$$\begin{aligned}&4a^4m^2(mx_0-y_0)^2-4a^2(a^2m^2+b^2)[(mx_0-y_0)^2-b^2]\\=\,&4a^2b^2[a^2m^2+b^2-(mx_0-y_0)^2]>0,\end{aligned}$$

即

$$a^2m^2+b^2>(mx_0-y_0)^2; \tag{4.4}$$

且由根與係數之關係, 有

$$x_1+x_2=\frac{2a^2m(mx_0-y_0)}{a^2m^2+b^2},$$

故

$$\overline{x}=\frac{a^2m(mx_0-y_0)}{a^2m^2+b^2},$$

$$\overline{y}=m(\overline{x}-x_0)+y_0=\frac{b^2(y_0-mx_0)}{a^2m^2+b^2}.$$

據此與 (4.4), 遂知

$$\frac{\overline{x}}{a^2}+\frac{m\overline{y}}{b^2}=0,\quad \frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}<1. \tag{4.5}$$

若 $\overline{x}\neq x_0$, 則以 $m=\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0}$ 代入 (4.5) 之前式, 即有 $\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0$; 若 $\overline{x}=x_0$, 則 $\overline{y}=y_0$, 當然亦有 $\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0$。合此與 (4.5) 之後式, 遂得

$$\frac{(\overline{x}-x_0)\overline{x}}{a^2}+\frac{(\overline{y}-y_0)\overline{y}}{b^2}=0,\quad \frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}<1. \tag{4.6}$$

考慮過 P_0 之縱向直線 $x=x_0$。以 $x=x_0$ 代入 (4.1), 並整理之, 可得 $y^2-b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})=0$, 遂知若有弦在過 P_0 之縱向直線上, 設其中點爲 $(\overline{x},\overline{y})$, 則必 $\overline{x}=x_0$, $x_0^2<a^2$ 且 $\overline{y}=0$, 故此時 $(\overline{x},\overline{y})$ 亦適合 (4.6)。

設 Ψ 爲方程式 $\frac{(x-x_0)x}{a^2}+\frac{(y-y_0)y}{b^2}=0$ 之圖形, 其在 Γ 內部之部份爲 $\tilde{\Psi}$, 則由上論述即知 $\Omega\subseteq\tilde{\Psi}$。

反之, 設 $(\overline{x},\overline{y})\in\tilde{\Psi}$, 即實數 $\overline{x}$, $\overline{y}$ 能使 (4.6) 成立。茲分三種情況推導如次:

$\langle 1^\circ\rangle$ 若 $\overline{x}\neq x_0$, 則可令 $m=\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0}$, 並考慮直線 $y=m(x-x_0)+y_0$, 即 (4.2)。顯然, 由 $m=\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0}$ 及 (4.6) 之前式, 可得 $mx_0-y_0=m\overline{x}-\overline{y}$ 及 $\frac{\overline{x}}{a^2}+\frac{m\overline{y}}{b^2}=0$ [此即 (4.5) 之前式]。據是與 (4.6) 之後式, 遂知

$$\begin{aligned}a^2m^2+b^2-(mx_0-y_0)^2&=a^2m^2+b^2-(m\overline{x}-\overline{y})^2=a^2b^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\left(\frac{m\overline{x}-\overline{y}}{ab}\right)^2\right]\\&=a^2b^2\left[\left(\frac{\overline{x}}{a^2}+\frac{m\overline{y}}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\right)\right]\\&=a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2}\right)>0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

故 (4.3) 有相異二實根 x_1 及 x_2, 從而 Γ 與直線 (4.2) 有相異二交點 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$。再者, 又知

$$a^2m(mx_0-y_0)=a^2m(m\overline{x}-\overline{y})=a^2m^2\overline{x}+b^2\overline{x}=(a^2m^2+b^2)\overline{x},$$

而由根與係數之關係即得

$$x_1+x_2=\frac{2a^2m(mx_0-y_0)}{a^2m^2+b^2}=2\overline{x},$$

於是 $$y_1+y_2=m(x_1+x_2-2x_0)+2y_0=2[m(\overline{x}-x_0)+y_0]=2\overline{y},$$

故此時 $(\overline{x},\overline{y})$ 爲弦 P_1P_2 之中點。

若 $\overline{x}=x_0$, 則據 (4.6) 之前式, 知 $\overline{y}=0$ 或 y_0, 故可繼續探討如下:

$\langle 2^\circ\rangle$ 若 $(\overline{x},\overline{y})=(x_0,0)$, 則 $(\overline{x},\overline{y})$ 即過 P_0 之縱向直線之對應弦之中點。

$\langle 3^\circ\rangle$ 若 $\overline{x}=x_0$ 且 $\overline{y}=y_0\neq 0$, 可令 $m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ [此即 (4.5) 之前式], 並考慮直線 $y=m(x-x_0)+y_0$, 即 (4.2)。仿 $\langle 1^\circ\rangle$ 推導, 易證 $(\overline{x},\overline{y})$ 係直線 (4.2) 之對應弦之中點。[其中之 $a^2m^2+b^2-(mx_0-y_0)^2>0$, 亦可逕將 $m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 代入以驗之, 而不用 (4.7)。]

合 $\langle 1^\circ\rangle$, $\langle 2^\circ\rangle$ 與 $\langle 3^\circ\rangle$, 知 $(\overline{x},\overline{y})\in\Omega$。遂推得 $\tilde{\Psi}\subseteq\Omega$。

綜上, 即有 $\Omega=\tilde{\Psi}$ 矣。

下接解一末段之論述。

備註: (一) 解一與前法 (見第二節 [II]) 俱利用坐標參數式以處理之, 但解一較前法繁瑣多多, 其故安在? 仔細端詳前後二法, 比較其最初所考慮之坐標參數式, 知解一所取之參考點爲題予之 P_0, 係特定點; 而前法則以一般點 $M(\overline{x},\overline{y})$ 爲參考點。解一之策略, 係分別證明 $\Omega\subseteq\tilde{\Psi}$

及 $\tilde{\Psi} \subseteq \Omega$; 前法則謀定而後動, 直接探討參數式中之參考點 M 爲弦中點之充要條件, 所需之論證遂大爲簡化矣。可見機變之巧、運用之妙, 惟存乎一心也。

(二) 當然, 前法 (見第二節 [II]) 亦較解二簡便。其主因係解二分別證明 $\Omega \subseteq \tilde{\Psi}$ 及 $\tilde{\Psi} \subseteq \Omega$, 且於推導 $\Omega \subseteq \tilde{\Psi}$ 時, 須將斜 (橫) 向弦中點與縱向弦中點分開處理, 而前法則就充要條件探討之, 可收事半功倍之效。

(三) 讀者宜注意: 於解一 (3.4) 之推導過程中, 曾將 (3.3) 之判別式

$$4\left[\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\right]$$

化簡而變形爲

$$\frac{4}{a^2b^2}\left[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2\right],$$

故在驗證 $\tilde{\Psi} \subseteq \Omega$ 之 $\langle 1^\circ\rangle$ 款, 於推得 $x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha=\overline{x}\sin\alpha-\overline{y}\cos\alpha$ 及 $\frac{\overline{x}\cos\alpha}{a^2}+\frac{\overline{y}\sin\alpha}{b^2}=0$ 後, 即在 (3.8) 反將

$$\tfrac{4}{a^2b^2}\left[b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-(\overline{x}\sin\alpha-\overline{y}\cos\alpha)^2\right]$$

改書爲

$$4\left[\left(\frac{\overline{x}\cos\alpha}{a^2}+\frac{\overline{y}\sin\alpha}{b^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1\right)\right],$$

俾便探究判別式之符號; 如此處理, 十分自然。其後, 在解二驗證 $\tilde{\Psi} \subseteq \Omega$ 之 $\langle 1^\circ\rangle$ 款中, 更依樣葫蘆, 而於 (4.7) 將 $\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-(\frac{m\overline{x}-\overline{y}}{ab})^2$ 逕化爲 $(\frac{\overline{x}}{a^2}+\frac{m\overline{y}}{b^2})^2-(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2})(\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-1)$ 矣。若僅就解二考察之, 而對如是之變換有突兀之感, 不妨以下列推導替代 (4.7):

$$\begin{aligned}
&4[a^2m(mx_0-y_0)]^2-4a^2(a^2m^2+b^2)[(mx_0-y_0)^2-b^2]\\
&=4[a^2m(m\overline{x}-\overline{y})]^2-4a^2(a^2m^2+b^2)[(m\overline{x}-\overline{y})^2-b^2]\\
&=4(a^2m^2\overline{x}+b^2\overline{x})^2-4a^2(a^2m^2+b^2)[(m\overline{x}-\overline{y})^2-b^2]\\
&=4(a^2m^2+b^2)\{(a^2m^2+b^2)\overline{x}^2-a^2[(m\overline{x}-\overline{y})^2-b^2]\}\\
&=4(a^2m^2+b^2)(b^2\overline{x}^2+2a^2m\overline{x}\,\overline{y}-a^2\overline{y}^2+a^2b^2)\\
&=4(a^2m^2+b^2)(-b^2\overline{x}^2-a^2\overline{y}^2+a^2b^2)\\
&=4a^2b^2(a^2m^2+b^2)(1-\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{y}^2}{b^2})>0。
\end{aligned}$$

據筆者之經驗, 本篇所論十二則問題中, 第二節 [III] 之難度最高。於此, 建議有興趣之讀者, 以傳統手法實際試解之。(上示解一、解二及第二節 [III] 之探討, 均極具參考價值。) 如是, 當能體認本文前四節所引介之坐標參數化法之效用矣。子夏曰:「雖小道, 必有可觀者焉。」旨哉! 斯言。

—本文作者曾任教台灣大學數學系25年, 已於1991年8月退休自台大—