Peter Lax 演講 ——

數學與計算 (Mathematics and Computing)

整理: 仇竟珊、黃怡碧

時間: 民國九十年十二月二十一日

地點: 台大數學系

謝謝你們邀請我來這裡演講, 希望我今天所演講的內容能引起台下聽衆的興趣。今天我要講的是「數學與計算」(Mathematics and Computing), 內容涵蓋了過去五十年中計算在數學中扮演的角色, 以及把數學想法融入計算的過程。

對於科學的演進, 通常有兩種不同的看法, 一種是將新的觀念及想法視爲科學進步的原動力, 另一種觀點則認爲科學的革新乃是源於技術及工具的進步。當然, 後者的觀點是很好舉例的, 如太空望遠鏡的發展, 顯微鏡的進步及核磁共振等分別對天文學、生物學及化學的發展有著極重要的影響。電腦也是一個革命性的工具, 而更重要的是, 它的影響是全面性的。它使化學、生物及數學有了突破性的改變, 並且對實驗派跟理論派的學者都一樣重要。

諾貝爾獎是衡量計算重要性一個很好的指標。電腦斷層掃描是第一個受到諾貝爾獎肯定, 且由計算扮演關鍵角色的技術, 1978 年, Hounsfield 和 Cormack 獲得諾貝爾醫學獎, 其中計算用到的數學原理就是用一個函數在直線上的積分反求原來的函數。1986年, Hauptman 和 Karles 以 X 光晶體學獲得諾貝爾物理獎, 在他們的研究中, 最關鍵的步驟就是他們把 Toeplitz 對正質量函數富立葉變換 (Fourier transform of a positive mass distribution) 的刻劃用數值的方法做出來。三年前, Kohn 和 Pople 又以用計算方法研究大型分子獲得諾貝爾化學獎。

近代計算之父 Von Neumann—我心目中的英雄, 也是大家的英雄。二次大戰時, Von Neumann 正在設計核子武器, 他很快就發現傳統的解析方法不敷使用, 必須要把連續的方程離散化, 然後把數值解算出來。要有效率地進行這麼大量的計算, 必需要有高速的電子計算機、足夠的記憶體、其他的儲存裝置和程式語言才行, 當然, 還要知道怎麼把微分方程離散化及如何解最後的代數方程。

因此, 戰後 Von Neumann 把他的精力投注在計算機上。他知道, 計算不只對研發核子武器重要, 對解決大型的科學及工程問題也很重要。他也了解計算不只是暴力硬算而已。他在1945年的演講中說道:

> 「眞正有效率的高速計算工具, 不論在非線性偏微分方程領域, 或是其他很多困難尙無法探索的領域, 都提供了推動數學各方面眞正進步所需要的啓發。」

Von Neumann 總愛說很長的句子。

在我演講的第一部分, 我將舉幾個例子, 看一些經由科學計算而發現的數學現象, 所以在這部分只是一些數學現象的列舉和介紹。之後我將說明一個非常重要的問題—我們對數值運算的結果到底能抱多少信心? 第三部分則是在科學計算上數學家們所面臨的挑戰。

1. 計算機實驗

最早的計算機實驗應該可以追溯到在 Von Neumann 設計的電腦 ANIAC 上進行的實驗。那是一個由 E. Fermi, J. Pasta 和 S. Ulam 進行的數值實驗, 研究含非線性微擾的波動方程式

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

其中 c 和解 u 有關。當 c 恆爲1而初始函數是 $\sin(x)$ 的時候, 你知道答案是 $u(x,t) = \cos(t)\sin(x)$。當 $c = 1 + p(u)$, 仍舊由第一個富立葉模 (Fourier mode) $\sin(x)$ 出發, 由遍歷理論, 他們以爲會看到這樣的結果: 能量會由第一個模傳遞到其他模上, 當然也有可能流回第一個模。他們發現能量的確會流到別的模, 只是很快又會回到第一個模, 再流出去不久又再流回來, 幾乎是周期性的, 時間間隔比理論預期的短得多。直到十年後, KAM 理論問世, 這個現象才獲得完整的解釋。

第二個例子是 Kruskal 和 Zabusky。六十年代, Kruskal 和 Zabusky 著手以數值逼近來處理 KdV 方程 (Korteweg-de Vries equation)。KdV 方程是十九世紀末用來模擬水道中淺水波的方程, 方程式是這樣的

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

其中 u 是振幅, x 與 t 分別代表空間及時間。不久之前, 我在美國哲學學會 (American philosophical Society) 也作了一個類似的演講。那兒的成員有數學家、物理學家、還有社會科學家、歷史學家及藝術家。如果我在那兒寫下這樣的方程式可能有點麻煩。我知道這對你們來說沒什麼, 因爲這種數學語言我們都很熟悉, 再者, 這種語言是非常精煉的。所以我把這個式子翻譯成一個你們都很熟悉, 但是同樣非常精煉的語言—日本的俳句, 請大家指正:

Size depends on speed,

Balanced by dispersion,

Oh solitary splendor!

這是指從這個方程產生的 soliton。你們可以從圖 1 中看到這兩個波互相交錯的剎那有一些交互作用, 但最後分開時仍然各自保持原來的形狀, 這是最特別的一點。在非線性偏微分方程中, 從來也沒有看過這種現象。但更重要的是這種現象發生的原因, 那是因爲這個方程是完全可積的 (completely integrable)。到這個發現爲止, 我們所知的完全可積系統 (completely integrable system) 的數目仍舊是非常有限, 但之後新發現的完全可積系統便有如雨後春筍般地冒出來。我要特別強調的是, 完全可積系統在科學的發展上扮演非常重要的角色。舉例來說, 雙體問題就是完全可積系統, 你可以寫下它的解, 這一點讓牛頓確定了他的重力理論和克卜勒三定律是一致的。同樣的, 在古典量子力學理論發展中, 唯一能夠量子化的系統就是一個完全可積系統, 光是這樣就已經足夠導出一些有趣的東西。

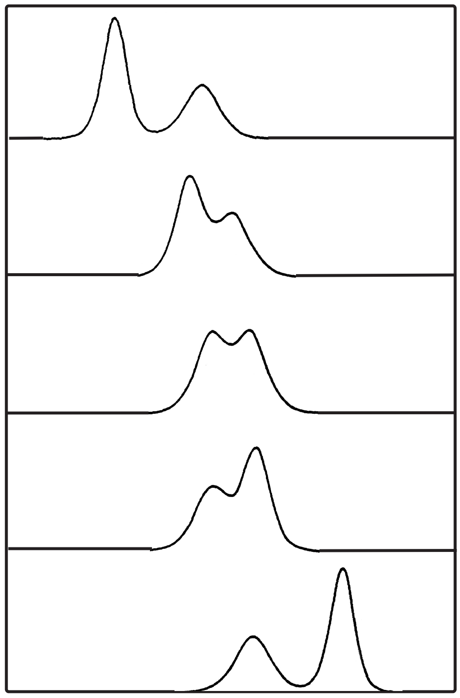

圖1

第三個例子是 Ising 模型。Onsager 利用了 Ising 模型的完全可積性證明了磁化現象中臨界溫度 (critical temperature) 的存在性。之後更陸續出現了許多有趣的完全可積系統。

完全可積系統不只在理論上有用。Hasegawa, Kodama 和工程師 Mollenauer 發現: soliton 和 cubic Schrodinger 的理論可以描述訊號在光纖中的傳遞的行爲。一般而言, 非線性的方程總是很討厭, 但在 KdV 方程, 正是這些非線性的效應 (訊號傳播的速度和強度有關) 以及不同頻率的訊號間的散佈這兩個效應間的平衡促使 soliton 能夠形成而且能保持穩定, 這兩個效應都可以在光於玻璃中行進時觀察到—折射率隨著光強度遞增而增加, 且波長短的波比波長較長的行進得快。這些事實都致使 Akira Hasegawa 預測 soliton 可以在光纖內傳播很長的距離。後來, Mollenauer 一系列工程上的研究證實了這個結果。

沒有別的領域像渾沌學一樣倚賴計算了, 有了計算, 我們才能一窺渾沌的奧祕, 渾沌才能有如許的吸引力。達到「渾沌」有很多種路徑, 其中一個非常有趣的是「週期倍增」(periods doubling), 是 Feigenbaum 由數值實驗中發現的, 而這個現象之後也有數學的證明。我對這個作一點說明:

設 f 是 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$ 的單峰函數且 $f(0)=f(1)=0$。令 $x_{m+1}=Tf(x_m)$, 這個迭代跟參數T有關, 我們可以把 T 想成溫度。因爲 $f(0)=0$, 0是一個不動點, 也就是說, 若 x_n 是0, 則 x_{n+1} 也是0。當 T 小於某個臨界值 T_1 時, $x=0$ 是唯一穩定的不動點, 也就是任何起始點 x_0, 經過迭代後, 最後都會跑到0去。當 $T>T_1$, 第二個不動點就會出現, 直到 T 達到第二個臨界值 T_2。當 T 超過 T_2 時, 一個週期爲2的軌道就會出現, 直到 T 再達到 T_3, 之後即出現了週期爲4的軌道, 直到 T 再達到下一個臨界值。這樣一來就有一串臨界值的數列 $\{T_n\}$, 每一個 T_n 代表了週期會呈倍數增加的臨界值。此數列有一極限 T_∞, 之後的現象便是一片渾沌。而 T_n 以指數衰減的速率趨近於 T_∞:

$$T_\infty - T_n \cong \frac{c}{d^n},$$

d 約爲 4.6692016... 和函數無關, 有些人就把這個數字稱爲 Feigenbaum 常數。

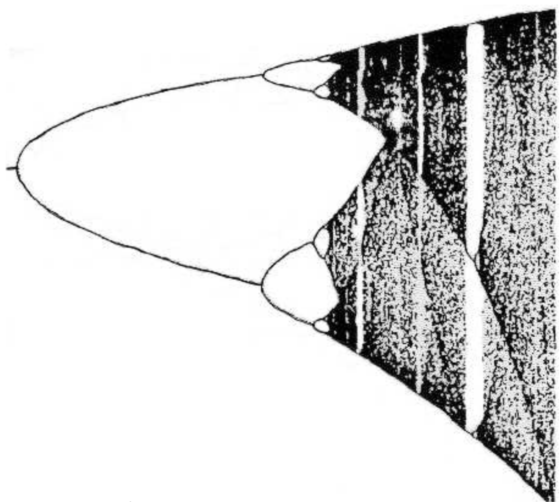

圖2. Period doubling

另外一個例子是著名的 Lorenz 吸子 (Lorenz attractor)。Edward Lorenz 是一位氣象學家, 但他接受過很好的數學訓練。他觀察由三個常微分方程所組成的方程組之數值解, 結果在解的長時間行爲中發現了渾沌現象。當時間很長的時候, 解會被吸引至一個具有奇怪幾何結構的集合中, 這樣的集合叫做奇異吸子 (strange attractors)。

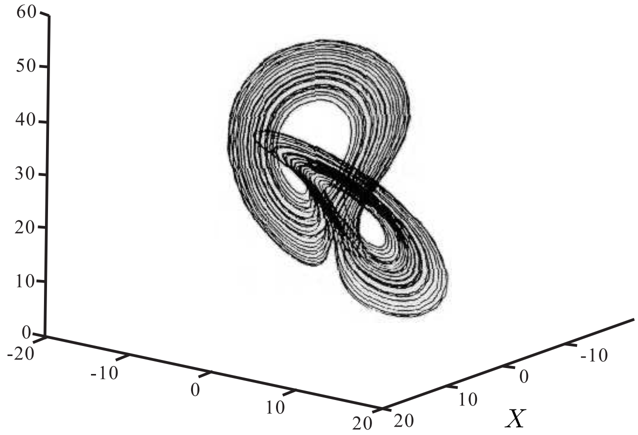

圖3. The Lorenz attractor: trajectories wind around the two centers alternating

另一條「渾沌之路」是流體湍流 (turbulence)。了解流體湍流是科學中的最大挑戰之一。它的基本現象是非常有趣的: 原本平穩的流體在某個參數 (如 Reynolds number) 超過一個值之後, 忽然變得混亂了。理論學家的工作就是要解釋爲何穩定狀態會消失, 及計算湍流區域中某些量的平均值。這個任務的艱鉅在於流體動力學中方程式是非線性的。儘管最近我們對湍流的了解有些進展, 實用上經驗 (empirical) 模型也很好用, 但我們離一個完整的理論還很遠。奇怪的是, 數值模擬得到的結果總是自相矛盾。

黎曼 ζ 函數的零點分佈大概是數值實驗最驚奇的發現。黎曼猜測: 除了一些明顯的實根, ζ 函數的零點實部都是 $\frac{1}{2}$。爲什麼黎曼猜想激起這麼多人的好奇心? 因爲許多質數的問題最後都發現和它有關, 大部分碰過黎曼猜想的數學家都相信它的解答背後必定蘊含了深刻的意義。

設 $\frac{1}{2}+ig_j$ 是黎曼 ζ 函數第 j 個零根, 將 g_j 正規化:

$$\bar{g}_j=\frac{g_j\log g_j}{2\pi}$$

那麼 $\bar{g}_j\sim j$。Hugh Montgomery 決定了 $\bar{g}_j$ 的配對相關 (pair correlation), Freeman Dyson 注意到這個配對相關正是隨機 unitrary 矩陣特徵根的配對相關。Odlyko 對 $\bar{g}_j$ 的間距 (spacing) 仔細地做了數值計算。圖4和圖5是 $\bar{g}_{j+1}$ 和 $\bar{g}_j$ 之間的差和它們之間配對相關的分佈圖, 其中 j 在 10^{20} 到 $10^{20}+7\cdot 10^6$ 間, 和高斯 unitary 矩陣非常吻合。

由上面的結果, 我們已經找到了一大群 ζ 函數的零點, 而且每個零點的實部都是 $\frac{1}{2}$, 這樣是不是表示我們已經有足夠的證據證明黎曼猜想是正確的呢? 先別急著下結論, 看一下另一個數論的猜想:

小於 x 的質數個數 $\pi(x)$ 必定小於 $li(x)=\int_1^x \log y dy$。

這個問題, 計算上的證據也是一面倒的。但是 Littlewood 用間接的方式證明, 存在無窮多個 x 使得 $\pi(x) > li(x)$, 他的證明中, 並沒有說明什麼時候第一個這樣的 x 會出現, 他的學生 Skewes 證明在 $10^{10^{10^{10}}}$ 以內, 這樣的 x 必定會出現。後來這個上界降到 10^{300}, 這個數目仍舊超過電腦的能力範圍。

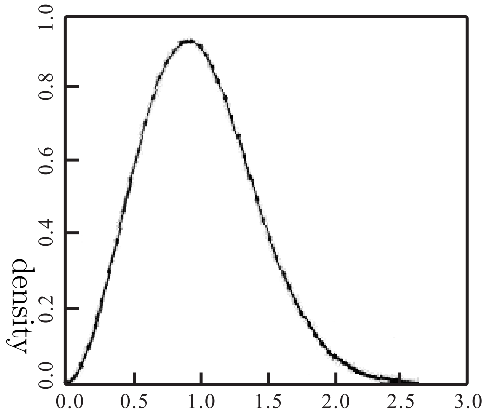

圖4. Nearest neighbor spacings among 70 million zeros beyond the 10^{20}-th zero of zeta, versus $\mu_1(GUE)$

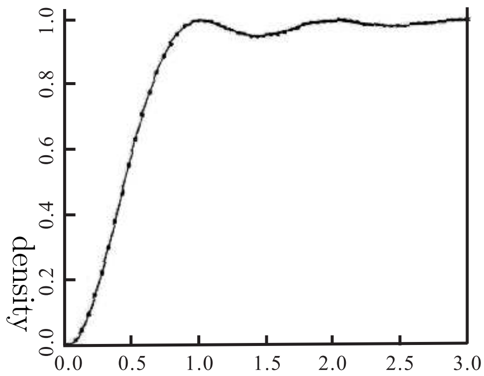

圖5. Pair correlation for zeros of zeta based on 8×10^6 zeros near the 10^{20}-th zero, versus the GUE conjectured density $1-(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^2$

2. 我們對數值計算的結果能抱多少信心?

這個問題有很多種答案, 視計算的目的而定。有些問題本身是就是離散的問題, 可以完全準確無誤地用電腦進行證明。一個有名的例子就是 Haken 和 Appel 用計算機來證明四色定理。但是仍有人反對這種方式的證明, 其中一種理由是無法由這種證明窺得問題的內在; 也有人批評沒有一個人能夠驗證計算的每一個步驟。這些都很有道理! 但是也有很多傳統的數學證明,

一篇三百頁, 一系列論文共五千頁, 這種證明一樣不能顯示這些問題的內在, 也很難驗證。但是有些人凡是用到電腦計算的證明都反對, 這是我一直無法理解的。

還有一種計算是一個證明的邏輯結構的主要部分, 例如 Lanford 對 Feigengaum 猜想的證明, Feigengaum 猜想是關於一個 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$ 平滑單峰 (unimodel) 函數的迭代, 經過適當的調整尺度 (rescale), 迭代出來的函數會近似於一個形如 $F(f)=f$ 的泛函方程的解。Lanford 先計算出一個 F 不動點的近似值, 再用電腦計算證明 F 在不動點附近是收縮映射 (contraction)。這些計算都需要嚴格的誤差估計, 有一種專做這種估計的技巧叫 interval arithmetic。

做人工智慧的人喜歡說電腦很快就不用人類幫忙, 自己可以證明有趣的定理。我相信這一天還很遙遠; 數學是一種深層的心智活動, 遠非現在的電腦能力所能及, 例如玩西洋棋。

還有很大一類的計算是求一個問題的數値解, 例如偏微分方程。這時候最重要的就是要找實際的誤差估計, 而不是理論上 (ironclad) 的誤差估計。不幸的, 這很困難。很多時候, 理論的誤差估計告訴我們, 對足夠小的離散參數 h, 誤差正比於 h 的某一個已知的次方, 用不同的 h 算三、四次就可以檢驗這個冪次關係。未來應該發展更精密的誤差估計法, 也許可以做一些事後、而非事前的誤差估計。

還有一類常見的計算—蒙地卡羅法 (Monte Carlo approximation), 這類計算只有統計學上的重要性。對機率學家和做動力系統的人來說, 眼前的挑戰就是爲如何做這類問題的數値分析指引一條明路。

剛才我提到所謂複雜的計算, 現在我就舉幾個流體力學的例子。例如在新一代民航機的設計中, 計算的重要性不下於傳統的風洞測試 (wind tunnel testing)。他們將控制氣流的方程式離散化之後, 算出飛機外部數百萬個點的氣流速度、壓力和氣體密度。圖6就是電腦計算出來的飛機表面的壓力分佈。這個辦法在研究飛機以巡航速度 (最省燃料的速度) 飛行時的性能非常有效, 但在研究飛機設計外的情況時, 例如起飛或降落時就比較差。由於飛機造價昂貴, 只要稍微提高效率就能節省很多營運成本, 未來的目標就是找出使飛機所受阻力最小的形狀, 要達到這個目標, 計算仍比風洞測試容易的多。

質量、動量及能量的守恒律就是主宰氣流的方程式, 寫下來是一組一階可對稱化雙曲擬線性偏微分方程組 (symmetrizable hyperbolic system of quasilinear PDE)。很久以前, Paul Garabedian 就提出了這個問題平滑解的理論, 有一種無震波 (shockless) 的機翼就是基於這個理論設計出來的。但這種解的平滑性經過一段時間就會消失, 不論初始狀態多麼平滑都一樣, 所以這種解不是物理上所要找的永遠滿足方程式的解。James Glimm 證明了當空間只有一維時, 存在一個對任何時間都有定義的弱解 (weak solution)。除了一維外, 其他維數目前還沒有發現類似的結果。

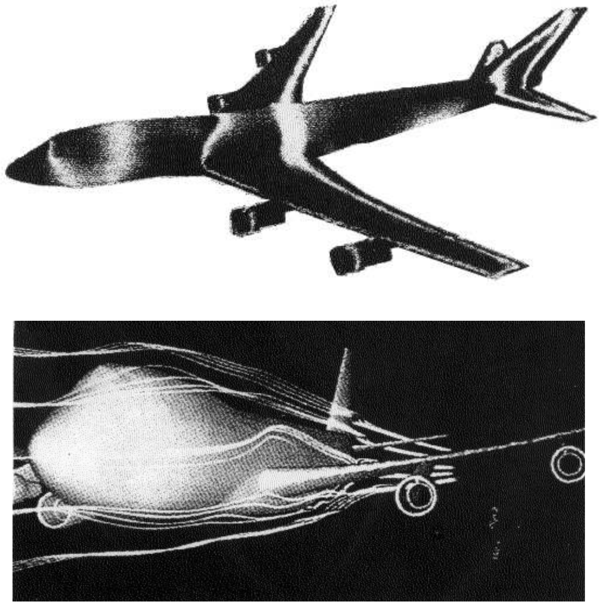

圖6. 飛機

由計算二、三維可壓縮流 (compressible flow) 的經驗顯示, 物理學家所要找的那種解很有可能存在。但是這些計算也告訴我們, 即使初始值非常簡單, 解的結構也可能非常複雜。圖7是黎曼問題 (Riemann problem) 的解的等高線圖, (黎曼問題是初始值在四個象限都是常數的偏微分方程)。圖8是因爲一個楔形物 (wedge) 引起的震波 (shock) 所造成的流 (flow), 其密度和壓力的等高線。由這兩個例子可以看出即使非常簡單的初始值也會立刻產生極複雜的流。

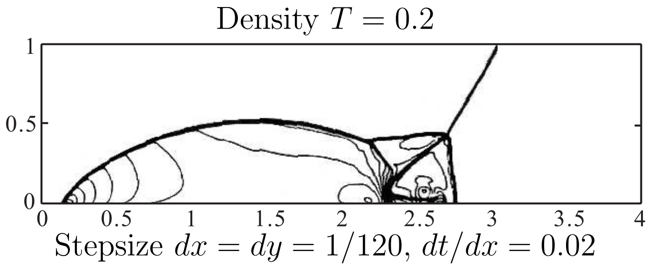

圖7. 黎曼問題

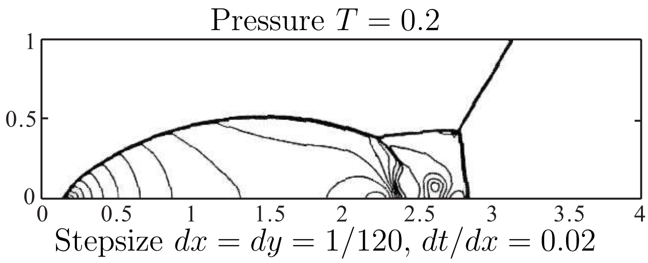

圖8. 楔形物

另一個有趣的例子是人類心臟血液的流動。有句老話說心臟就是一個幫浦, 大約二十年前, Charles Peskin 用他的模型證實了這一句話。他假設血液是稍有黏性、不可壓縮的液體, 受心肌所施的外力影響而流動。可想而知這是一個麻煩的流體動力學問題, 第一、邊界 (boundary) 會移動; 第二、心肌所施的力非常複雜。Peskin 的理論證實了所有既有的有關心臟的知識, 見圖9。不僅如此, Peskin 發現了瓣膜開合的機轉, 這是以前所不清楚的, 他發現血液對瓣膜所施的 aerodynamic lift 就是瓣膜閉合的關鍵。Peskin 的模型對人工心臟的設計很有幫助。

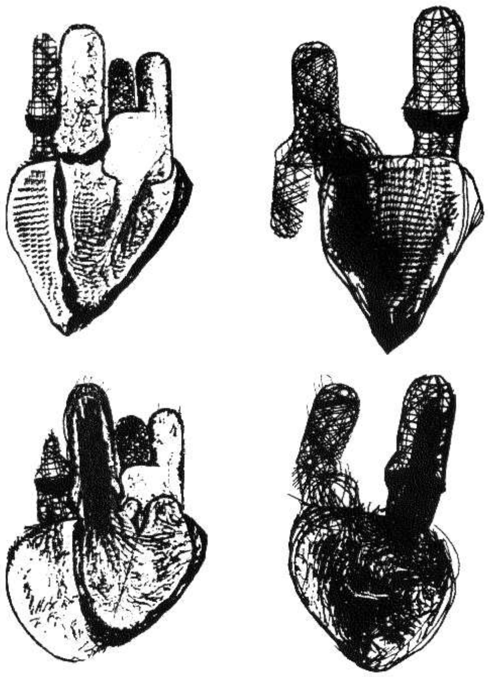

圖9. 心臟

3. 科學計算的挑戰

最後我們來談談未來數學家所面對科學計算的挑戰。大家都知道過去五十年來, 電腦的發展一日千里。從前認爲超出電腦能力的難題, 現在都可以更快、用更低的成本解決。但是大家也許不知道, 能有這樣長足的進步, 不只是歸功於電腦軟硬體上的改良, 計算方法上的突破也有很大的功勞。下面是幾個顯著的例子:

- 震波捕捉法 **(Shock capturing):** 計算有震波 (shock) 的流時, 很難預測新的震波什麼時候出現、在哪裡出現。要處理這些震波, 尤其在交互作用 (interaction) 時的震波, 是既惱人又繁重的工作。Von Neumann 和 Richtmyer 想到了一個聰明的法子, 他們在流體力學的方程式中加進一個代表黏性的項, 讓這一項和 truncation error 一樣大。如此

一來, 不連續點變成變化非常快的平滑點, 就不須另外處理這些不連續點了。只要這些氣體動力學的方程式在離散化時滿足一些條件, 就能保證找到的解會滿足震波條件 (shock condition)。

- 多重網格 **(Multigrid):** 把一個偏微分方程 (例如 Laplace 方程) 離散化以後, 接下來的問題就是解一組線性的代數方程式。六十年代時 Federenko 提出了一種非常有效率的迭代法, 叫做多重網格, 可以解決這些代數方程式。其想法簡單的說, 如果想得到大範圍的資訊, 就用比較粗的網格; 如果要得到愈局部愈細緻的資訊, 就用愈細的網格。

- 影像重建 **(image reconstruction):** 現在已經有很好的數學方法可以更快、更精確地重現 X 光、核磁共振及正子放射 (positron emission) 所掃描出的影像。

- 快速富立葉變換 **(Fast Fourier transform):** 要估計一個函數的富氏係數, 並且用所得到的富氏級數來表示這個函數, 必須要做下面的有限富立葉變換 (finite Fourier transform):
$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \omega^{jk} f_k,\ \ \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$
直接算的話, 需要做 n^2 次乘法。但是利用 ω^{jk} 矩陣的特殊結構, Tukey 和 Cooley 發明了一種只要乘 $n\log n$ 次的演算法。這個演算法使得富立葉變換成爲解偏微分方程很實用的數值方法。有關這段歷史, 可以參看 [6]。

- 快速矩陣乘法: 一般而言, 作矩陣乘法需要做 $O(n^3)$ 次乘法, 在矩陣沒有任何特殊性的情況下, 似乎不可能存在更有效率的演算法了。想不到, 六十年左右 Volker Strassen 想出了一個計算量只有 $O(n^{2.807\cdots})$ 的演算法。其中的指數 $2.807\ldots$ 就是 $\log_2 7$, 也就是說, 一般人做 2 階矩陣的乘法要算8次乘法, Volker Strassen 有辦法只做7次。

以上這些只是一些意想不到的數學捷徑; 還有很多其他演算法在以前就被想到了, 例如組合方法 (combinatorial) 的演算法、快速求出函數值的方法、以及線性代數的一些有效率的演算法, 這方面可以參看 [18] 和 [48]。無疑地, 還有很多方法正等著被發現, 而它們正是未來計算技術發展的推手。

參考文獻

1. Arbarello, E. and De Concini, C. *Geometrical Aspects of the Kadomtsev-Petviashivili Equation*, Lecture Notes in Math., **1451**, Springer Verlag, Berlin, 1990.
2. Brandt, A., *Multi-level adaptive solutions to boundary value problems*, Math. of Comp., **31** (1997), 333.

3. Chorin, A. J. *Turbulence as a Near-Equilibrium Process*, 235-249 Lectures in Applied Mathematics, **31** Amer. Math. Soc., 1996.
4. Collet, P. and Eckmann, J. P., *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston, 1980.
5. Cooley, J. W. and Tukey, J. W., *An algorithm for machine calculaton of complex fourier series*, Math. Comp., **19** (1965), 297-301.
6. Cooley, J. W., Garvin, I. et al., *The 1968 Arden House Workshop on Fast Fourier Transform Processing*, IEEE, Transations on Audio-and-Electro Acoustics, **AU-17**, (1969).
7. Faddeev, L. and Zakharov, V. E., *The KdV equation: A completely integrable hamiltonian system*, Funct. Anal. Appl., **5** (1971), 280-287.
8. Federenko, R. E., *The speed of convergence of an iterative process*, USSR Comp. Math. Phys., **4** (1964).
9. Feigenbaum, M., *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys., **19** (1978), 25-52.
10. Fermi, E., Pasta, J. and Ulam, S., *Studies in nonlinear problem I*, Los Alamos Report #1940 (1956), reprinted in *Nonlinear Wave Motion*, Lectures in Appl. Math., **15**, AMS 1974.
11. Flaschka, H., *On the Toda lattice I*, Phys. Rev. B, **9** (1974), 1924-1925, II Prog. Theor. Phys., **51** (1974), 703-716.
12. Fokas, A. S. and Zakharov, V. E., *Important Developments in Solition Theory*, Springer Verlag, New York, 1993.
13. Ford, J., Adv. Chem. Phys., **24** (1973), 155.
14. Garabedian, P. R., Bauer, Korn, D. G., Jameson, A., *Suprercritical Wing Sections II*, Lecture Notes in Economics and Math. Systems **108**, Springer Verlag, 1975.
15. Gardner, C. S., *The KdV equation and generalizations VI: The KdV equations as a Hamiltonian system*, J. Math. Phys, **12** (1971), 1548-1551.
16. Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M., *A method for solving the KdV equation*, Phys. Rev. Lett., **19** (1967), 1095-1097.
17. Glimm, J., *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, CPAM, **18** (1965), 697-715.
18. Greengard, L. and Rokhlin, V., *A fast algorithm for particle simulation*, J. Comp. Phys., **73** (1987), 325.
19. Harten, A., *Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets*, J. Appl. Num. Math., **12** (1993), 153-193.
20. Haus, H. A., *Molding lignt into solitons*, IEEE Spectrum, (1993), 48-53.
21. Jameson, A., *Computational aerodynamics for aircraft dseign*, **245** (1989), 361-371.
22. Jimbo, M. and Miwa, T., *Algebraic analysis of solvable lattice models*, CBMS Regional Conference Series in Math. **85**, AMS, Providence, 1995.
23. Katz, N. M. and Sarnak, P., *Zeros of Zeta functions and symmetry*, Bull. AMS (new series), **36** (1999), 1-26.
24. Kruskal, M. D. and Zabusky, N., *Interactions of solitons in a collisionless plasma, and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett, **15** (1965), 240-243, **19** (1967), 1095-1098.
25. Lanford, O. E., *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures*, Bull. AMS (new series), **6** (1982), 427-434.
26. Lax, P. D., *The beginning of applied mathematics after the second world war*, Quaterly Appl. Math., **56** (1999), 607-613.
27. Lax, P. D. and Liu, X. D., *Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by Positive Schemas*, SIAM J. of Sc. Comp., **19** (1998), 319-340.

28. Lenstra, A. K. and Lenstra, H. W., *Algorithms in Number Theory*, Hand book of Theoretical Computer Science, **A**, Algorithms and Complexity, Ch. 12, 673-715. Elsevier and MIT Press, 1990.
29. Lorenz, E., *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., **26** (1973), 130-141.
30. Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Procesing*, Academic Press, San Diego, 1998.
31. Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1983.
32. McQueen, D. M., Peskin, C. S. and Yellin, E. L., *Fluid dynamics of the mitral valve: physiological aspects of a mathematical model*, Amer. J. Physiology, **242** (1982) H1095-H1110.
33. Mollenauer, L. F., Lichtman, E., Harvey G. T., Neublet, M. J. and Nyan, B. M., *Demonstration of error-free soliton transmission over more than 15000km.*, Electron. Lett, **27** (1992), 792-794.
34. Moser, J., *Three interable systems connected with isospectral deformations*, Adv. in Math., **16** (1975), 107-220.
35. von Neumann, J., *The Mathematician*, reprinted in J. R. Neewman, *The World of Mathematics*, **4**, 2053-63, Simon and Schuster, 1956.
36. von Neumann, J., *Proposal and Analysis of a New Numerical Method in the Treatment of Hydrodynamical Shocks*, (1944), Collected Works **VI**, Pergamon Press, New York, 1963.
37. von Neumann, J. and Goldstein, H., *On the Principles of Large Scale Computing Machines*, 1945, Collected Works **V**, Pergmon Press, New York, 1961.
38. von Neumann, J. and Richtmyer, R., *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*, J. Appl. Phys., **21** (1950) 232-237.
39. Odlyczko, A., *The* 10^{20}*-th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of its Neighbors*, 1989 AT and T Bell. Lab. Preprint.
40. Oxtoby, J. C. and Ulam, S., *Measure-preserving homeomorphisms and metric transitivity*, Ann. Math., **42** (1941), 874-920.
41. Peskin, C. S. and McQueen, D. M., *Fluid Dynamics of the Heart and its Valves*, Case Studies in Mthematical Modeling-Ecology, Physiology, and Cell Biology, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
42. Rivest, R. L., Shamir, A. and Adleman, L., *A method for a obtaining digital signatures and public key cryptosystems*, Comm. ACM **21**, (1978), 120-126.
43. Ruelle, D., *Chaotic Evolution of Strange Attractors the Statistical Analysis of Time Series for Deterministic Nonlinear Systems*, Cambridge Univ. Press, 1989.
44. Shiota, T., *Characterisation of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83** (1986), 333-382.
45. Stewart, I., *Does God Play Dice*? Blackwell, Cambridge, 1989.
46. Strassen, V., *Gaussian elimination is not optimal*, Num. Math., **13** (1969), 354-356.
47. Toda, M., *Theory of Nonlinear Lattices*, Series in Solid State Sciences, **20**, Springer Verlag, New York, 1988.
48. Trefethen, L. N. and Bau, D., *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philandelphia, 1997.
49. Wesseling, P., *An Introduction to Multigrid Methods*, Pure and Appl. Math., Wiley and Sons, 1992.

—本文整理者當時就讀於台灣大學數學系—