高斯函數和它的一個現實原型

徐瀝泉

摘要: 本文從研究分數部分函數 $x-[x]$入手, 結合具體實例給出了它的一個現實原型 $t=\frac{360}{11}\{[\frac{11T-180}{360}]+\frac{3}{2}\}-T$ (鐘表之長短針直交公式), 並從它的 Fourier 展式導出了一類參考級數和一個"優美比": $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}$

1. 對高斯函數性質的再認識

命 x 爲一實數, 以 $[x]$ 表不大於它的最大整數, 則 $[x]\leq x<[x]+1$, 顯然 $0\leq x-[x]<1$。

故稱 $x-[x]$ 爲 x 的小數部分 (分數部分), 記爲 $\langle x\rangle$。於是

$$x-[x]=\langle x\rangle. \tag{1}$$

函數

$$y=x-[x] \text{ 或 } y=\langle x\rangle. \tag{2}$$

在數學分析著作中大都有所提及。本文研究它的一重要性質, 下文中給出了它的一個饒有興趣的現實原型。

先給出 $y(x)$ 的直觀的圖像表示如下:

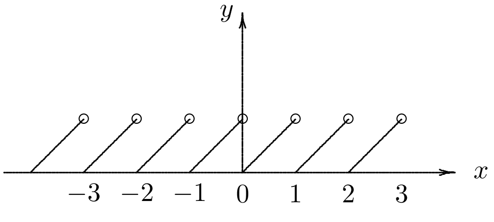

圖1

參考圖 (1), 易見下列事實 (證明略):

1. 函數 $y(x)$ 的周期 (最小正周期) 爲1。
2. 在整個區間 $(-\infty,+\infty)$ 上, $x=k$ ($k\in Z$ 爲整數, 下略) 時 y 左不連續, 餘皆連續。
3. 函數 $y(x)$ 有 Fourier 展式。

在區間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上進一步研究函數:

(i) $y(x)$ 只有一個間斷點 $x=0$;

(ii) 可把這區間分成兩半 $[-\frac{1}{2},0)$ 和 $[0,\frac{1}{2}]$, 且在每一部分上 $y(x)$ 單調遞增。如所知:

$$y=\langle x\rangle=x-[x]$$
$$=\begin{cases}x-[-\frac{1}{2}]=x-(-1)=x+1,\ x\in[-\frac{1}{2},0);\\ x-[0]=x-0=x,\ x\in[0,\frac{1}{2}].\end{cases} \tag{3}$$

於是 $y(x)$ 在區間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上分兩段可微, 即滿足 Fourier 級數收斂定理中的條件,

從而可得 y 的 Fourier 展式爲

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2k\pi x+b_k\sin 2k\pi x)$$
$$x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$$

注意到 (3) 並利用奇偶函數的性質, 便可很快確定其 Fourier 係數:

$$a_0=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\langle x\rangle dx=1,$$
$$a_k=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\langle x\rangle\cos 2k\pi x dx=0,$$
$$b_k=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sin 2k\pi x dx=-\frac{1}{k\pi}.$$

從而得

$$\begin{aligned}y=\langle x\rangle&=x-[x]\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k},\\&\quad x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}.\end{aligned}\tag{4}$$

(4) 式右邊級數的和在間斷點0處等於

$$\frac{f(0_+)+f(0_-)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

若以1爲周期, 把這級數延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上, 則當 x 取所有的實數值時, 它都收斂, 且其和函數以1爲周期重複取遍它在區間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上所取的那些值, 即:

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k}$$
$$=\begin{cases}y=\langle x\rangle=x-[x],\\ x\in[(2k-1)\frac{1}{2},(2k+1)\frac{1}{2}]\setminus\{k\};\\ \\ \frac{1}{2},\ x\in\{k\}.\end{cases}$$

圖 1-1 就表示這級數的周期延拓。

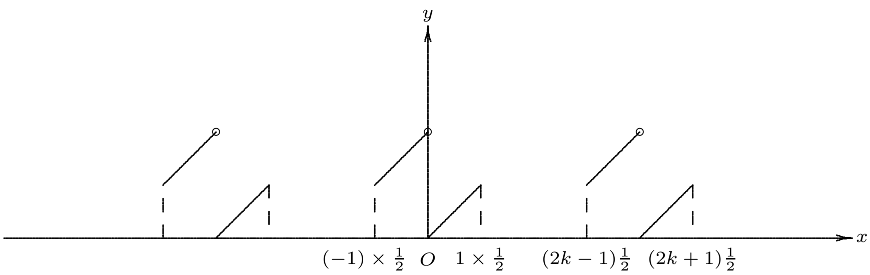

圖 1-1

2. “鐘表直交公式”—— 一個現實原型

凡數學對象都具有客體背景存在性這一特徵 (參閱徐利治「數學方法論選講」)。如果我們把函數 $y=\langle x\rangle=x-[x]$ 看作是前人從具體問題、具體對象中抽取出來的一個數學模型, 那麼上面的工作是進一步把這一模型理論化了。下面我們將回到現實中去, 通

過日常生活中的一個實際例子, 看一看怎樣一步步地抽象出這個數學模型來。

問題: 某時刻起多久鐘表之長短針 (分針和時針) 互相垂直?

這是「算術」中的一個典型題。而我們這裡所感興趣的問題是如何建立起關於已知變量 T 和未知變量 t 之間的函數關係。

如所知, 分針每分鐘轉過的角度爲 $\frac{2\pi}{60}$, 時針每分鐘轉過的角度爲 $2\pi/(60\times 12)$。從零點起, T_0 分鐘後的兩針直交, 則

$$(\frac{2\pi}{60}-\frac{2\pi}{12\times 60})T_0=\frac{\pi}{2},\ \text{解之得}$$

$$T_0=\frac{180}{11}.$$

因零點兩針重合, 而零點之後 $180/11$ 分鐘兩針直交, 故零點之前 $180/11$ 分鐘兩針也直交。所以兩針直交的最短間隔時間爲 $360/11$ 分鐘。

我們不妨以0點 $180/11$ 分作爲新時間 T' 的零點, 即把原時間的零點從時間坐標軸 T 上右移 $180/11$ 個單位 (分鐘)。換言之, 引入新時刻

$$T'=T-180/11 \tag{5}$$

在新時制下, 設某時刻 T' 起又過 t 分鐘兩針直交。則在時間 T' 裡兩針直交的次數必爲 $\frac{360}{11}$ 的倍數 (至於有沒有直交, 對我們的推理並不重要):

$$k=\frac{T'}{\frac{360}{11}}=\frac{11T'}{360}.$$

但 k 必須是不大於 $11T'/360$ 的最大整數, 故記作

$$k=[\frac{11T'}{360}].$$

而直交 $k+1$ 次所需的時間

$$T'+t=\frac{360}{11}\{[\frac{11T'}{360}]+1\},$$

故 $$t=\frac{360}{11}\{[\frac{11T'}{360}]+1\}-T' \tag{6}$$

或由(1) $$t=\frac{360}{11}\{1-\langle\frac{11T'}{360}\rangle\}$$

仍代回到原時刻 T, 則得

$$\begin{aligned} &t=\frac{360}{11}\{[\frac{11T-180}{360}]+\frac{3}{2}\}-T\\ \text{或}\quad &t=\frac{360}{11}\{1-\langle\frac{11T-180}{360}\rangle\}\end{aligned} \tag{7}$$

其中 T 的單位是分鐘。公式 (7) 就是已知變量 T 和未知變量 t 之間的函數關係, 其中 t 是 T 的函數, 或記作 $t(T)$。

有趣的是 T 的取值, 只要理解成與實際意義相吻合的時間, 計算結果都與實際完全相符。不妨看幾例:

(i) 0點 5分; (ii) 25點 16分; (iii) -75分之後多久, 鐘表之長短針互相直交?

(i) $T_1=5$, $[\frac{11\times 5-180}{360}]=-1$, 由 (7) 得 $t_1=11\frac{4}{11}$;

(ii) $T_2=25\times 60+16=1516$, $[\frac{11\times 1516-180}{360}]=45$, 得 $t_2=5\frac{9}{11}$;

(iii) $T_3=-75$, $[\frac{11\times(-75)-180}{360}]=-3$, 由 (7) $t_3=25\frac{10}{11}$.

其中25點16分理解爲1點16分或13點16分, -75分理解爲分針逆時針轉過 $1\frac{1}{4}$ 圈所指時刻10點45分。

由此可知, (7) 中 T 的取值範圍限不限制都無關緊要。

順便提及, 如有這樣的 T 值, 使

$$\begin{aligned} &\frac{11T-180}{360}=[\frac{11T-180}{360}]\\ \text{或}\quad &\langle\frac{11t-180}{360}\rangle=0\end{aligned} \tag{8}$$

成立, 則即時直交。由此可方便地算出一天當中兩針直交的時刻和次數。

時	分	時	分	時	分	時	分	時	分
0	$16\frac{4}{11}$	0	$49\frac{1}{11}$	1	$21\frac{9}{11}$	1	$54\frac{6}{11}$	2	$27\frac{3}{11}$
3	0	3	$32\frac{8}{11}$	4	$5\frac{5}{11}$	4	$38\frac{2}{11}$	5	$10\frac{10}{11}$
5	$43\frac{7}{11}$	6	$16\frac{4}{11}$	6	$49\frac{4}{11}$	7	$21\frac{9}{11}$	7	$54\frac{6}{11}$
8	$27\frac{3}{11}$	9	0	9	$32\frac{8}{11}$	10	$5\frac{5}{11}$	10	$38\frac{2}{11}$
11	$10\frac{10}{11}$	11	$43\frac{7}{11}$						

3. Fourier 展式

如果把 (7) 改寫爲

$$\langle\frac{T-\frac{180}{11}}{\frac{360}{11}}\rangle=1-\frac{t}{\frac{360}{11}}$$

那麼引進變換

$$\begin{cases} x=\frac{T-\frac{180}{11}}{\frac{360}{11}}, \\ y=1-\frac{t}{\frac{360}{11}}. \end{cases} \tag{9}$$

就變成函數 $y=\langle x\rangle$ 了。在此意義上說, 函數 $t(T)$ 便是函數 $y(x)$ 的一個現實原型。

顯然, 變量變換 (9) 並不改變 $t(T)$ 的固有的本質特徵, 由 $y(x)$ 的圖像得到 $t(T)$ 的圖像, 程序如下:

$$\begin{aligned} y=\langle x\rangle &\to y=-\langle x\rangle \ (x \text{ 軸反射}) \\ &\to y=-\langle x-\frac{180}{11}\rangle \\ &\quad (y\text{軸右移}\tfrac{180}{11}\text{個單位}) \\ &\to y=-\langle\frac{x-\frac{180}{11}}{\frac{360}{11}}\rangle \\ &\quad (\text{周期擴大}\tfrac{360}{11}\text{ 倍}) \\ &\to y=-\frac{360}{11}\langle\frac{x-\frac{180}{11}}{\frac{360}{11}}\rangle \\ &\quad (\text{振幅擴大 }\tfrac{360}{11}\text{ 倍}) \\ &\to y=\frac{360}{11}\Big\{1-\langle\frac{x-\frac{180}{11}}{\frac{360}{11}}\rangle\Big\} \\ &\quad (x \text{ 軸下移 }\tfrac{360}{11}\text{ 個單位}) \end{aligned}$$

仍使用字母 T 和 t 表示, 便得函數 $t(T)$ 的圖像 (圖 (2))。借助於這一直觀表示, 並與 $y(x)$ 的性質作一比較研究, 不難得到函數 $t(T)$ 的下述結果 (其證明方法與第一部分中 1、2、3之證法完全類同):

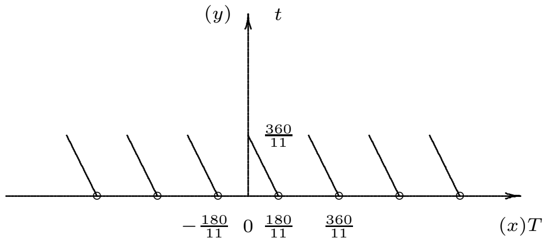

圖2

I. $t(T)$ 的周期爲 360/11;

II. $T=(2k+1)\cdot 180/11$ 爲 t 的第一類間斷點 (左不連續右連續, 且在區間 $((2k-1)\cdot 180/11,(2k+1)\cdot 180/11)$ 上單調改變;

III. 有 Fourier 展示:

$$t=\frac{180}{11}+\frac{\frac{360}{11}}{\pi}\sum\frac{(-1)^k\sin\frac{11}{180}k\pi T}{k}, \tag{10}$$

$$T\in((2k-1)\cdot\frac{180}{11},(2k+1)\cdot\frac{180}{11})$$

當 $T=(2k+1)\cdot\frac{180}{11}$ 時右邊級數和等於 $\frac{180}{11}$。

4. 結果

記 (10) 右邊的和函數爲 $S(T)$ 。十分有趣的是當 $T=\frac{90}{11}$ 時,

$$S(\frac{90}{11})=\frac{180}{11}+\frac{\frac{360}{11}}{\pi}\sum\frac{(-1)^k\sin\frac{k\pi}{2}}{k}$$
$$=\frac{180}{11}+\frac{\frac{360}{11}}{\pi}(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots)\qquad(11)$$

一方面, 由 (7) 得 $t(\frac{90}{11})=\frac{90}{11}$; 另一方面由 (10) 得 $t(\frac{90}{11})=S(\frac{90}{11})$。故

$$S(\frac{90}{11})=\frac{90}{11}.\qquad(12)$$

進而記 $S_1=(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots)$, 則由 (11) 和 (12):

$$\frac{180}{11}+\frac{\frac{360}{11}}{\pi}S_1=\frac{90}{11}$$

從而得 $S_1=-\frac{\pi}{4}$, 即參考級數

$$S_1=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots=-\frac{\pi}{4}\qquad(13)$$

又如取 $T=\frac{45}{11}$ 、$\frac{60}{11}$ 可得

$$S_2=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots)$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots)$$
$$=-\frac{\pi}{8}\qquad(14)$$
$$S_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots)$$
$$=-\frac{\pi}{6}\quad\text{等等。}\qquad(15)$$

若這些參考級數爲已知, 亦可用以檢驗 Fourier 展式 (10) 之正誤。

特別地, 由 (13) 和 (14) 還可以得到 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的兩個冪級數展式的“優美比”:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}$$

$$\text{亦即 }\sqrt{2}=\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}$$

我們對此感興趣, 另闢蹊徑:

$$\because dx^{2n+1}=(2n+1)x^{2n}dx$$
$$\therefore x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}dx^{2n+1}$$

求不定積分:

$$\int x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}\int dx^{2n+1}=\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

定積分:

$$\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+1}$$

作和

$$S'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

$$\text{亦即}\quad S'=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

$$\text{故若設 }S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\cdots,$$

$$\text{則}\qquad S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1(x^{4n}+x^{4n+2})dx$$
$$=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}(1+x^2)dx\qquad(*)$$
$$=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_0^1=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

從而

$$\sqrt{2}=\frac{s}{\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots},$$

殊途同歸。

註: $(*)$式中等號成立的條件是運用了反常積分中逐項求積分的理論。注意到積分區間 $[0,1]$, 對於級數的部分和 $S_n(x)$, 我們有

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^{4i}(1+x^2)\\&=\frac{1\pm x^{4n}}{1+x^4}(1+x^2)\le 2\frac{1+x^2}{1+x^4}\le 4\end{aligned}$$

故這個和的積分在 $x=1$ 時對 n 一致收斂。

而當 $0\le x\le a<1$ 時, 有

$$\begin{aligned}&|S(x)-S_n(x)|=|x^{4n}|\cdot\frac{1+x^2}{1+x^4}\\&\le 2|x^{4n}|\le 2a^{4n}\to 0\ (\text{當 } n\to\infty \text{ 時})\end{aligned}$$

即 $S_n(x)$ 在 $[0,a]$ 一致趨向於

$$S(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

—本文作者任職於中國無錫市教育研究中心—