棋盤的質數 $p-L$ 形覆蓋

馮躍峰

對給定的自然數 k, 尋找 $m\times n$ 棋盤能被 $k-L$ 形覆蓋的充要條件, 是一個難度相當大的問題, 至今還沒有完全解決。薛通和王元元解決了 $k=3,4$ 的特殊情形 (見文 [1])。接著我們給出了 $m\times n$ 棋盤能被 $5-L$ 形覆蓋的充要條件 (見文 [2]), 從而否定了文 [1]裡的猜想, 並提出了如下兩個猜想:

猜想1: 當 k 爲奇數時, $m\times n$ 棋盤能被 $k-L$ 形覆蓋的充要條件是: (m,n) 或 (n,m) 爲
(i) $(2s,kt),s,t\geq 1$, 或
(ii) $(2s+k-2,kt),s,t\geq 2$.

猜想2: 當爲 k 偶數時, $m\times n$ 棋盤能被 $k-L$ 形覆蓋的充要條件是: $2k|mn$, 且 $\max\{m,n\}\geq k$。

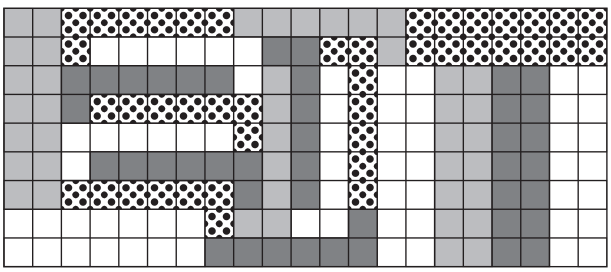
本文的目的是證明 "猜想1" 對奇質數 p 成立。並且對一般的自然數 k, "猜想1" 的充分性成立, "猜想2" 的必要性成立。即下面的三個結論:

定理1: 當 p 爲奇質數時, $m\times n$ 棋盤存在 "$p-L$ 形" 覆蓋的充要條件是: (m,n) 或 (n,m) 爲
(i) $(2s,pt),s,t\geq 1$, 或
(ii) $(2s+p-2,pt),s,t\geq 2$。

定理2: 當 k 爲奇數, 且 $k|m$ 或 $k|n$ 時, $m\times n$ 棋盤能被 "$k-L$ 形" 覆蓋的充要條件是: (m,n) 或 (n,m) 爲
(i) $(2s,kt),s,t\geq 1$, 或
(ii) $(2s+k-2,kt),s,t\geq 2$。

定理3: 若 $m\times n$ 棋盤能被 $2r-L$ 形覆蓋, 則 $4r|mn$, 且 $\max\{m,n\}\geq 2r$。

爲定理的證明預作準備, 我們先考慮當 k 爲奇數時, $m\times n$ 棋盤被 "$k-L$ 形" 覆蓋的辦法。試以 $k=7$ 爲例說明如下:



事實上, 上述安排推廣到所有的奇數 k 均成立。我們視 $m\times n$ 棋盤爲一個 $m\times n$ 矩陣, 以 a_{ij} 表示第 i 行 (row), 第 j 列 (column) 的位置。

引理: 對任何奇數 k, $(k+2)\times 3k$ 棋盤都能被 "$k-L$ 形" 覆蓋。

證: 在 $(k+2)\times 3k$ 棋盤的左上角分割出一個 $k\times 2$ 矩形, 再在左下角分割出一個 $2\times k$ 矩形, 在右下角分割出一個 $k\times(k+1)$ 矩形, 在右上角分割出一個 $2\times k$ 矩形, 最後將下述各組格分別用一個 $k-L$ 形蓋住即可。

$$A_1=(a_{2,3},a_{1,3},a_{1,4},\ldots,a_{1,k+1}),$$
$$A_2=(a_{2,4},a_{2,5},\ldots,a_{2,k+2},a_{3,k+2}),$$
$$A_3=(a_{4,3},a_{3,3},a_{3,4},\ldots,a_{3,k+1}),$$
$$A_4=(a_{4,4},a_{4,5},\ldots,a_{4,k+2},a_{5,k+2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{k-2}=(a_{k-1,3},a_{k-2,3},a_{k-2,4},\ldots,a_{k-2,k+1}),$$
$$A_{k-1}=(a_{k-1,4},a_{k-1,5},\ldots,a_{k-1,k+2},a_{k,k+2}),$$
$$B=(a_{k,3},a_{k,4},\ldots,a_{k,k+1},a_{k+1,k+1}),$$
$$C=(a_{k+2,k+1},a_{k+2,k+2},a_{k+2,k+3},\ldots,a_{k+2,2k-1},a_{k+1,2k-1}),$$
$$D=(a_{1,k+2},a_{1,k+3},\ldots,a_{1,2k},a_{2,2k}),$$
$$E_1=(a_{3,k+3},a_{4,k+3},\ldots,a_{k+1,k+3},a_{k+1,k+2}),$$
$$E_2=(a_{2,k+3},a_{2,k+4},a_{3,k+4},\ldots,a_{k,k+4}),$$
$$E_3=(a_{3,k+5},a_{4,k+5},\ldots,a_{k+1,k+5},a_{k+1,k+4}),$$
$$E_4=(a_{2,k+5},a_{2,k+6},a_{3,k+6},\ldots,a_{k,k+6}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_{k-4}=(a_{3,2k-2},a_{4,2k-2},\ldots,a_{k+1,2k-2},a_{k+1,2k-3}),$$
$$E_{k-3}=(a_{2,2k-2},a_{2,2k-1},a_{3,2k-1},\ldots,a_{k,2k-1}).$$

以上提供的就是 $(k+2)\times 3k$ 棋盤的一種 "$k-L$ 形" 覆蓋。

定理1的證明:

(一) 充分性:

首先, $p\times 2s$ 棋盤可以劃分爲 s 個 $p\times 2$ 矩形, 從而存在 "$p-L$ 形" 的完美覆蓋。於是 $pt\times 2s$ 棋盤存在 "$p-L$ 形" 的覆蓋。其次, 不妨設 (m,n) 爲 $(2s+p-2,pt), s,t\geq 2$, 則有以下情況:

(1) 當 $s=2$, 即 $m=p+2$ 時, 若 $t=2r$, 則 $m\times n=(p+2)\times pt=(p+2)\times 2pr$, 從而 $m\times n$ 棋盤可以劃分爲若干個 $(p+2)\times 2p$ 矩形, 注意到 $(p+2)\times 2p=p\times 2p+2\times 2p$, 所以 $(p+2)\times 2p$ 矩形可以劃分爲若干個 $p\times 2$ 矩形, 從而存在 "$p-L$ 形" 的完美覆蓋。所以 $m\times n$ 棋盤存在 "$p-L$ 形" 的覆蓋。若 $t=2r+1$, 則 $m\times n=(p+2)\times 2p(r-1)+(p+2)\times 3p$。所以 $m\times n$ 棋盤可以劃分爲若干個 $(p+2)\times 2p$

矩形和一個 $(p+2)\times 3p$ 矩形。前面已證 $(p+2)\times 2p$ 矩形存在 “$p-L$ 形” 的覆蓋。又由引理可知, $(p+2)\times 3p$ 矩形存在 “$p-L$ 形” 的覆蓋。所以 $m\times n$ 棋盤存在 “$p-L$ 形” 覆蓋。

(2) 當 $s\geq 3$ 時, $m\times n=(2s+p-2)\times pt=[(2(s-2)+(p+2)]\times pt=2(s-2)\times pt+(p+2)\times pt$。其中 $2(s-2)\times pt$ 棋盤可以劃分爲若干個 $2\times p$ 棋盤, 存在 “$p-L$ 形” 覆蓋。對於 $(p+2)\times pt$ 棋盤, 當 t 爲偶數時, 它可以劃個 $(p+2)\times 2p$ 矩形, 存在 “$p-L$ 形” 覆蓋; 當 t 爲奇數時, 注意到 $t>1$, 所以 $(p+2)\times pt$ 棋盤可劃分爲若干個 $(p+2)\times 2p$ 矩形和一個 $(p+2)\times 3p$ 矩形, 也存在 “$p-L$ 形” 覆蓋。於是, 無論 t 是奇數還是偶數, $m\times n$ 棋盤都存在 “$p-L$ 形” 覆蓋。

(二) 必要性:

因爲 p 是質數, 所以當 $p|mn$ 時, 必有 $p|m$ 或 $p|n$。於是, 若 (m,n) 及 (n,m) 既不爲 $(2s,pt)(s,t\geq 1)$, 也不爲 $(2s+p-2,pt)(s,t\geq 2)$, 則 $p\nmid mn$, 或 m,n 中有一個爲小於 p 的奇數, 或 (m,n), (n,m) 兩者之一爲 $(p,2t-1)(t\geq 1)$, 三者必居其一。首先, 當 $p\nmid mn$ 時, $m\times n$ 棋盤顯然不存在 “$p-L$ 形” 覆蓋, 結論成立。其次, 當 m,n 中有一個爲小於 p 的奇數時, 反設 $m\times n$ 棋盤 M 存在 “$p-L$ 形” 覆蓋, 不妨設 m 是小於 p 的奇數, 則 $m\leq p-2$。由文 [2]的引理1, M 在覆蓋中第一列至少有一個格是個縱向覆蓋的, 這與 $m\leq p-2$ 矛盾。最後, 當 (m,n) 或 (n,m) 爲 $(p,2t-1)(t\geq 1)$ 時, 直接利用文 [2]的引理2, 結論成立。

審視定理1的證明過程, 我們發現 “p 爲奇質數” 這一條件在定理中的作用僅在於 p 爲奇數以及由 $p|mn$ 推出 $p|m$ 或 $p|n$ 。有鑒如此, 若奇數 p 滿足 $p|m$ 或 $p|n$, 則上述證明對這樣的奇數 p 成立。故系理2獲證。

定理3的證明: 設 $m\times n$ 棋盤能被 $2r-L$ 形覆蓋, 我們先證明 $4|mn$。

首先, 顯然有 $2r|mn$, 所以 $2|mn$。如果 $4\nmid mn$, 則 m,n 中一個爲奇數, 另一個爲 $4t-2$ 型的數 $(t\in N)$。不妨設 $m=2s+1$, $n=4t-2(s,t\in N)$。

在 $m\times n$ 棋盤的每個方格中都填入一個數 1 或 -1, 使位於奇數列的格內塡的數都是 1, 偶數列的格內塡的數都是 -1 (見圖1)。

1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1

圖 1

此時棋盤中共有 $2t-1$ 列 “1” 與 $2t-1$ 列 “-1”。於是, 棋盤中所有的數的和爲零。易知, 每個 $2r-L$ 形蓋住的各個數的和只有四種可能: 爲 $2r-2$, $2-2r$ 2, -2。設這些 $2r-L$ 形的個數分別爲 a,b,c,d, 那麼, 所有的 $2r-L$ 形蓋住的數的和爲 $a(2r-2)+b(2-2r)+2c-2d=2(a-b)(r-1)+2(c-d)$。但棋盤內所有數的和

爲零, 於是 $2(a-b)(r-1)+2(c-d)=0$, 即

$$(a-b)(r-1)+(c-d)=0 \qquad (1)$$

另一方面, 在 $m\times n$ 棋盤的每個方格中都塡入一個數 1 或 -1, 使位於奇數行的格內塡的數都是 1, 偶數行的格內塡的數都是 -1 (見圖2)。

1	1	1	1	1	1					1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1					-1	-1
1	1	1	1	1	1					1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1					-1	-1
1	1	1	1	1	1					1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1					-1	-1
1	1	1	1	1	1					1	1

圖 2

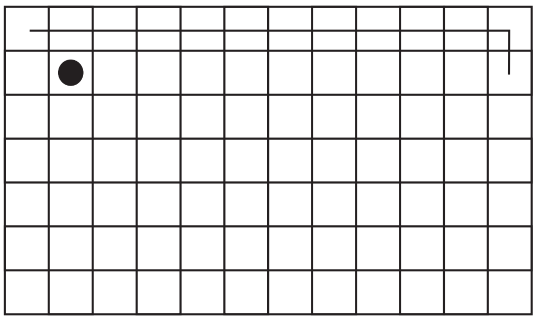
此時棋盤中共有 $s+1$ 行 “1” 與 s 行 “-1”。於是, 棋盤中所有的數的和爲 $n=4t-2$。同樣, 每個 $2r-L$ 形蓋住的各個數的和只有四種可能: 爲 $2r-2$, $2-2r$, 2, -2。設這些 $2r-L$ 形的個數分別爲 a,b,c,d。那麼, 所有的 $2r-L$ 形蓋住的數的和爲 $a(2r-2)+b(2-2r)+2c-2d=2(a-b)(r-1)+2(c-d)$。但棋盤內所有數的和爲 $4t-2$, 於是 $2(a-b)(r-1)+2(c-d)=4t-2$, 即

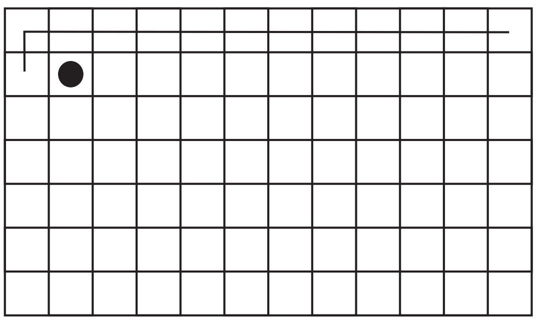
$$(a-b)(r-1)+(c-d)=2t-1 \quad (2)$$

比較 (1) 與 (2), 得 $2t-1=0$, 矛盾。故假設不成立, 即 $4|mn$。

下面證明 $4r|mn$。將 $m\times n$ 棋盤按圖1 的方式塡數, 則有 $(a-b)(r-1)+(c-d)=0$。若 r 爲偶數, 則 $r-1\equiv 1 \pmod 2$, 所以 $a-b+c\equiv 0 \pmod 2$, 所以 $a+b+c+d\equiv a-b+c-d\equiv 0 \pmod 2$。即 $a+b+c+d$ 爲偶數, 因爲所有 $2r-L$ 形的個數爲 $2r(a+b+c+d)$, 即 $mn=2r(a+b+c+d)$, 故 $4r|mn$。

最後證明 $\max\{m,n\}\geq 2r$。反設 $m<2r$, $n<2r$, 若 $m<2r-1$, $n<2r-1$, 則 $m\times n$ 棋盤中放不下一個 $2r-L$ 形, 矛盾。於是不妨設 $n=2r-1$。若 $m=2r-1$, 則 mn 爲奇數, 矛盾。所以 $m<2r-1$, 這樣, $m\times n$ 棋盤中的 $2r-L$ 形都是橫向覆蓋的。



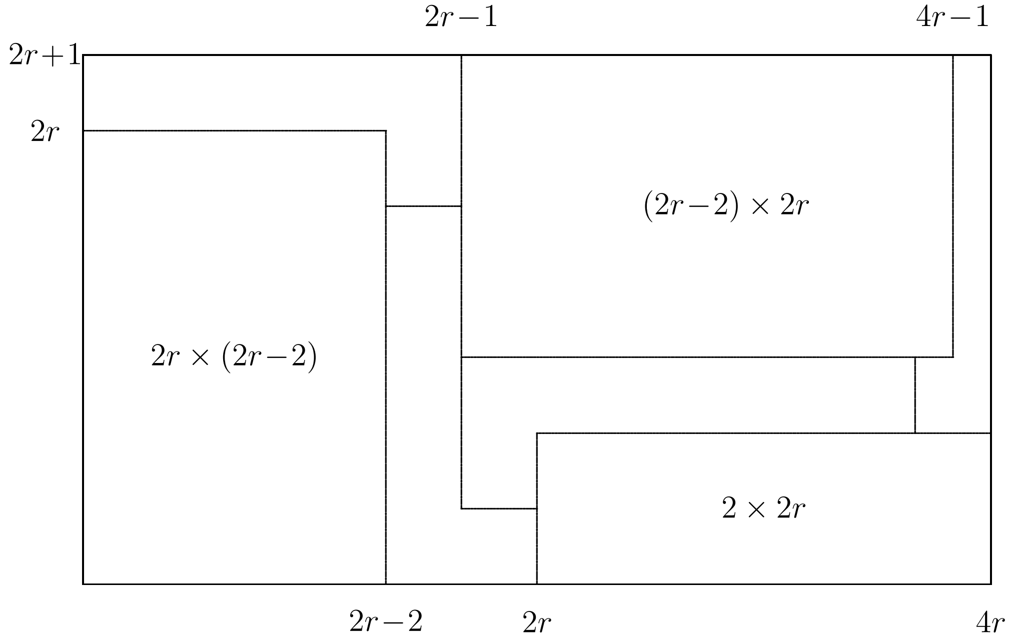


考察 $m\times n$ 棋盤中格 a_{11} 的覆蓋, 當它被一個橫向 $2r-L$ 形覆蓋後, 格 a_{22} 不

可能被某個橫向 $2r-L$ 形覆蓋, 矛盾。故 $\max\{m,n\}\geq 2r$。

顯然, 定理3實際上說明 "猜想2" 的必要性成立。

最後值得一提的是, 陳維昌找到了如下一個能被 $2r-L$ 形覆蓋的一般棋盤的例子(見下圖)



$(2r+1)\times 4n$ 棋盤的 $2r-L$ 覆蓋

這個構圖對於我們研究猜想2的充分性也許有幫助。

有了上述一些結果, 我們不無理由地相信猜想1與猜想2對一切自然數成立。我們期望這個猜想早日得到證明。

參考文獻

1. 薛通, 王元元, 棋盤的 L-形覆蓋, 數學的實踐與認識, 1987年, 4月, p. 35。
2. 馮躍峰, 棋盤的5-L 形覆蓋, 數學傳播, 第23卷第1期 (1999年3月), p. 57-62。
3. 陳維昌, 棋盤的 L-形覆蓋研究 (臺北, 1999, 未出版)。

—本文作者任教於中國廣東深圳高級中學—