

對中國傳統筆算之探討

李 迪

提到數學中的筆算，人們就會立刻想到用筆寫阿拉伯數碼進行計算。在中國，這種筆算是從西方傳進的。講中國數學史的著作中，一般都是說古代用籌進行計算，形成一套籌算法，後來被珠算所代替，直到20世紀初西方筆算逐漸普及。可是在西方筆算傳入之前，中國有沒有自己的筆算呢？有關著作從來沒有人正面講過，但這是一個不能長期迴避的問題。如果這個問題不澄清，那麼對中國傳統數學的認識就會比較模糊。早在10年前，筆者已非有意識的注意到這個問題，認為宋元時代“差不多接近了筆算”，並舉出一些例子予以說明^[1]。後來，筆者又和馮立升合作從正面研究了清代的筆算^[2]。但是整體對中國傳統筆算的研究仍然不夠，現在嘗試進行這一工作。

作為筆算，它的形成要有一定的條件。最重要的是便於書寫的數碼，應當有代表空位的符號。還要有運算符號，以便易於區分是作何種運算。很自然地還要涉及到小數的處理。同時，不同民族或地區人們的習慣以及客觀需要等也是重要因素。

根據上面的考慮，習慣性的筆算是世界上許多民族所有的，一般不用特制的工具，印度、阿拉伯世界，中國的藏族等都應屬於此

種類型。古埃及、巴比倫和北美的瑪雅人的數學也可以這樣看待。但是中國的漢族和北方某些少數民族，中世紀的歐洲等地都使用算具，前者用算籌和算盤；後者也是用算盤。中國和歐洲都是由於客觀需要而逐漸改為筆算的，但計算工具並沒有立即退出歷史舞台，並行了很長時間。數學在發展中經常互相影響，例如最近有學者推測：印度—阿拉伯數系統可能與中國的籌算系統有關^[3]。

為了敘述方便起見，筆者把筆算分為近代筆算和早期筆算兩大類。前者是指用印度—阿拉伯數碼和完整的運算符號和小數點的筆算；後者一般是只有數碼或有小數記法的筆算。

按照上面的分類，直到17世紀初，歐洲的筆算處於早期，因為還沒有完備的運算符號。現在的問題是，中國古代有沒有自己的筆算，它又是什麼樣的。筆者已有了不太確切的回答。實際上，中國傳統數學中已形成了早期筆算，而且比同時代的歐洲更先進。

中國的數碼由籌算擺法而來。把擺出來的數目用筆照樣記錄下來的就是籌碼，在出土的戰國陶器上就有籌碼^[4]，如圖1。在敦煌保存的唐到五代時數學抄本中有大量籌碼，例如九九口訣每句乘出結果都用籌碼記

錄,接著相加(“通前”)也這樣(圖2)^[5]。如此記錄已脫離擺籌,而是一種完全獨立的籌碼。籌碼的出現,為筆算的形成提供了先決條件。

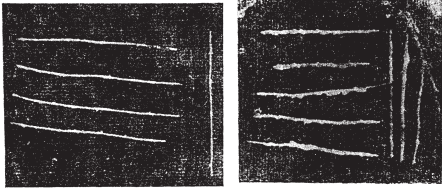


圖1. 河南登封出土戰國陶器上的籌算符號(籌碼)拓片

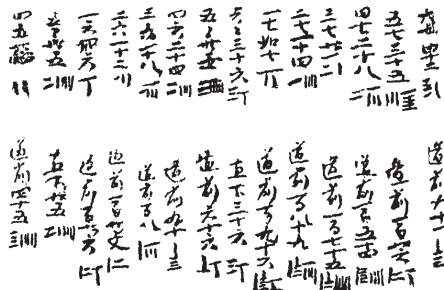


圖2. 敦煌寫本「立成算經」書影(部分)

施行筆算還要解決空位的問題,印度早期用點“.”或圓圈“○”頂空位,就是零。中國的籌算是把空位空著,敦煌的記錄也是如此,例“四五二十”的二十記為“||”。到宋代出現了圓圈“○”,嚴敦杰以為是由“□”形而來^[6]。13世紀的中國數學著作中已普遍使用了符號“○”頂位,而且清楚地有數0的概念。在曆法中也有使用○號的^[7]。

對正、負數的區別也是筆算必須考慮的問題。中國歷史上很早就在籌算中有了區別,那就是正算赤負算黑,用的是紅、黑兩種籌;還有一種辦法是:以斜正為異,即把正數擺正,負數斜擺。現在尚未見到這後一辦法的原始紀錄。在宋元的記錄中,對負數的記法有兩

種,其一是在正負數的最末一位的上或下,有時也在最右端加一文字,如“正”、“負”,秦九韶即這樣做。其二是在最末一位有效數字上加斜畫“\”,李冶、朱世杰等都採用這種辦法。

對小數的記法也是個問題,傳統的籌算用分數,也可以命名,宋元時代還在繼續,但是有了新的變化,例如秦九韶在個位數下加單位,如“○ |||| ≡ 丁 |||| ≡”即 0.54643 寸,又如李冶在小數前加○號,而○下對準個位^[8]。

秦九韶與李冶、朱世杰的記法有一定差別,已如上述,而差別最大的是數碼。李冶、朱世杰完全仿照籌式,沒有改變。而秦九韶則不然,他把幾個數碼變形,如用“○”或“○”表示5,用“×”或“×”表示9,用“×”表示4,可是在全書的使用上並不一貫。北宋司馬光則“×”表示5^[9]。

秦九韶為南宋人,而李冶為金元間人,朱世杰是元統一全國後的北方人又遊學南方。他們的差別是由南北分裂、隔絕造成的,而朱世杰又是以北方的形式融合了南北的數學^[10]。

從留下的演草看,使用傳統的籌算已不適應需要,特別是多層次、多位數、多行列的計算無法使用算籌。籌算至少在北宋還使用,如衛朴“照位運籌如飛”^[11],北方的遼國^[12]、西方的西夏^[12]都用籌計算。可是南宋和北方的金轄區,數學家可能都是既用籌又用筆,而且很可能是由記錄計算結果而演變成以筆為主、以籌為輔的演算方式,到朱世杰時則完

全不用籌了。下面看一些大型算式, 就能說明問題。

例 1. 「數學九章 · 遙渡圓城」題, 經整理得 “開方圖”, 一個開九乘方圖式 (圖 3(a)), 又經 11 個步驟求解得最後一個圖式 (圖 3(b)), 結束。圖 3(a) 所給出的相當於方程

$$x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x - 34992 = 0$$

而圖 3(b) 是

$$\begin{aligned} &x^{10} + 3x^9 + 24x^8 + 72x^7 \\ &+ 288x^6 + 864x^5 + 1728x^4 + 5184x^3 \\ &+ 3888x^2 + 11664x + 33992 = 0 \end{aligned}$$

按照當時的增乘開方法, 由試商 3 乘 1 次項係數 11664 得 33992 與實相減恰盡, 所以 3 就是所求的商。

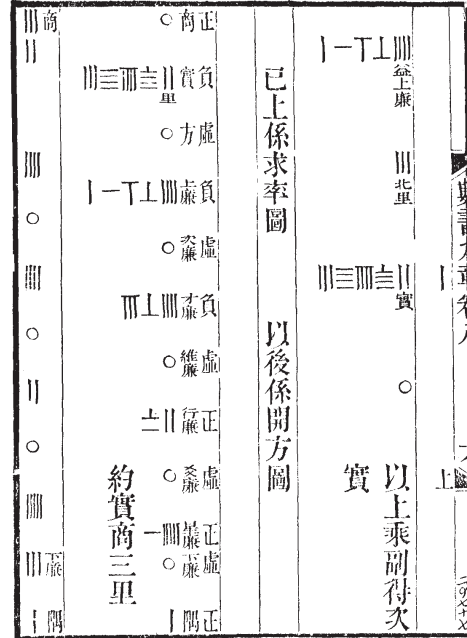


圖3(a)

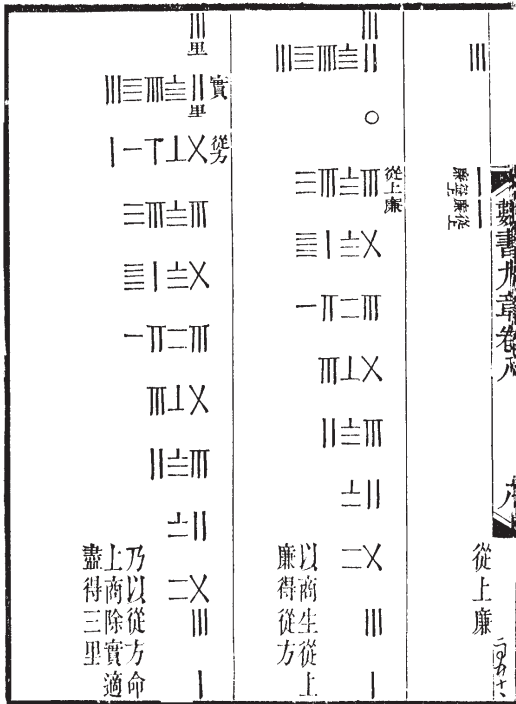


圖3(b)

圖3「數書九章·遠渡圓城」“開方圖”
(据「宜稼堂叢書」本)

例2. 「數書九章·推知糶數」題，是一個相當於3次二項方程，但是常數項是一個帶有 12 個零的大數，3次項的係數是一個帶小數的數，即

$$4.608x^3 - 72000000000000 = 0$$

這裡的常數項“實”在圖4中未加“負”字，隅也未加“正”字，是可以的，因為秦九韶有規定：“實常為負，隅常為正”。此方程的商為

25000，也帶3個零。

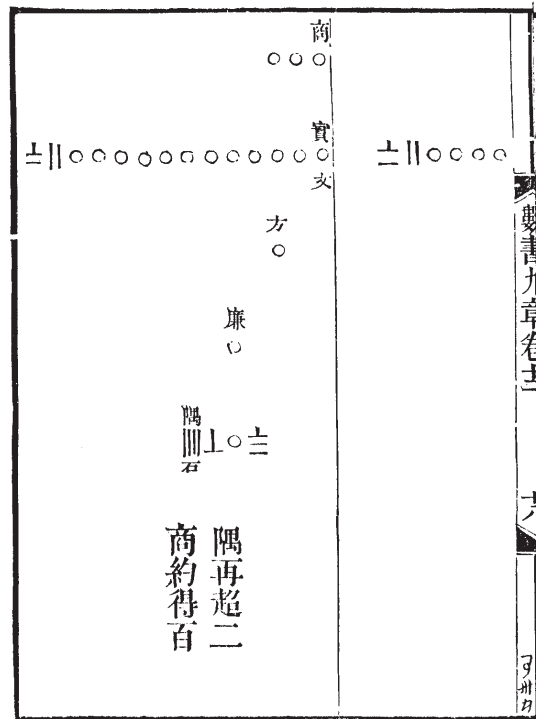


圖4. 「數書九章·推知糶數」“開方圖”
書影(据「宜稼堂叢書」本)

例3. 「數書九章·均貨推本」題，“以方程求之”，要同時由右到左列出四行(圖5)，相當於4元線性方程組係數及常數項所成之增廣矩陣。其“首圖”的現代形式是

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 200 & 40 & 0 & 0 & 10600 \\ 0 & 264 & 800 & 0 & 10600 \\ 0 & 0 & 1670 & 15 & 10600 \\ 58\frac{1}{3} & 0 & 0 & 52 & 10600 \end{array} \right]$$

在原圖上還要加若干文字。經過幾次變換，求出結果。

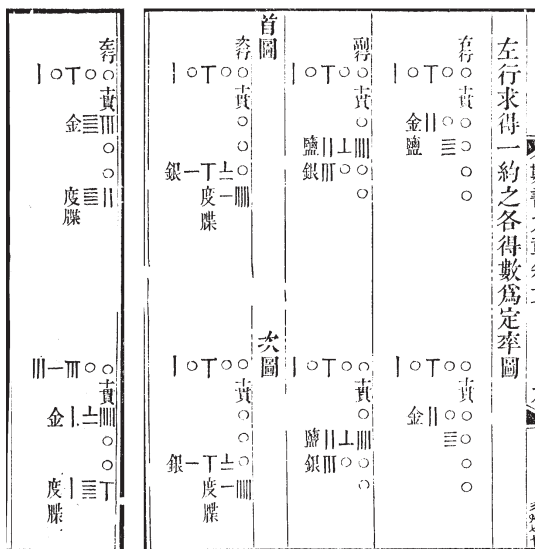


圖5. 「數書九章·均貨推本」題“首圖”與“次圖”(據「宜稼堂叢書」本)



圖6. 「測圖海鏡」卷7“三乘方”書影

例4. 「測圖海鏡」卷7“或問丙出南門”題第三個“又法”所得之“益積開三乘方”(如圖6), 相當於解下面的一元4次方程

$$-2x^4 + 604x^3 + 16280x^2 - 8453244x + 401067842 = 0$$

李冶的作法與秦九韶不同, 是把開方式夾雜在敍當中, 而不單列出。

例5. 「四元玉鑿」卷下之八“今有一數不知多少”題是一“十三乘開方之”即解14次方程的問題, 原題只有術文, 沒有細草, 清羅士琳予以補寫(圖7), 得一個14次方程, 其形式和記法係仿照朱世杰在該書開頭“四象細草假令之圖”的樣子。不論羅士琳所補充是否符合朱世杰的結果, 但形式和數字肯定相同。朱世杰在術裡說以“物元一為開數, 四象和會求之”, 最後得到一個十三乘方的開方式。他必須有演草, 否則無法得到如此高次的開方式, 而且過程之複雜性也可以想像。

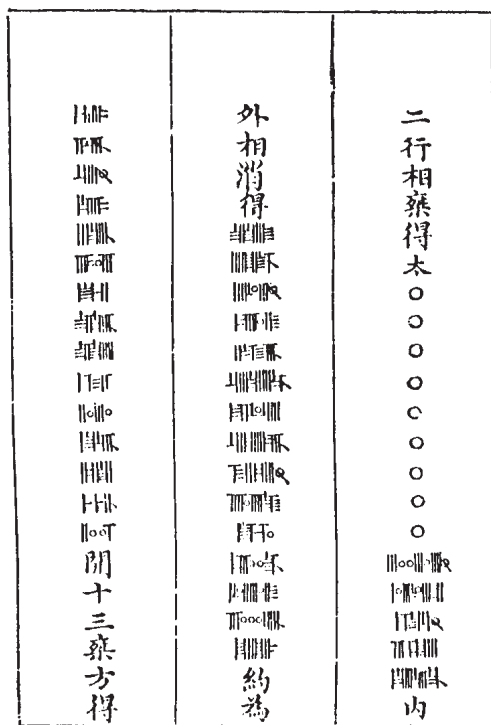


圖7. 羅士琳補草(據「萬有文庫」本)

現在對上述5例進行一些分析。在上舉的5例中, 除圖5的“首圖”和“次圖”可以上下分開外, 其餘都是整體、不能拆開。由此我們看到: 算式之大令人吃驚。假如是用籌

算，要占多大的面積。如果假定籌的長度為 4 寸，出土的遼代算籌實長為 12 厘米，有的還略長一點^[13]，這樣假定合理。上下分層擺出開方式，層與層之間還要有一定的距離，按 0.5 寸計算，一個 n 次開方式的層間距離和為 $0.5 \times (n - 1)$ 。例 1 為一個 10 次開方式，加上常數項和商共 12 層，上下長為 $12 \times 4 + 0.5(12 - 1) = 53.5$ 寸。例 5 的 14 次開方式，加上常數項和商共 16 層，上下層長度為 $16 \times 4 + 0.5(16 - 1) = 71.5$ 寸。前者 5 尺多長，後者則長達 7 尺多！擺籌的地方之大可以想見。

擺籌的地方不僅很長，而且還有橫寬的，如例 3，由右到左的 4 列並排，每列又上下 10 層橫排每層成直行，不能錯亂。在數碼的上下和左右還要加上一些必要的文字。所占的長方形地方約為上下 \times 左右 = $34 \times 81.5 = 2771$ (平方寸)。地方相當大。尤其是左右長達 8 尺多，更是驚人。

空位問題用籌只能處理位數較少的情況，古代已是通常之事，如上舉例 3、4、5 那樣，擺籌把畫“○”處空著就行，計算者容易記住。但遇到如例 2 那樣有連續的 12 個空位，計算者則無法解決。那是一個 3 次二項方程中間缺 2 層，特別是估商時必要考慮商的首位要對應“實”的那一位不能弄錯，隅也要準確定位。試商首位之後，用增乘開方法開方隨之要增補上 2 個缺項，補在何處？尤其是左右的位置絕對要準確，一旦擺錯，對以下各步跟著全錯，必須推倒重來。

實際上，事情並不是如上面所學的那樣簡單，往往是每算完一步前面的結果要保留，

便於檢查、核對計算是否無誤。這樣一來，佈籌所用的地方就不是上面說的那麼大（已經大得驚人），而是要大幾倍。

計算時所用籌的數量也相當可觀。如例 5，按羅士琳補草統計那個十三乘方開方式要用 155 根籌，可是它是由“內二行相乘”所得的結果和“外二行相乘”所得之結果又“內外相消”所得之結果“約”得的。前邊的這三個結果要用到求出約得之數才能全部撤去，它們用籌總數在 570 根以上，再加上十三乘方開方式的 155 根，則超過 720 根。在唐代文官佩帶“算袋”，宋代有“算子筒”，李儼認為算子筒可能是“留置算子之具”^[14]，“算子”即算籌。算袋和算子筒，充其量裝 100 根籌，而如上例宋元時代數學家的籌要用筐或篋裝才行。

古人不會在此種情況下，仍然固守傳統非要使用籌進行計算，而不想改變。最簡單的途徑是通過記錄籌算結果便可發現筆寫進行計算比籌算有更多的優越性，不僅大大縮小占用的面積，而且容易保留全部運算過程，用筆寫數碼比擺籌的速度也要快得多。數學家就會自覺地放棄籌算而改用筆算。像上舉的例 2 根本不能用籌算，非用筆算不可。這是客觀要求使人們不得不採用筆算。實際上「數書九章」是由筆算演算寫成的，但不能用現代形式看待。

從所舉的例子可以看出，那些算術本身都是筆算的形式。數學家已經有了各自創造的不太相同的形式，但本質上都是筆算。有完整的 10 進制數碼，有表示正負數的方法和小數記法。就早期筆算來說，其水平在西方之

上。歐洲的加減號出現於15世紀，乘除號係17世紀所創造，等號發明於1557年^[15]。正負號的使用也在17世紀，直到訥彼爾(Napier, 1550-1617)發明小數點時，歐洲的小數記法非常繁重^[16]。從17世紀，歐洲的筆算才由早期逐漸進入近代。

宋元以後的中國傳統筆算處於停頓狀態，但是在印度、阿拉伯、歐洲流行的筆算“格子算”在此時傳入中國。曾在明代數學著作中一再出現^[17]。當時珠算非常普及，而籌算已完全退出歷史舞台。明末在中國編譯、出版的「同文算指」是屬於歐洲早期的筆算，除了演算較詳外，整體上未達到中國宋元筆算的水平，它沒有負數符號，小數記法也不如秦九韶、李冶的先進。這部書原文用印度-阿拉伯數碼，譯成中文時改為漢文數字而不是數碼。

下面較詳細介紹一下明末清初時中國學者對筆算的研究著述。

在我國，第一部自著的筆算數學是明末孫元化(?-1632)寫的「太西算要」^[18]，是受西法影響的中國式筆算，以中國漢文數字代替西方的印度-阿拉伯數碼。他比較了中國的珠算與西方的筆算之便與不便，結果是“算愈難而西法愈顯”。接著孫元化寫道：

其用法，以所有之數從大至小，從左向右橫書，書猶珠也。其末位必為零數。如三千六百九十三，則橫書三六九三矣。若有空位，必作一0以補之，如三千六百九十，則零

位補一0矣。又或三千六百，則零位、十位皆補一0矣。又或三千零九十三，則百位補一0矣。是零、十、百、千以上者，實數也。數以位定者也，其加、減、乘、分⁽¹⁾之時，或兩數並得，或兩數乘得者，止於小數⁽²⁾，如二加三得五，二乘三得六，固即書於本位。若積有大數，如四加八得一十二，四乘八得三十二，則不問幾百幾、幾百萬幾、總呼為幾十幾，不問十、百、千、萬之位，總就本位進一位書。

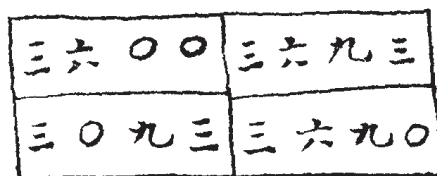


圖8. 孫元化的數字寫法

這就說明了數字寫法、空位處理、進位等問題，進位取十進制。以下分別講述了筆算加、減、乘、除的具體算法。數字都橫書，左大右小，個位對齊。加法和現行者完全一樣，但減、乘、分則差別甚大，現各舉原書之例予以說明。

減法： $27485731 - 394087 = 27091644$ 。孫元化給出一個算式(如圖9)，無任何說明，只能根據算式理解。被減數27485731寫在中間，減數394087寫在其下，個位對齊。經觀察發現：從個位開始減，1減7不夠減，

(1) “分”指除法

(2) “小數”指個位數，而不是奇零小數之數

借 1 位，變成 11，減 7 餘 4，寫在“1”之上。10 位上，3 減 8 不夠減，借 1 位，變成 13，減 8，餘 5，寫在“3”之上，但是“3”已被借走“1”，故只餘 4，寫在“5”之上。如此繼續下，到“7”無所減，27 不變，於是得到差 27091644。

$$\begin{array}{r}
 \text{四} \\
 \text{一} \text{九} \text{一} \text{六} \text{五} \text{四} \\
 \text{二} \text{七} \text{四} \text{八} \text{五} \text{七} \text{三} \text{二} \\
 \hline
 \text{三} \text{九} \text{四} \text{〇} \text{八} \text{七}
 \end{array}$$

圖9. 孫元化筆算減法算式

乘法：780346 × 49207 = 3⁽³⁾8398485622。書中說“二數相差為相乘，先以下數末位為主，與上數末位向前逐位相呼，即從本位下，逆書向前。如七呼六得四十二，則書二於本位，進四於前位。七呼四得二十八，則書八於次位，進二於又前位。若遇 0，則遞 0 一位。上數即完，則以下數二位又上數遞呼，遞積遞進，如前。俟下數各位呼乘既盡，則以所積細數，用計法，以後併之”，就得到了所求之積。(如圖 10) 相乘之程序與現行乘法無大差別，但每次呼得之積的記法有所不同。計算程序是從右端最小的數開始，每呼一次，把得數寫在該寫的位下，有時隨手把兩個較小的數相加。

$$\begin{array}{r}
 \text{七} \text{八} \text{〇} \text{三} \text{四} \text{六} \\
 \hline
 \text{二} \text{六} \text{一} \text{一} \text{四} \text{五} \text{六} \text{三} \text{二} \text{四} \text{二} \\
 \text{三} \text{七} \text{四} \text{六} \text{九} \text{六} \text{八} \text{三} \text{八} \\
 \text{八} \text{三} \text{二} \text{二} \text{三} \text{六} \text{四} \\
 \text{二} \text{一} \text{一} \text{七} \text{六} \\
 \text{二} \text{二} \text{四} \\
 \hline
 \text{二} \text{八} \text{三} \text{九} \text{八} \text{四} \text{八} \text{五} \text{六} \text{二} \text{二}
 \end{array}$$

圖10. 孫元化筆算乘法算式

分法：383981 ÷ 78034 = 4.9207。分子為實，分母為法，畫一橫線，實上法下，個位上下對齊。“實首三，法首七”，是為法大於實，不足除，故退一位書，即將法向右移一位，這時能足除。除訖，法再向右移一位，再除。依次下去，到除盡或不想除為止，算式如圖 11 所示。

$$\begin{array}{r}
 \text{五} \\
 \text{五} \text{四} \\
 \text{一} \text{二} \text{一} \text{五} \text{六} \\
 \text{八} \text{六} \text{四} \text{八} \text{七} \\
 \text{一} \text{七} \text{一} \text{八} \text{六} \text{五} \text{三} \text{二} \text{二} \\
 \hline
 \text{實} \text{三} \text{八} \text{三} \text{九} \text{八} \text{一} \text{九} \text{〇} \text{三} \text{八} \\
 \text{法} \text{七} \text{八} \text{〇} \text{三} \text{四} \\
 \text{七} \text{八} \text{〇} \text{三} \text{四} \\
 \text{七} \text{八} \text{〇} \text{三} \text{四} \\
 \text{〇} \text{〇} \text{〇} \text{〇} \text{〇} \\
 \text{七} \text{八} \text{〇} \text{三} \text{四} \\
 \hline
 \text{商} \text{四} \text{九} \text{二} \text{〇} \text{七}
 \end{array}$$

圖11. 孫元化筆算除法算式

本質上看，孫元化的筆算是西方式的，與前所談的傳統筆算完全不同。由於孫元化的

(3). 原書“3”誤為“2”

書沒有出版，所以幾乎未產生影響。但是他的工作在中國筆算史上，應占有一定地位。

孫元化之後，過了半個多世紀，梅文鼎(1633-1721)又完成「筆算」5卷一書，流傳甚廣。

梅文鼎的筆算與孫元化筆算不同，一改前人之橫書為豎書，他因“吾之文字既直，故筆算宜直，亦取其便於用耳。”不論是加減，還是乘除，甚至開方，都是豎書，如除法，畫一豎線(圖12)。272.049 ÷ 905 = 0.300580，實為被除數，在實的左邊“九 0 五法”，即是除數。與現行除法差別甚大，因其過於繁瑣，故不細講。

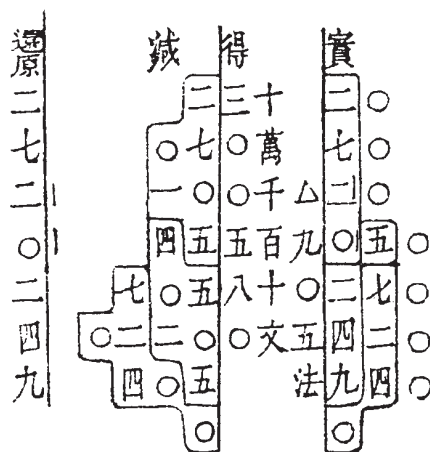


圖12. 梅文鼎筆算除法算式

孫元化和梅文鼎的筆算，都是受「同文算指」影響的產物，但都不是原樣照搬，而是有所發展。毫無疑問，他們的筆算全是舊式的。大約就在梅文鼎完成筆算著作時，西方較新式的筆算，再次傳入我國，這在「數理精蘊」有明確反應。

從「數理精蘊」問世(1723)以來，歐洲近代筆算開始在中國傳播。書中採用了“+”、

“-”和“=”三種符號，還用到了小數點。但是把 x 改為“根”，印度-阿拉伯數碼改為漢字。後來羅士琳(1789-1853)把“+”改為“⊥”，“-”號未改。幾十年後李善蘭採用“⊥”號，又把“-”改為“⊥”。這是一個筆算系統。在清代，中國已根本不知傳統籌算為何物，連國家欽天監的天算家都不知道。例如康熙五十二年(1713)，何國柱和阿齊圖去朝鮮測量經緯度時在朝鮮見到算籌感到很驚奇，回國時還帶回40根^[19]。清代中國人一般日常計算，大都使用珠算，而數學家則用筆算。

如上所述，清代中國有兩個筆算系統，一個是明末以來受西方筆算影響的筆算系統；一個是傳統的筆算系統，就是採用宋元的籌算和負數記法。一段時間中國傳統筆算很盛行，只要看一下宋景昌的著作就夠了^[20]。不過傳統的筆算系統到清末時逐漸被前一種所代替，到1900年前後開始使用印度-阿拉伯數碼，已完全與世界接軌。

通過上述事實來看，中國傳統數學已形成了自己的筆算，而且早期的水平並不低。但是沒有得到進一步發展和完善，後來便接受了歐洲近代筆算。

了解中國歷史上有沒有筆算，什麼時候開始有筆算，不是一個一般的問題，而是關係到如何理解和認識中國傳統數學的大事。例如說，如果仍然用籌算法看待宋元數學，用珠算法看待清代或清代仍用中國籌算的話，那就會在許多問題上得不到圓滿的解釋。

參考文獻

1. 李迪，宋元時期數學形式的轉變，「中國科學技術史論文集」(一)，呼和浩特：內蒙古教育出版社，1991，219-233。

2. 李迪、馮立升, 清代數學家使用筆算略論, 「西北大學學報」(自然科學版), 28(6), 1998, 461-466。
3. Lam Lay Yong and Ang Tian Se., *Ficet-ing Footsteps*, World Scientific, 1992, 133-148.
4. 杜石然等, 「中國科學技術史稿」上册, 北京: 科學出版社, 1982, 131。
5. 李迪, 「中國數學通史」(上古到五代卷), 南京: 江蘇教育出版社, 1997, 391-405。
6. 嚴敦杰, 宋元算學叢考, 「科學」, 29(4), 1947, 109-114。
7. 例如元代「授時歷」, 見「元史」卷54、55 “歷志三”、“歷志四”。
8. 李迪, 李冶的小數記法, 「數學史研究文集」第五輯, 1993, 173-176。
9. 李迪, 「中國數學通史」(宋元卷), 南京: 江蘇教育出版社, 1999, 64。
10. 同上, 278-278。
11. [宋]沈括, 「夢溪筆談」卷18。
12. 同 [10], 67-74。
13. 同 [10], 68。
14. 李儼, 籌算制度考, 「中算史論叢」第四集, 北京: 科學出版社, 1955, 1-8。
15. 巴什馬科娃等著、趙孟養譯, 數學符號發展簡史, 「數學教學」(上海), 1975年5月號, 1-7。
16. 李迪, 十進小數發展簡史, 「數學通報」1964年10月號, 47-49, 16。
17. 吳文俊 (主編), 「中國數學史大系」第六卷 “西夏金元明” (本卷分主編李迪), 北京: 北京師範大學出版社, 1999, 513-517。
18. 此書只有寫本, 影印入「徐光啓著譯集」, 上海: 上海古籍出版社, 1983, 第10冊。
19. [朝鮮]洪正夏, 「九一集」卷9。
20. [清]宋景昌, 「數書九章札禮」。

—本文作者任教於內蒙古師範大學科學史研究所—