一次因式檢驗法之簡化

蔡爵農 · 黃榮威

摘要: 在高中數學課本當中, 爲了尋找高次方之整係數多項式的一次有理因式, 提出了一次有理因式檢驗法。此法在尋找一次有理因式之過程中, 乃採用逐一測試之步驟, 並無一有效率之規則可遵循。若須檢驗之因數有很多, 或多項式本身係數 (次方) 過大。其檢驗之過程將流於繁瑣。本文將提出一方法, 除考慮首項係數及常數項外, 再利用第二高次項及一次項係數之輔助, 以簡化一次因式檢驗法, 進而達到有效率之檢驗。

一、前言

在尋找高次整係數多項式之一次有理因式時, 高中課本提出了一次因式檢驗法, 其敍述如下:

"整係數多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 若具一次有理因式 $px+q$, 其中 p 和 q 互質, 則 $p|a_n$ 且 $q|a_0$"。

由上述敍述得知: 符合條件之 p, q, 只是"有可能"爲其因式, 而非一定是因式。故當最高次項係數 a_n 及常數項 a_0 之因數有很多個, 其"可能之因式"的個數將非常龐大, 進而增加了檢驗過程之繁瑣。於下文中, 將利用負面表列之方式, 將"可能"的一次因式中之不可能因式, 應用簡易之計算 (甚至目測) 一一排除, 以簡化一次因式檢驗法。

二、 一次因式檢驗法的簡化方法

2.1. 簡化方法

於一次因式檢驗法當中, 只考慮首項係數及常數項, 但當吾人利用第二高次項及一次項之係數輔助時, 便可事先判斷得知: 在所有"可能之因式"中有部分是絕不可能成立的, 於是在未檢驗之前即予以刪除, 以減少計算工作量。

整係數多項式如下:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

令 $a_n = ph$, $a_0 = qk$, 其中 p, q, h, k 皆爲整數。吾人可遵循下列步驟, 取代一次因式檢驗法的逐一測試:

Step 1. 將 $x=1$ 代入多項式中, 若 $f(1)=0$, 則具一次因式 $(x-1)$, 若 $f(1)\neq 0$, 則不具一次因式 $(x-1)$。

將 $x=-1$ 代入多項式中, 若 $f(-1)=0$, 則具一次因式 $(x+1)$, 若 $f(-1)\neq 0$, 則不具一次因式 $(x+1)$。

Step 2. 若 $q\neq\pm 1$ 且 q 不能整除 a_1+k, 則必不具一次因式 $(x-q)$。

Step 3. 若 $p\neq\pm 1$ 且 p 不能整除 $a_{n-1}+hq$, 則必不具一次因式 $(px-q)$。

Step 4. 將其餘可能之因式逐一測試即可。

2.2. 證明

本文將以詳細的證明過程, 說明本法為何可以有效率的簡化一次因式檢驗法。由方程式1中, 本文將其可能之一次因式區分為三大類: (A) $x\pm 1$, (B) $x-q$ $(q\neq\pm 1)$, (C) $px-q$ $(p\neq\pm 1$, 且 p, q 互質), 今論述如下:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad (2)$$

為一整係數多項式, 且 $a_0\neq 0$。

Case 1: 若 $f(\pm 1)=0$, 則具 $x\mp 1$ 之因式, 反之則否。

Case 2: 若 $(x-q)$ 為多項式 $f(x)$ 之一次因式, 則 $f(q)=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_2q^2+a_1q+a_0=0$, 左右分別除以 q^2, 得

$$a_nq^{n-2}+a_{n-1}q^{n-3}+\cdots+a_3q+a_2+\frac{a_1q+a_0}{q^2}=0$$

因為 $a_0=qk$, 故

$$a_nq^{n-2}+a_{n-1}q^{n-3}+\cdots+a_3q+a_2+\frac{a_1+k}{q}=0$$

又因為 a_n, a_{n-1}, …, a_1, q, k 皆為整數, 故 q 必整除 a_1+k。因此, 若 q 不能整除 a_1+k, 則 $f(q)\neq 0$, 即不具一次因式 $x-q$。

Case 3: 若 $(px-q)$ 為多項式 $f(x)$ 之一次因式, 且 p,q 互質, $p\neq\pm 1$, 則

$$f(\frac{q}{p})=a_n\cdot\frac{q^n}{p^n}+a_{n-1}\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}+a_{n-2}\cdot\frac{q^{n-2}}{p^{n-2}}+a_{n-3}\cdot\frac{q^{n-3}}{p^{n-3}}+\cdots+a_2\cdot\frac{q^2}{p^2}+a_1\cdot\frac{q}{p}+a_0=0$$

將前兩項保留, 其餘移至等號另一邊, 兩邊再同乘以 $\frac{p^{n-2}}{q^{n-1}}$, 得

$$a_n\cdot\frac{q}{p^2}+a_{n-1}\cdot\frac{1}{p}=-a_{n-2}\cdot\frac{1}{q}-a_{n-3}\cdot\frac{p}{q^2}-\cdots-a_2\cdot\frac{p^{n-4}}{q^{n-3}}-a_1\cdot\frac{p^{n-3}}{q^{n-2}}-a_0\cdot\frac{p^{n-2}}{q^{n-1}}$$

因為 $a_n=ph$, 代入整理後得 $\frac{qh+a_{n-1}}{p}=-(a_{n-2}\times q^{n-2}+a_{n-3}\times p\times q^{n-3}+\cdots a_2\times p^{n-4}\times q^2+a_1\times p^{n-3}\times q+a_0p^{n-2})/q^{n-1}$。

又因為 $(p,q)=1$, 所以若等號成立, 必有 $p|qh+a_{n-1}$ 且 $q^{n-1}|(a_{n-2}\cdot q^{n-2}+a_{n-3}\cdot$

$p \cdot q^{n-3} + \cdots + a_1 \cdot p^{n-3} \cdot q + a_0 p^{n-2}$)。因此, 若 p 不能整除 $qh + a_{n-1}$ 則 $f(\frac{q}{p}) \neq 0$, 即不具一次因式 $px - q$。

2.3. 範例

以下以一個一元四次整係數多項式爲例, 使用一次因式檢驗法及本文所提出之簡化法, 分別求出多項式之一次因式。

2.3.1. 因式分解 $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ (利用一次因式檢驗法解之)

可能之因式有: $x + 1$, $x - 1$, $x + 2$, $x - 2$, $x + 4$, $x - 4$, $2x + 1$, $2x - 1$ 共8個。令

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 \\
f(-1) &= 2(-1)^4 + 5(-1)^3 + 5(-1)^2 \\
&\quad +4(-1) - 4 \neq 0 \\
f(1) &= 2 + 5 + 5 + 4 - 4 \neq 0 \\
f(-2) &= 2(-2)^4 + 5(-2)^3 + 5(-2)^2 \\
&\quad +4(-2) - 4 = 0 \\
f(2) &= 2(2)^4 + 5(2)^3 + 5(2)^2 + 4(2) \\
&\quad -4 \neq 0 \\
f(-4) &= 2(-4)^4 + 5(-4)^3 + 5(-4)^2 \\
&\quad +4(-4) - 4 \neq 0 \\
f(4) &= 2(4)^4 + 5(4)^3 + 5(4)^2 + 4(4) \\
&\quad -4 \neq 0 \\
f(-\frac{1}{2}) &= 2(-\frac{1}{2})^4 + 5(-\frac{1}{2})^3 + 5(-\frac{1}{2})^2 \\
&\quad +4(-\frac{1}{2}) - 4 \neq 0 \\
f(\frac{1}{2}) &= 2(\frac{1}{2})^4 + 5(\frac{1}{2})^3 + 5(\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}) \\
&\quad -4 = 0
\end{aligned}$$

由以上8次檢驗, 可知 $f(x)$ 具 $x + 2$ 及 $2x - 1$ 之因式再利用多項式除法, 即可得另一因式爲 $x^2 + x + 2$, 最後吾人可知:

$$\begin{aligned}
&2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 \\
&= (x + 2)(2x - 1)(x^2 + x + 2)
\end{aligned}$$

2.3.2. 因式分解 $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4$ (利用本文所提之簡化法解之)

Step 1. $f(1) = 2 + 5 + 5 + 4 - 4 \neq 0$
$f(1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^3 + 5(-1)^2 + 4(-1) - 4 \neq 0$, 故不具 $x + 1$, $x - 1$ 之因式。

Step 2. 繼續排除不可能之因式。觀察本題知: $a_1 = 4$, $q = 2, -2, 4, -4$, 利用 q 無法整除 $a_1 + k$, 即可排除不可能之因式。由觀察得知: 當 $q = 4$ (即 $k = -1$), 則 q 無法整除 $a_1 + k$。當 $q = -4$ (即 $k = 1$), 則 q 無法整除 $a_1 + k$。所以 $x - 4$, $x + 4$ 兩因式排除, 只須檢驗 $x - 2$, $x + 2$。

Step 3. 再繼續排除不可能之因式。觀察本題知: $a_{n-1} = 5$, $p = 2, -2$, $q = 1, -1, 2, -2, 4, -4$。但因爲 p, q 互質, 所以 $q = 2, -2, 4, -4$ 不須計算, 即可立即排除, 只須檢驗剩餘的可能因式: $2x + 1$, $2x - 1$。

Step 4. 由上述排除結果, 吾人只剩下 $x+2$, $x - 2$, $2x + 1$, $2x - 1$, 4個可能因式須要檢驗, 經檢驗後, 唯有 $x+2$, $2x - 1$ 爲其眞正因式, 最後經由多

項式之除法得知:

$$2x^4+5x^3+5x^2+4x-4$$
$$=(x+2)(2x-1)(x^2+x+2)$$

三、結論

1.　由此例可發現, 一次因式檢驗法共須檢驗8個可能因式, 而本文所提出之簡化法只須檢驗4個可能因式。肇因於本法在檢驗之前, 先經過篩選、排除, 以達有效率之檢驗。

2. 由此例可知, 本法在排除不可能因式之過程中, 所使用的是非常簡易之計算 (甚至目測即可) 從另一個角度來看, 雖然本法有4個步驟, 但實際上只有第4個步驟須花時間計算, 其餘3個步驟所花的計算工作量非常少。

3. 試想: 即使是最簡單的一元二次多項式之因式分解, 其所使用的十字交乘法本身即是一連串的逐一檢驗過程。所以本文所提出之簡化法, 雖無法立即且唯一地找出因式, 實屬可理解之必然。

—本文作者蔡爵農爲自由業工作者, 黃榮威就讀於中壢高中—