# 劉太平院士演講——什麼是好數學

演講：劉太平
整理：黃暉娟
時間：民國九十年三月二十六日
地點：台大數學系

今天大家來到這裡, 也許心中會想: 到底是什麼樣的人要來說這個題目? 爲了安頓大家這樣的心情, 我先舉兩個例子來說明: 就算是很偉大的數學家也不夠資格來講這個題目。

第一個例子是關於最近十幾年來數學界的大事: Fermat 最後定理的解決。我們知道這個問題是由 Andrew Wiles 所解決的; 但是有人卻說 Taniyama 及 Shimura 他們兩位所做的工作相對之下更爲根本、貢獻更大。關於這個問題, 如果我們再稍微想一想便會覺得, 對 Fermat Last Theorem 貢獻最大的應該是 Fermat 本人, 因爲是他提出了這個問題。

Fermat 是我們數學史上的一尊菩薩, 所以他的話我們理當相信, 可是也不可盡信, Fermat Last Theorem 是說: 方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

對任一大於 3 的整數 $n$, 沒有正整數解。Fermat 還提出其它的猜測, 比如說, 他曾猜測: 對於所有的正整數 $n$

$$2^{2^n} + 1$$

是質數, 結果這個猜測很快的就被證明是錯誤的 (對於 $n = 1, 2, 3, 4$ 猜測爲眞, 但 $n = 5$ 時則不爲眞)。當時因爲沒有計算機, 所以爲了這個問題還驚動了數學史上的一尊佛 Euler 來證明這項猜測是錯的; 不過, 人孰無過, 猜測本身的對錯, 對於一個問題是否成爲好數學並不是必要的。(就連 Fermat 本身也做過一些不是猜測上對或錯, 而是猜測本身沒有意思的問題, 不過, 現在沒有人再提這些問題就是了。) 爲什麼 Fermat Last Theorem 會這麼重要呢? 如今大家已經公認, Fermat 在一本書的眉批之上寫下這個問題之後, 又附加一句話:「因爲空格不夠大, 如果紙再多一點的話, 我就把定理的證明寫給你看」, 不可能對的。其實當初也沒有人特別注意 Fermat Last Theorem, 可是大家不時就會想到它, 越想就越發現到這個問題的內涵事實上非常廣闊, 經過了很長一段時期的研究之後, Fermat Last Theorem 變的越來越重要; 所以嚴格

來說, 雖然 Fermat 是一個很偉大的數學家, 但並不是 Fermat 本人才對這個問題有所貢獻, 我們甚至可以說主要不是他的貢獻, Fermat Last Theorem 是經過歷史上很多人經過一段很長時期的思考, 才成爲一個重要的問題。這是我的第一個例子。

第二個例子, 我要說明的是: 就算是偉大的數學家所說的話也可能大錯特錯的。Fermat Last Theorem 得到了解決之後, 現在大家認爲最大的問題就是黎曼猜測。黎曼猜測說: Zeta 方程在斜線範圍內, 零根都會出現在中央的虛線上 (如圖1)。

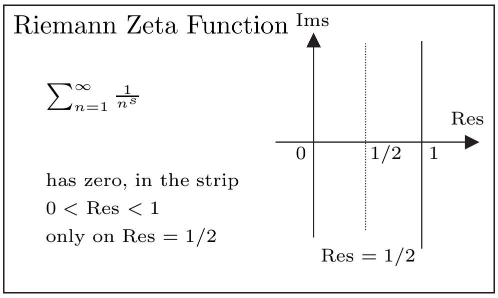



圖1

這是在 Riemann 的論文上曾說過的一句話。如果我們有辦法證明這個猜想, 我們就可以證得一種新版本的質數猜想, 而且這個質數猜想的結果比現在已得證的結果還要更好; 因此當時大家對此猜測就覺得很有意思, Hilbert 把這個問題併入他的 Open Problems 之內, 同時表示這不應該是困難的問題, 短期之內就可得到解答。然而, 經過了漫長的一世紀, 卻尚未得到解決。Hilbert 這樣說也並不是很意外, 因爲 Hilbert 本身並不是做這個問題的。如果他也像 Selberg 這些人一直朝著這方面去做研究的話, 恐怕想法就會大大不同。之後, Andre Weil 這位二十世紀極偉大的數學家也說黎曼猜測短期之內就可得到解答; 和 Hilbert 不同的是, Andre Weil 之後察覺自己錯了, 而想這個問題想了一輩子, 他主要的工作就是朝著解決這個問題前進。總而言之, 黎曼猜測的深度是慢慢才被理解, 因之黎曼猜測現在成爲一個這樣重要的問題, 也不是完全黎曼一個人的貢獻; 再偉大的數學家的話也不能盡信。由此我們可以得到如下的結論: 任何人都可以談論「什麼是好數學」這個題目。

什麼是好的數學? 我下面要舉幾個例子, 我認爲這些是很容易就可以感覺到是好的數學。

第一個例子是 Gödel 的 Incompleteness Theorem。Gödel 就 Peano 的整數公設, 構造了一個很特殊的句子, 這個句子我們叫它 Gödel Statement; 這個句子有一個很怪的特性: 如果你說由公設本身可以推論這個句子的對錯的話, 那麼我們就可以推論出來說「算術系統是不互容的」; 換句話說, 有些句子我們無法決定它的對錯, 由此我們推論算術系統本身是不完整的, 同時由於數學系統是根據算術系統所建立的, 所以數學系統也是不完整的。這個問題的解決本來是爲了要看算術系統的完整性, 但是因爲它的問題點到了最根本的地方, 所以大家就做出種種的想像, 在 Computer's Limitation、Language's Possibilities 和 Effectiveness of Education 等領域中, 我們都可以感到這裡面的不完整性。總之最主要的就是說: 你能夠證明的和事實上的眞理是兩回事, 前一者是比較弱的; 老子在道德經上有一句名言:「道可道, 非常道」, 差不多可以表達這種意境。

Gödel 對這個問題的貢獻已經被公認爲二十世紀數學上少數最偉大的貢獻之一。有一個故事說到, 愛因斯坦當初不想做數學, 而去學物理的原因是: 他覺得在物理裡, 哪一個問題是重要的問題, 是非常明顯, 可是在數學裡哪一個問題是重要的, 卻不明顯, 在他與 Gödel 交談過後, 他才發現數學也是有明顯的重要問題。顯然, Gödel 的問題是一個純數學的問題, 我想也沒有一個問題能比它更純的數學了, 不過當我們在討論數學時, 我們還有代數、幾何等經典的科目; 有一點我要說明的是, 數學變成有這幾門標準的學科還是很近代的事情。我想要對學生說, 數學應該是整體的, 幾何、代數這些根本的學科, 應該是一個基礎的教育, 不應該是只針對 "近代的" 傳統的學科去研究。

下面的第二個例子是有關孤立子* 的發現, 孤粒子的發現也是二十世紀少數革命性的發現之一, 目前它的理論已經發展的很豐富, 但是它的開端事實上是一個很簡單的公式 Miura transformation, 我們首先看如下的兩個偏微分方程式:

$$
\begin{aligned}
v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} &= 0 \qquad mKdV \\
u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0 \qquad KdV
\end{aligned}
$$

第二個方程我們一般又叫做 Korteweg-de Vries equation, 是用來描述水波的一個方程, 而第一個方程則是 Modified KdV equation。Miura transformation 是

$$u = v^2 + v_x,$$

在此變換之下, 第一個方程會變成第二個方程。證明的方法很簡單, 只要你知道什麼叫偏微分你就會證, 不過對這個問題而言, 證明顯然並不重要, 比較重要的是如何導出這個變換; 不過終究這也不是那麼的重要, 最重要的應該是 Miura 爲什麼要做這個問題, 做出來了又有什麼新鮮的意思。

關於如何導出這個變換的問題, 我們注意到在變換中有一項 $v^2$, Miura 爲何可以猜出變換中需要這一項呢? 他是這麼想的: 我們知道有所謂的 Conservation Laws, 這個規則是說如果由原來的兩個方程 $KdV$ 和 $mKdV$ 中, 我們可以導出像

$$U_t+F_x=0,\ \left(\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} U dx=0\right)$$

的 Conservation Laws, 那麼這個量

$$\int_{-\infty}^{\infty} U dx$$

* 參見本刊第二十五卷第四期 (90年 12 月)「有朋自遠方來—專訪 Robert Miura 教授」一文 p.42「補充說明」。

不隨時間改變, 我們只要知道該量現在的值, 就等於知道未來所有時間該量的值; 這顯然是會對方程式解的結構有所規範。對 $KdV$ 方程我們可以算出 $u$ 是個一次方的 $U$, 因爲我們有

$$u_t+(-3u^2+u_{xx})_x=0$$

接下來就有人算出 $u^2$, $u^3+u_x^2$ 也是, 甚至到五次方的都已經由一些很好的數學家算出來。而在 $mKdV$ 方面, 也已經找出 $v$, $v^2$, $v^4+v_x^2, \ldots$ 這些項。Miura 注意到 $mKdV$ 的這些項都有一個平方, 所以他就相信一旦這兩個方程有變換關係的話, 變換中必定要有一個平方項 $v^2$ 在內。至於變換中 $v_x$ 這一項則是使用嘗試錯誤法找出的。接下來就有很聰明的人開始作一些計算, 這些計算包括一些非線性的變換, 例如: 對於方程

$$\psi_{xx}-u\psi=0$$

我們有一個典型的變換

$$v=\psi_x/\psi$$

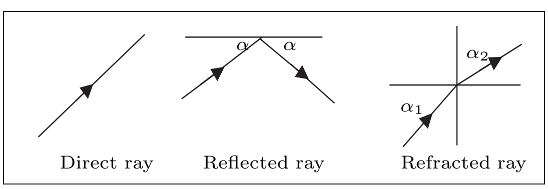
然後做 Galilean invariant:

$$u(x,t) \ \rightarrow \ \lambda+u(x+6\lambda t,t)$$

最後得到一個線性的方程

$$\psi_{xx}+(x-u)\psi=0$$

由此方程導出 Inverse scattering 來解 $KdV$, 最終得到 soliton theory, 這中間也花了一群傑出數學家一段不短的功夫。但是最主要的工作應該是這個最初的變換。現在我們該問的問題是: 爲什麼 Miura 要做這件事情呢? 當 Miura 在中研院訪問時 (參見數學傳播, 第二十五卷四期「有朋自遠方來— 專訪 Robert Miura 教授」一文), 我曾問他, 他說他只是覺得這兩個方程很有關係所以他就去找它, 結果就發現一個非線性的變換。$KdV$ 和 $mKdV$ 有根本的差異, 譬如 $KdV$ 有 Galilean invariant 性質, 而 $mKdV$ 則無。當 Miura 做這個問題時, 大家都不知道 $KdV$ 和 $mKdV$ 這兩個方程要如何來解, 可是 Miura 卻找出了兩個非線性的方程之間一個非線性的關係, 他覺得這必定隱藏一個大的學問。我只能說這是一種極高的品味, 有一種莫名的美。Soliton theory 在代數幾何及數學物理這些學科也變的極爲重要, 但是這一切的開端還是比較重要的。




方才的例子是有關非線性波的, 我現在舉一個有關線性波的例子。線性波的一個很重要的例子就是幾何光學, 這門學問可以應用在製作眼鏡鏡片、顯微鏡、望遠鏡等等。簡單的說, 它所用的主要原理有下列三項:

首先, 光如果沒有碰到阻礙物 (如牆壁等) 並且在均勻的介質中前進的話, 則保持方向不變。其二, 如果碰到牆壁這樣不可穿透的面時則會反射, 並且遵循入射角 $\alpha$ 等於反射角的性質。(這項性質我們現在覺得是理所當然的事情, 可是這項規則卻經過了一千多年才由阿拉伯人定案。) 其三, 如果光通過的介質不同, 在折射面入射角 $\alpha_1$ 和折射角 $\alpha_2$ 遵守 Snell's law:

$$\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = n_1/n_2$$

其中 $n_1 \sim 1/$(speed of light): index of refraction

由這三個規則我們構造了很多光學儀器。但經過種種更精密的實驗, 科學家發現: 單由這三個規則並不足以描述許多光線行進的現象, 這是因爲光在經過折角時所表現出的行爲並不是由前三項原則就可以解釋的。爲此, Joseph Keller 引進了另外幾項準則, 叫做 diffracted ray, (如圖2) 比如我們在空中有一張紙, 當光線照到紙的中央, 則會因爲無法通過而產生反射現象; 可是當光線通過紙的邊緣時, 卻會沿著邊緣產生如上圖一般像一個圓圈這樣的光線圈, 我們稱之爲 Edge diffracted ray。但是如果邊緣是一個平滑的曲面, 光線沿著切線碰到邊緣時則會繞著邊緣前進, 我們稱之爲 Surface diffracted ray。所以, 到達空中某一固定點的光線, 不單單是由光源經由直射、反射、折射這三種路徑而來, 也有可能是透過我們方才所描述的兩種狀況綜合所得的。體認到這種事情之後, 本來大家計算時只討論光經由前三種規則作用之後的變化, 現在他們知道還必需要計算繞射之後的狀況。科學家在做這種計算的時候, 並不是依各種狀況分別去做; 他們只做球等特殊的狀況, 爾後如果需要計算的狀況是由三道手續所完成, 就只需把這三道手續的狀況組合起來就可以得到結果。Keller 的工作非常的重要, 比如說現代的通訊科技中大量使用到電磁波; 電磁波送到空氣中時, 如何傳送是一個很重要的問題。之後數學上發展出 Microlocal Analysis 及 Singularity Theory 這些理論, 就是要針對這方面來嚴格證明。這個例子就如同方才 Soliton Theory 的例子一樣, 後來繁複的發展都是後話, 最初看到根本所在, 才是最重要的。

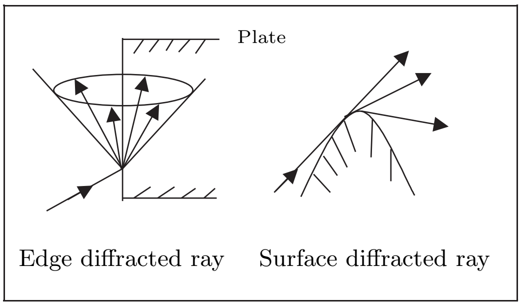



圖2

接下來的這個例子是所謂的 Ito Calculus, 在這種微積分中, $x^2$ 的微分不是 $2x$。我記得在我考大學考上數學系時, 有一個親戚對我父親說:「數學系所讀的東西並不是像我們一般的加加減減, 它是講哲學的。」好在我父親很開明, 贊成我讀數學, 他只說:「如果你能花百分之八十的精神就能理解, 那就行了。」我進了大學之後, 對嚴格的數學推理果然不能適應。在微積分的課上學到 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 時, 我對此感到很不自在。因爲我們明明知道什麼是連續, 爲什麼非要用 $\varepsilon$ 和 $\delta$

呢? 問了許多人連老師也回答不出來這個問題。後來我就想到這就如同我們鄉下人在鄉下做個什麼生意時, 本來你要一個青菜兩個蘿蔔, 大家就是說兩句話、拍個肩膀, 或是像現代人握個手, 就可以做生意, 並不需要找代書、律師來寫一個很嚴謹的契約, 鄉下人的契約就是我們看看這個人很可靠的樣子就好了; 這就如同我們看一般的函數只要用目視便可以判斷出該函數是否爲連續一般。可是, 生意做久了你就會發現, 雖然一個人看起來很可靠 (也許他確實也是很可靠), 可是由於當初做生意時對一句話有不同的理解, 最後反而糾纏不淸。你必須先有這種糾纏不淸的事情發生了, 你才理解到會有發生誤解的可能性, 也才會去注意到法律的重要性。這就如同我們這個例子,「$x^2$ 的微分不是 $2x$」其實便是一種糾纏不淸, 有了這個例子我們就可以很明顯的發覺到 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 這種分析步驟的必要性。現在我們有

$$\int x dx$$

並不一定是 $x^2/2$, 當然這個的緣故是 $x = x(t)$ 對 $t$ 的變化並不是那麼 smooth。這種 $x$ 有一個很出名的例子: 十九世紀生物學家 Brown 在觀察顯微鏡下花粉和水分子碰撞所產生的運動軌跡, 發現這個軌跡是非常的不規則, 並且提出 Brownian motion 這個模型。Brownian motion 這個模型是說, 如果在時刻 $t = 0$ 時, 某花粉所在位置爲零點的話, 下一刻該花粉的所在位置是充滿了各式各樣的可能性。雖然我們不可預知, 但是我們可以計算出下一刻該花粉的所在位置在某點的機率大小。

Brownian motion: $B_t$
At $t = 0$, location: $x$
Probability of being at $y$ at time $t$ is $(2\pi t)^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{2t}}$

知道了下一刻的位置之後, 再下一刻你又必須重新決定花粉會往哪一個方向走, 同樣的又是充滿了各式各樣的可能性。我們把時間距離越縮越小, 就得到多半極不規則的路徑。爲了讓大家更理解這種不規則的狀況, 我們來計算平均上由時間 $t$ 到 $s$ 位置的變化有多大:

$$\text{Expectation } E(|B_t - B_s|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|(2\pi(t-s))^{-1/2} e^{\frac{-|e-y|^2}{2(t-s)}} dy$$
$$\approx \sqrt{t-s}$$

我們看到這個值大約是和 $(t-s)^{\frac{1}{2}}$, 而不是 $(t-s)$, 成正比, 這和我們的直覺有很大的差異, 所以我們有如下的定理

*Almost all paths have unbounded total variation T. V.*

簡單描述一下理解的方法 (不是證明)

$$\begin{aligned} T.V_{(0,t)} \text{“}\sim\text{”} & \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n} E(|B_{(i+1)\Delta t}-B_{i\Delta t}|) \\ \sim & \lim_{\Delta t\to 0} n\sqrt{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t}{\sqrt{\Delta t}} \\ = & \infty \\ t = & n\Delta t \end{aligned}$$

如果我們仔細算一下, 我們也可以發現有如下的性質:

$$E\Big(\Big|B_t-B_s\Big|\Big)\sim\sqrt{t-s}$$
$$E\Big(\Big|B_t-B_s\Big|^2\Big)=t-s$$
$$E\Big(\Big|B_t-B_s\Big|^4\Big)=3(t-s)^2$$

$$\Delta B_k\equiv B_{(k+1)}-B_k\equiv B_{(k+1)\Delta t}-B_{k\Delta t}$$
$$E\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(\Delta B_i)^2-t\right|^2\right)=E\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\Big((\Delta B_i)^2-\Delta t\Big)\right|^2\right)=2\sum_{i=1}^{n}(\Delta t)^2$$
$$=2t\Delta t\ \to\ 0 \text{ as } \Delta t\to\ 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta B_i)^2\ \to\ t \text{ as } \Delta t\ \to\ \infty$$

現在我就來說明一下 $\int xdx$ 並不一定是 $x^2/2$ 的緣故, 證明如下:

定理: $\int_{s=0}^{t} B_s dB_s=\frac{1}{2}(B_t^2-B_0^2)-\frac{1}{2}t.$

證明:

$$\begin{aligned} \Delta(B_j^2) &\equiv B_{j+1}^2-B_j^2=(\Delta B_j)^2+2B_j\Delta B_j \int B_j dB_j\equiv\lim_{\Delta t_j\to 0}\sum_j B_j\Delta B_j \\ &\underset{\text{Ito}}{\equiv}\lim\sum_j B_j(B_{j+1}-B_j) \\ &=\frac{1}{2}\lim\sum_j\Delta(B_j^2)-\frac{1}{2}\lim\sum_j(\Delta B_j) \\ &=\frac{1}{2}(B_t^2-B_0^2)-\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

這裡要特別說明的是: 這個積分是 Ito 所定義出來的。這個積分中被積分的函數變化非常不規則, 所以積分是如何定義就非常重要。Ito Calculus 會導出 $-t/2$ 這一項是因爲 Ito 有這樣的定義。

$$B_j\Delta B_j=B_j(B_{j+1}-B_j).$$

注意到 $(B_{j+1}-B_j)$ 代表的是未來的變化; 如果改成過去的變化 $(B_j-B_{j-1})$, 所得的結果就會大大不同。Ito 後來推廣這個方法, 且成爲很重要的工具; 比如說最近金融數學的研究就大量使用這種方法。這個例子對我們的教育是, 我們平時學了許多嚴格的數學, 但要了解其必要性, 必須要由了解反例開始, 反例裡常隱含重要的想法, 沒有反例的話, 許多嚴格的數學看起來就像是數學家造出來的一些無味語言而已。

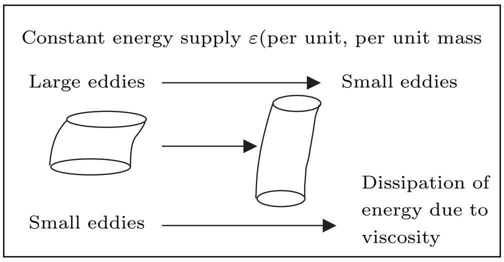



圖3

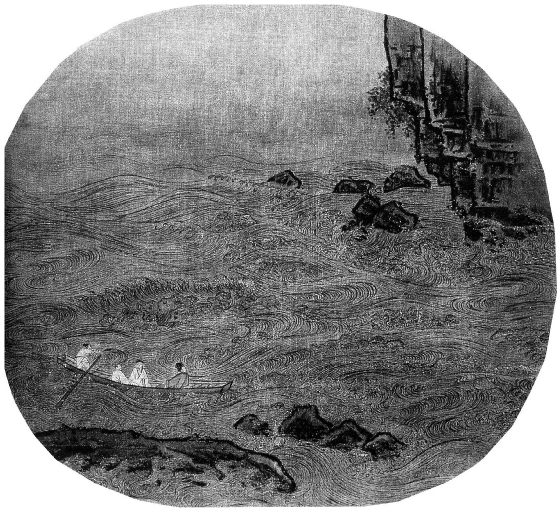


圖4. 李嵩赤壁湍流

接下來要講的這個例子是有關 Kolmogorov universal equilibrium theory。我們看圖3 中的兩個圖: 這兩個圖是漩渦。十九世紀英國應用數學家 Kelvin 推知, 漩渦可以變大變小, 但是總量不會改變。觀察在漩渦上的兩點, 我們看到它們總是隨著時間或聚或散, 但多半是散的時候多。散的時候, 漩渦本身並不會變少, 所以此時漩渦大小就會變小變長; 因爲如果散時漩渦還是一樣大的話, 漩渦的量就增加了。總括來說, 大漩渦多半會變成小漩渦。當小漩渦變得很小很小時, 就會牽扯到水分子之間的摩擦, 摩擦會變成熱能散掉, 所以爲了維持一個河流不停的由大漩渦變成小漩渦, 我們必須給它能量; 這個能量會由大漩渦帶到小漩渦, 小漩渦最後變成熱量散掉。在大漩渦變到小漩渦之間有許多不同種大小的漩渦, 如果我們將漩渦有的速度稱爲 $U$, 漩渦的大小稱爲 $L$, Kolmogorov 做了一個基本的假設: 當大漩渦變成小漩渦, 能量傳送 $\varepsilon$ 只和 $U$、$L$ 有關。這個假設是否正確當然還需要經過證明, 這件事情現在大家還不會做。這邊我給一個圖來說明大漩渦及小漩渦, (見圖4)。在上圖中我們可以很明顯的看出大漩渦之旁有許多小漩渦; 在河流中大漩渦、小漩渦可以這樣不斷的發生, 以致於南宋的畫家李嵩可以看出這種現象, 並把它畫出來的原因, 是因爲上游的地方有能量不斷的供給, 這能量是由地心引力而來。這幅畫的是蘇東坡遊赤壁的故事, 在這裡我們將這幅畫命名爲「李嵩赤壁湍流」。能量 $\varepsilon$ 和 $U$、$L$ 之間的關係, Kolmogorov 計算的結果說

$$\varepsilon \sim U^3/L,\ U \sim (\varepsilon L)^{\frac{1}{3}}$$

這是著名的 Kolmogorov's Scaling Law。證明非常的簡單, 我們分析這三個量的維度:

$$U: \text{length/time},\ \ L: \text{length}$$

$$\varepsilon: \text{energy/mass}\cdot\text{Time}$$

$$\text{Energy: mass}\cdot U^2$$

因此為了平衡維度, 必須要有 Kolmogorov's Scaling Law 的關係。Kolmogorov 另外還有一個相關的工作: 如果假設 $K$ 是波的個數, 則 $K\sim(1/L)$, Kolmogorov 找出了如下的關係

$$E(K)\sim\varepsilon^{2/3}K^{-5/3}$$

稱之為 Kolmogorov-5/3 law, 簡單證明如下

$$E(K)dK\sim E(K)K\sim U^2$$

Kolmogorov 是極偉大的數學家, 他所提出的這些原理的理由, 我們方才已完全說明了。Kolmogorov 還做過一些工作, 例如: 他構造一個方程在 $L_1$ 空間中而它的 Fourier series 是幾乎處處發散, 還有 KAM Theory, 這些都是非常深的數學。Kolmogorov 對漩渦的工作也很深奧, 但和他的其它工作風格迥異。拿繪畫來比喻的話, 他其它的工作就如同方才說過的宋朝的李嵩的畫一樣精謹; 而對漩渦的工作卻像簡筆畫, 就如同八大山人的畫作一般, 雖然畫中沒有幾筆, 但每筆都非常精要, 你看了他的畫之後, 會引起無限的思考。很多人去做實驗發現, Kolmogorov 的猜測是相當準確, 可惜到如今還沒有數學證明。這種東西算不算數學是見仁見智, 不過我想這應該構成數學。我們之所以可能會問說, 這算不算數學, 是因為我們已經將數學定義到太精簡的程度了。我感覺到數學系的學生應該去和生物學家學一點生物的課, 和經濟學家修一點經濟的課, 或和物理學家上一點物理的課。這些課絕對不能在數學系修, 要在該系修, 我自己雖然沒有這樣做過, 不過我想學生應該要如此做。

最後一個例子是關於計算數學的例子, 這是一個蘇俄的數學家叫 Godunov 的工作, 雖然他的目的是要計算空氣流體的事情, 可是有人說他的數值方法曾被用到構造原子彈上面。關於氣體力學最簡單的方程就是所謂的 Euler Equations, 以一維為例, 這個方程可以寫成一個一般的型式

$$U_t+f(U)_x=0$$

其中 $U(x,t)$ 是我們所不知道的東西, 而 $f$ 則是已知函數; 所以整個是一個偏微分方程。這個方程相當的難, 因為雖然 Euler 十八世紀就已經導出這個方程, 可是這個非線性是一個很要命的非線性。如果你稍微懂得非線性方程, 你看了這個方程你就會皺眉頭。在數學上, 它牽涉到所

謂的 shock waves, expansion waves, contact discontinuities, entropy condition 等等, 所以計算的難度很大。計算時你必須辨別波的方向, 要注意到 entropy condition 等等, 非常困難。Godunov 想出了一個很簡單的方法, 他的想法是根據在他一個世紀前 Riemann 所做的工作, 這個 Riemann 就是 Riemann hypothesis 的那一位。偉大的 Riemann 在 PDE 上也做出了重要的貢獻。他的問題是這樣的, 這個方程如果直接去想是十分困難的, 他先觀察到方程式的一個特性: 如果把 $t$ 用 $ct$ 取代, 把 $x$ 用 $cx$ 取代, 則這方程式不會改變; 因此如果始值只有兩個常狀態的特例, 也就是說

$$\begin{aligned} U(x,0) = \ & U_-,\ x<0, \\ & U_+,\ x>0. \end{aligned}$$

那麼, 把 $x$ 用 $cx$ 取代始值也不變。因此解也不變而必定要有如下的型式

$$U(x,t)=U(cx,ct)=\psi(x/t).$$

如此一來, 原來 $U(x,t)$ 是兩個自變量 $(x,t)$ 的函數, 現在變成一個自變量 $\frac{x}{t}$ 的函數, 因之整個式子成爲常微分方程, 解它並不難這是 Riemann 的方法。經過了一個世紀, Godunov 才把這個東西應用在計算上。(這當然也是應計算機發明之故, 做數學不能閉門造車, 必然和數學其它科目或自然科學的發展有關。) 他的想法是 (如圖5) 如果在時間等於零的時候, 初始值是給定的, 我們的問題是想要知道在時間大於零時的解是如何變化的。例如, 我現在知道在房間中空氣是左邊冷、右邊熱、風由窗戶不斷的吹入, 我想知道一個小時之後房間中的空氣如何變化, 所以我就要知道一個小時之後方程的解。Godunov 的方法是把空間及時間劃分成許多小格子, 在開始時把始值用常狀態來逼近, 解 Riemann Problem, 這樣就當做第二層的始值; 做平均之後, 我們就可以再做一次方才的步驟, 繼續下去。爲什麼 Godunov 這個方法非常根本、非常重要呢? 這要回到 Riemann 這個解本身所包含的內容的寬廣性上來看。Riemann 解的時候告訴我們幾個有關波的基本的性質, 有的波會散開來, 有的波受到壓縮, 有的波既不散開也不壓縮; 另外它又告訴我們一件事情 : 壓縮的波必須要符合熱力學的第二定律, Riemann 解告訴我們兩件根本的事情, 首先告訴我們哪一個波在哪一個方向應有的型態, 而又同時考慮到熱力學第二定律。所以說, 空氣動力學裡面幾個根本重要的問題都在

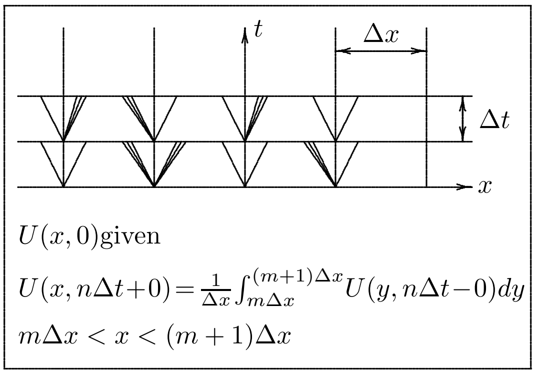



圖5

這個解裡面有所體現, 自然你把這個方法放在數值運算中必不會犯大錯。Godunov 創出這個方法之後, 就有人修改了這個方法做出相應的數學理論, 而後更有人推廣 Godunov scheme 成爲 High Order Godunov scheme。前些時, 中研院天文所有一個 Workshop, 講到天體上面很多星球的計算, 用的方法便是源自於 Godunov scheme。我以前也不是很留意數值計算的方法, 以及它裡面的困難和美妙, 但是慢慢察覺到數值方法的困難點, 並不是它的證明有好幾頁, 而是它的根本在哪裡, 並不容易被看出來。就算看出來之後還得要想辦法去算它,「去算它」並不是直接丟給電腦去算就可以, 你還得寫程式, 寫程式又是人人巧妙不同。做完之後還要知道如何判定所得到的計算數值好不好, 如何判定出錯出在哪裡, 這完全和我們傳統證明是兩回事, 也是很美妙的數學。

我想在此我可以做一個結論:「什麼是好的數學?」這自然是沒有一致的答案, 其實你感覺什麼是好的數學它就是好的數學。可是問題是你要有眞的感覺到, 偉大的數學家的話不能盡信, 必須自己想通的才算數。

**Q:** 陳俊全教授:「你是不是覺得對這個問題, 我們應該多談?」
**A:** 是的。我想這是文化上的問題, 我們的文化講究中庸, 但是中庸不應該是對每一句話來說的。我們應該多些公開的談論, 所有的言論最終都應該要滿足 Gödel Incompleteness Theorem, 話一經說出口, 自然是要有缺陷的, 但如果對一件事, 大家都來說, 那這所有的話的整體自然是比較完美中庸的 (當然還是有缺陷的)。我們現在不論問問題或回答問題都要偏見才好。你問這個問題我非常感謝, 我今天說出我的偏見來, 大部份的例子和我研究興趣偏微分方程有關, 下一次說不定我的偏見又改變。另外關於什麼是好的數學問題呢? 我們做數學時要不斷的提出理由, 說明爲什麼要做這個問題, 要向別人說我最近做的這個問題妙在何處, 當然就有幾種反應了, 最壞的反應就是說:「這有什麼好做的。」再也不會有更壞的反應的, 但是這個事情要說, 因爲有時自己說的多了之後心就虛起來了, 覺得其實我做的這個問題沒有太大的意思。數學做的多少、多好、多壞是一件事, 比較重要的是我應不應該做這件事, 當然, 跟別人說, 最大的樂趣是對自己的領域會有更寬闊的理解, 常常因之對自己想做的事, 更起勁的去做。

—演講者劉太平爲中央研究院數學所所長, 整理者黃暉娟曾任中央研究院數學所助理—