有朋自遠方來——

專訪 Rodney J. Baxter 教授

策劃：劉太平、高涌泉

訪談：詹傳宗

時間：民國九十年十一月十七日

地點：中央研究院數學所

整理：詹傳宗、林豐利、陳儀君

Rodeny J. Baxter 教授 1940 年出生於倫敦。1961 年劍橋大學三一學院畢業，主修數學。後轉往澳洲攻讀博士，1964 年獲澳洲國立大學博士學位。自 1970 年起任教澳洲國立大學理論物理系迄今，其間曾訪問知名研究機構及大學。Baxter 教授是統計力學與可積模型方面的大師，是多種學術獎項的得主，並爲澳洲科學院院士及倫敦皇家學會院士。

Q: 可否請您談談您的教育背景，由大學時期開始。

A: 嗯，我生於英格蘭倫敦東北方，中學在 Essex 的 Bancroft's School 渡過，畢業後進入劍橋大學 (Cambridge) 主修數學，1961年畢業之後我得到澳洲的獎學金到那兒攻讀博士學位，那裡有很多由英美等地放逐而來很有才華的人。

Q: 在澳洲您是主修物理嗎？

A: 嗯，我在理論物理系。

Q: 那裡是否和英國比較像，就是理論物理其實是比較偏數學的？

A: 噢，不同學校間有些差異，在劍橋確實偏愛將數學應用到物理。1968年我到麻省理工學院數學系和 Elliott Lieb 一起工作，然後 Elliott 轉往普林斯頓數學系。

Q: 是什麼原因讓您轉往統計力學與可積模型方面發展？

A: 那其實是個意外，我在澳洲坎培拉的指導教授 Le Couteur，他想讓我做場論和散射矩陣的工作，這在六零年代是最流行的理論，即使至今仍然很熱門。但是我沒有多大進展，後來我剛好看到一篇論文 Andrew Lenard 做的有關一維庫倫氣體的問題，他宣稱他能解關於電

子在均勻電荷背景的問題, 我審視這個問題並且著手做了, 這是一個我能想的特定的問題, 所以我就這樣一頭栽了進去。後來我和 Elliott Lieb 作另外的二維的問題, 那是關鍵的一步, 那時我做了一件正確的事, 就是了解 Elliott 的某些工作並且繼續做下去。

Q: Elliott 在英國做的嗎?

A: 我們那時都在劍橋 (Cambridge, Boston, U.S.A.) 的痲省理工學院。我生命中有二個劍橋, 這常讓人混淆。

Q: 你認爲 Elliott 對你影響最大嗎?

A: 在學術上來說, 很可能是的, 我和妻子原本打算在劍橋 (Cambridge, Boston) 待 2 年, 也如願待了 2 年, 離開時我們想從英國搭輪船回澳洲, 但在 1970 年代輪船班次不多, 我們有兩個選擇 — 在英國等兩個月或五個月, 我妻 Elisabeth 要我選擇在英國待五個月, 於是我們到了英國, 在波士頓二年, 正是越戰時期, 經過反戰, 示威等種種騷動的我們, 到達英格蘭沈靜、昏昏欲睡的海邊時, 感到莫大的文化震撼。Elisabeth 想到我們要在這兒待五個月有些焦慮, 不過, 這五個月時光很値得, 太値得了。在五個月近尾聲時, 我拾起早先和 Elliott Lieb 的工作, 我有個靈感看出原本取決於兩個參數的轉換矩陣的本徵向量, 實際上只和一個參數有關, 這表示具有不同速率參數値的轉換矩陣彼此交換。然後我發現 Bethe Ansatz* 的結果實際上告訴我們一定存在另一個矩陣 Q, 它和轉換矩陣 T 交換, 並且有一些特定的性質。事實上這就提供了解決六頂點模型的第二個方法。另一方面, 那時有個衆人矚目的問題: 八頂點模型, 它無法用原先 (解六頂點模型) 的方法解決, 不過我發現用這第二個方法可以將它解決。

Q: 這與 Yang-Baxter* 關係相關嗎?

A: Yang-Baxter 關係就是令矩陣交換的條件。你看! 我這五個月假期多有意義! 我想說的是, 一直思考, 研究工作並不必然會有進展。我們回到坎培拉後, 我繼續八頂點模型方面的工作, 很快的, 楊振寧邀請我到 Stony Brook 訪問, 在 1972 和 1980 我兩度到那裡, 與 Barry McCoy 以及他的同僚們一起工作。1980年有另一個挑戰, 楊振寧的弟弟楊振平, 寫了篇文章, 關於餘熵 (residual entropy), 他估計的結果是 $0.33333\ldots$, 很自然的他推測也許是 $1/3$。

Q: 他使用什麼方法?

A: 一些簡單的數値方法, 我要我的學生 Shiu-Kuen Tsang 以轉角轉換矩陣來計算這個値 (corner transfer matriax), 很快得到十二位的準確値 $0.333216949\ldots$, 並不是 $1/3$, 故事還沒完, 我很仔細地審視她的電腦結果, 體認到轉換矩陣的特徵値, 它們某些自然的乘積

---

* 參見文後補充說明

組合在初次逼近時是 0.999, 第二次逼近是 0.999999, 第三次是 0.999999999 . . ., 我估計它大約是 1, 這是基於低溫展開結果所做的推測, 不過看起來它卻很像就是 1, 如同在八頂點模型的情形。這意味著可能可以完全解這個模型, 而我也的確這麼做了, 導出 Yang-Baxter 關係的另一個應用: Rogers-Ramanujan 等式, 這是 Rogers 在 1894年證明的等式, 35年後重新爲 Ramanujan 發現, 這個等式很自然的出現在 hard-hexagon 模型, 當時是我自已證明了這個等式, 拿給國立澳洲大學的同事 Kurt Mahler 看, 他是數論專家, 他馬上告訴我這是 Rogers-Ramanujan 等式, 我在計算中有十六個左右這類的等式。所以我就寫信給所有可能幫助我了解這些等式的朋友, 我從 Michael Hirschhorn 和其他朋友處得到有助益的回音, 其中以在賓州州立大學 (Penn State) 的 George Andrews 爲最, 他回信告訴我, 我那十六個等式可以如何由 Ramanujan, Watson, Slater 及 Birch 等的論文中推導出來, 幾年後他和家人到坎培拉來做爲期六個月的休假 (Sabbatical), 我們一起工作因此而得到 Andrews-Baxter-Forrester 模型, 實際上他提出來 hard-hexagon 模型是一個 2-state 模型而 Rogers-Ramanujan 等式可理解爲一個 2-state 等式。這等式可以推廣到 k-state, 而與週期爲 $2k+1$ 的等式有關, 所以 Rogers-Ramanjan 等式是所有關於週期爲 5 的模函數 (modular function), 而下一個將是週期爲 7 的 3-state 等式。問題是: 是否有一個 3-state 的格子 (lattice) 與這些等式相關? 我起初的反應是這是有了 “解” 去找 “問題”, 不過 Andrews 的觀點完全正確。我們在 Andrews-Baxter-Forrester 模型中找到的不完全如此, 它實際上是後來同時由我們及 Miki Wadati 發現的, 不過我們找到另一個模型, 有類似的等式, 發展成十足的企業, 製造玻色與費米 (bosonic and fermionic) 等式, solid on solid 模型等。接下來就是我研究、探討了一段時間, 在昨天和今天演講中提到的 chiral* Potts model 我想這個工作大概持續了有二十年之久, 但是仍然有我們不知道的事情。有一個關於 order 參數的猜想, 這個吸引人的猜想用盡我們以往所有的技巧仍然毫無突破。

Q: 在你研究的早期, 你好像喜歡這些定義明確的問題, 再嘗試用數學方法來解決。

A: 這是一種挑戰, 像楊振平推測熵可能是 1/3, 在那時我對這個說法抱著疑問, 因爲它與其他有明確結果的格子模型 (lattice models) 不同。釐清這個問題的對錯就是一個挑戰, 結果這個猜測是錯的, 但是, 這個模型卻是可解的! 通常如果你是從事尋找確切解的工作, 假如有人告訴你或向你建議 (或提示): 也許這個模型是有趣的, 或許是可解的, 這將頗有幫助, 那麼什麼是可解? 比方說, 在墨爾本 Tony Guttmann 會告訴你在磁場中 Ising 模型的 free energy 一定在複數平面上有個自然的邊界, 而且一定不可能是某種形式的微分方程的

---

* 參看本刊第二十五卷第三期「結 (2)」, p.37

解, 這些無疑是正確的, 但這表示你不能找到明確的解嗎? 過去沒有找到 (解), 不過如何能說未來就一定沒有?

Q: 你是什麼時候決定寫書的?

A: 這本書是 82 年出版的, 大約是 1979 年開始動手。

Q: 是你自已一個人完成的嗎?

A: 是的。

Q: 我猜想是你的課程講義的一部份。

A: 確實, 我用其中一部份做爲教學之用。

Q: 所以你認爲什麼是你最好工作? 八頂點模型和 hard-haxagon 嗎?

A: 是的, 然後是轉角轉換矩陣 (corner transfer matrices)。這個想法是經長時間演變來的, 先是從有關 dimer-monomer 系統數值逼近的工作開始, 直到我 1975年訪問 Edinburgh 時才成形。把他們應用於八頂點的模型, 發現它們具有很美的性質。

Q: 所以你與數學家有比較多的互動嗎?

A: 數學家和物理學家二者都有。

Q: 你認爲一般來說, 什麼是可積模型和統計力學的領域中, 最重要或者吸引人的問題?

A: 這是很好也很有想法的問題, 嗯...

Q: Chiral Potts 模型嗎?

A: 可能, 我最近在檢視隨機格子的二色多項式 (dichromatic polynomial), 重溫我早先和 Ian Enting 一起做的普通的 Potts 模型。在 70年代初期, 加拿大滑鐵盧的數學家及密碼破解專家 William Tutte 曾寫下隨機曲線圖的二色多項式。看來與現在統計力學理論中有關隨機格子上的隨機模型的工作有關。我應該在 15年前就著手, 那麼我大概可以預期某些這類的工作了! 至於其他方面, 我又重新回到 Bethe Ansatz, 探討它是否完備 (complete) 的問題。這是個古老的問題, 最近又被重新提起。我確信它是完備的, 也就是說, 它給出轉換矩陣所有的本徵向量。如果本徵值是退化的則它們不唯一 — 這反映在這個 Ansatz 上, 我曾寫了篇文章申明我的觀點。討論問題的麻煩在於你可能花了數月的準備提出一個論述, 甚至還有證明, 到頭來卻可能爲人忽視。有時問題可能只在於 “用辭” (或術語) (terminology), 但正確的術語是很重要的 — 如果你想要開車穿越平交道, 人家告訴你柵門是開的, 這時知道 “門” 是爲你開的還是爲火車開的可是生死交關的事。

Q: 我把這樣的情形形容爲 “民主” 的情況, 也就是在這個領域裡每個人有不同的看法, 而不是有一個每個人都想要解決的大問題。

A: 大致是如此, 不過研究可解模型通常是很精確的。它們很有趣, 因爲你眞的能解這個模型: 也就是得到一個確切的解, 它們也許有複雜的臨界性質, 有連續相變, 三臨界相變 (tricritical phase transition) 等。通常這些模型是某些一般模型的特例, 知道他們能有什麼性質是非常有意義的。有一個我常舉的例子是 Ising* 模型, 人們都很喜歡以磁場去解二維的 Ising 模型, 但是我們只在零場找到解, 不過這還是極爲重要, 因爲解包括了臨界點, 所以能告訴你臨界點的位置, 至少還給你臨界行爲的一些資訊, 而能了解尺度域中 (scaling region) 整個尺度函數 (scaling function) 也是很好的。在離開臨界點的地方, 你很容易就由數值逼近得到十二位數的準確度。

Q: 你認爲 3 維的 Ising 模型是一個有趣的問題嗎?

A: 當然, 不過我不知道如何解它! 哈!

Q: 可積模型中的大多數技巧好像都限定在 2 維。

A: 是有一些由 Zamolodchihov 發現的 3 維的模型, 但它們的 Boltzmann 權 (weights) 是負的所以至少由統計力學的觀點它們不是自然的 (unphysical)。看起來那些模型其實是臨界的, 而且在有限層 (finite number of layers) 的情形, 也是臨界的, 所以如果你增加層的數目, 還是保持臨界的狀態。這意味著它決不是一個典型的模型, 而我們希望的是有個三維的典型的模型 (typical model)。下面純屬臆測 — 且是大膽猜想: 1 維時在任何溫度下一個場中的 Ising 模型都可解, 2 維時任何溫度就只能在零場可解。你可能會猜想 3 維時, 在零場中可能在臨界溫度有解, 也就是臨界點, 即使是這樣仍然是很有趣, 但是我不知道怎麼去做。

Q: 你的研究是否在數學以外的其他領域發生意想不到的影響?

A: 哦, 我認爲除了數學外在某些領域的確是有些聯帶影響, 如相變理論和臨界現象。有些保角場專家喜歡在可解模型下來測試他們的想法, 另外像結理論也要用許多這方面的技巧, 包括 Yang-Baxter 關係, 當然還有量子群。

Q: 你是否參與結理論方面的研究?

A: 我只是涉獵。

Q: 你認爲 Yang-Baxter 關係之後, 在可積模型的領域中最有趣或者最重要的發展是什麼?

A: 一個難回答的問題 — 我後續發現了轉角轉換矩陣, 很有用而且有許多讓人驚嘆的性質, 但這些性質本身都仰仗 Yang-Baxter 關係。

Q: 在你的學術生涯中有任何遺憾嗎?

A: 沒有, 沒有。

Q: 如果你有其他機會做你要作的領域, 你想做什麼?

A: 我有許多我想要作的事情, 不一定是物理, 我不想一直做相同的事。

---

* 參見文後補充說明

Q: 你有多少研究生?

A: 現在沒有。

Q: 過去呢?

A: 不多, Shui-Kuen Tsang 是其中一個, 她是我的第一個研究生, 來自香港, 現在在坎培拉做電腦方面的工作做得很好, 另外是 Peter Forrester 他是我最好的學生之一, 還有 Aleks Owczarek 和一些其他人。

Q: 當他們決定主修這個領域時, 你對他們有什麼建議?

A: 哦, 一般來說我很密切指導我的學生, 除了 Aleks Owczarek, 因爲他當我的研究生時, 我正好動冠狀動脈繞道的手術。Peter Forrester 不需要我什麼指導, 他在大學時已經至少寫過一篇文章。我必需說我一般認爲你指導的越少, 學生越好。

Q: 不過你剛剛是說你想和他們密切的工作。

A: 開始時我是如此。

Q: 所以你實際上是和他們一起工作嗎?

A: 是的, 我應該這麼做並且我也盡力這麼做, 但是我不是那麼肯定這是否是必要的或者他們會希望這樣, 也許給他們更多自由去做他們想要做的, 他們可以做得更好也不一定。

Q: 但是, 一般來說你會找一些問題讓他們解決。

A: 是的。

Q: 你對這個領域感興趣的年輕學生有任何建議嗎?

A: 做你們感興趣的事。花一輩子時間從事一件事, 到頭來卻覺得無聊是很槽糕的。如果你對某事確實感興趣, 就努力去做吧。如果你對可積模型有興趣, 就要讓自己準備好去用很難而艱深的數學。我想有些物理學家認爲數學只是積分的工具, 如果你這樣想的話, 在可積模型這個領域你可走不下去喲。

Q: 訪問到此結束, 謝謝您。

補充說明: (馮明光 – 國立台灣師範大學物理系教授)

Bethe's Ansatz: 1931 年 H. Bethe 求一維海森堡模型 (Heisenberg Model) 的解。海森堡模型的 Hamiltonian 爲

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} \sigma^i.\sigma^{i+1}\,.$$

式中 i 代表一維晶格點的位置。這個一維鏈是週期性的。每一點上有一 localised 自旋 (spin) 變數 $\boldsymbol{\sigma}^i$。相互作用由相鄰的自旋產生。若 J 是正的, 則相鄰平行自旋給出更低的能量。這就是

鐵磁模型。自旋 $\boldsymbol{\sigma}^i$ 既是向量, 也是算符。它的明顯表達式就是 2×2 Pauli matrices σ_x^i, σ_y^i, 和 σ_z^i。所以從矩陣直乘可知 H爲一 $2^N\times 2^N$ 矩陣。N 就是晶格點的總數。Bethe 就是要解

$$H\psi = E\psi$$

的本徵值問題。

Bethe 提出一個很漂亮的猜想使得整個問題可解。量子化的自旋問題可選 σ_z 作爲基底態。所以每個晶格點可以有 $+, -$ 態。我們叫這些態爲 up spin, down spin 。可以證明整個系統 up spin 的數目是守恆的。這樣就可以將矩陣 H 分成一塊塊的方矩陣。我們可以考慮 up spin 總數目是 n 的波函數。Hamiltonian 可以表達成

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}\left(2\sigma_+^i\sigma_-^{i+1} + 2\sigma_-^i\sigma_+^{i+1} + \sigma_z^i\sigma_z^{i+1}\right),$$

式中 σ_+, σ_- 分別爲產生及湮滅算符。顯而易見, $n = 0$是本徵態也是能量基態。$n = 1$ 就是 spin wave 解。波函數可以沿用一般聲波子的方法處理。這時波函數可寫成

$$\psi = \sum_{\{x_1\}} A e^{ik_1x_1}|x_1\rangle\,.$$

$|x_1\rangle$ 爲一個 up spin 在 x_1位置的基底態。Hamiltonian 作用的結果是交換這些基底態。

比較創新的結果是 $n>1$ 時的波函數。$n=2$ 時 Bethe 提出了以下的形式

$$\psi = \sum_{\{x_1<x_2\}}(Ae^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + Be^{i(k_2x_1+k_1x_2)})|x_1, x_2\rangle\,.$$

波函數 ψ 對x_1, x_2是對稱的。當我們考慮 x_1, x_2 相鄰接近時, 我們得出 A, B 相差一個相位。這個相位與 k_1, k_2 有關。我們再考慮一維鏈週期性的條件, 得出決定 k_1, k_2 的串連方程式。這樣可得出能量本徵值。$n > 2$ 的情形也有相應的波函數。簡單來說這個結果可以說是 Permutation 對稱一個非常不尋常的表達形式。

其後陸續有其他模型如一維 δ 函數量子模型, 二維六頂角統計模型, 等等也可用相同的方法求出解。這就是 Bethe Ansatz 的由來。

Yang-Baxter equation (YBE): 1967年楊振寧先生研究一維 fermionic δ 函數的多體問題。他寫下 Bethe Ansatz 般波函數, 祗是他首先沒有要求波函數有任何特殊的對稱性。就是說系統中的粒子并沒有預設有任何統計屬性。波函數是平面波的疊加, 平面波前的係數跟 k_i 及 x_a 有關。相鄰的係數由一個相位算符 Y_{ij}^{ab} 相連。相位算符的自洽條件可寫成

$$Y_{jk}^{ab}Y_{ik}^{bc}Y_{ij}^{ab} = Y_{ij}^{bc}Y_{ik}^{ab}Y_{jk}^{bc}\,.$$

這就是著名 YBE 的起源。之後1972年 Baxter 解八頂角模型時要求 Transfer Matrix 對易也寫下相似的方程式。這個關係保證存在足夠多的對易守恆量使得 Transfer Matrix 的本徵值可以算出來。70年代末期 Faddeev 的俄羅斯學派將 Bethe Ansatz 代數化。他們利用算符的對易關係導出一維海森堡模型的能譜。他們更進一步引進滿足 YBE 的 R 矩陣。這個 R 矩陣生成一個 Quadratic 代數, 而且這樣定義出來的系統存在足夠多的對易守恆量使得系統可積。80年代 Quantum Group, Knot Theory 等等也廣泛地利用 YBE 來得出很多不同的可積系統。大家差不多將可積系統與 YBE 劃上等號。

Integrable System: 所謂可積系統 (Integrable System), 其實幷沒有任何嚴格的定義。鬆散的說, 一個系統假如有一些性質可用比較完整的數學解出來就算是可積。通常可積模型與 Soluble 模型是共通的。古典力學的可積性是比較明確。Liouville 定理告訴我們在 $2n$ 維的相位空間 (Phase Space) 只要 n 個對易的守恆量, 系統就是可用 Quadrature 積分。量子力學出現以後有一些特定的系統有精確解, 如氫原子、簡諧振子等等。後來又有一些低維統計模型及量子場論模型發現是可解的, 像 Ising Model, Sine-Gordon Equation 等等。不過不同的模型要用不同的方法處理, 沒有一般相通的地方。60 年代末期開始有了變化。越來越多的模型可以用 Bethe Ansatz 來求解。1967 年逆反射方法 (Inverse Scattering Method, ISM) 用來解非線性偏微分方程提供了另一個通用的模式。 Faddeev 他們將 Bethe Ansatz 及 ISM 觀念結合起來。中間的 YBE 就是保證系統可解的條件。所以 YBE 衍生出來的可積模型就越來越多。而可積系統所涵蓋的範圍就越來越大。

—本文策劃劉太平先生爲中央研究院數學所所長, 高涌泉先生任教於國立台灣大學物理系.
整理詹傳宗先生任職於交大電子物理所、林豐利先生任職於淡江大學物理所—