論數學概念學習

喻　平・馬再鳴

摘要: 數學概念學習有自身的特殊性。形成概念域和概念系是數學概念學習的一個本質特徵。

關鍵詞: 概念學習, 認知, 概念域, 概念系

概念, 是哲學、心理學、邏輯學、語言學等學科的研究對象。在學習心理學中, 概念學習一直是研究的熱門課題, 迄今爲止, 已出現了派別各異、觀點不同的各種理論。本文在國內外研究成果的基礎上, 結合數學概念的特殊性, 探討數學概念學習的心理過程及其本質特徵。

一、概念學習研究的一般理論

E. Fishbein 指出:“起先, 人們傾向於借用心理學的問題、概念、理論和方法。聯想主義、行爲主義、新行爲主義、Gestalt主義、Piaget 學派 — 所有這些觀點都對數學教育的理論和研究有著潛在的或是明顯的影響。然而, 實際的收效甚微, 原因在於心理學並不是一個演繹體系。一般原理僅僅應用到特殊領域中通常不會引出重要的發現。”[1] 事實上, 縱觀心理學、教育心理學關於概念及概念學習的有關理論, 我們可以發現這些理論很難涵蓋數學概念學習過程的全野, 具體地說, 表現在如下幾個方面:

概念的分類: 心理學家對概念的分類進行了大量的研究, 其中有四種分類對概念的研究與教學有重要意義。[2]這四種分類分別是 (1) 日常概念與科學概念 (L. Vygotsky); (2) 難下定義的概念與易下定義的概念 (C. L. Hull); (3) 初級概念與二級概念 (D. P. Ausubel); (4) 具體概念與定義性概念 (R. M. Gagne)。顯然, 四種分類所強調的側面是不同的, 有的強調概念的來源, 有的著重刻畫概念的本質, 有的則從概念的結構方面去進行描述, 因而, 從概念學習的角度看, 四種分類就有各自的教學涵義。將概念進行分類, 其教學意義在於可以根據不同類別概念的特性, 選擇不同的學習或教學策略。然而對照數學概念, 上述有關對概念的分類則很難達到這個目的, 因爲對於數學概念來說, 這些分類

顯得過於籠統, 難以對數學概念的特徵作出較精確的刻畫。譬如, 按 Ausubel 的分法, 數學概念 (特別是高等數學中的概念) 多是二級概念, 於是對衆多的數學概念而言, 這種分類也就失去了意義。事實上, 作爲二級概念的數學概念在抽象程度、定義形式以及結構等方面都是有差異的, 因而對這些概念的學習其信息加工的方式也就不同, 籠統地採用二級概念去歸類, 就失去了教學、學習策略制定的可操作性, 因此, 對數學概念的恰當分類, 是數學概念學習理論要解決的一個問題。

概念結構: 認知心理學對概念結構的研究有兩種重要的理論, 即所謂特徵表說和原型說, [3]特徵表說主張從一類個體具有的共同特徵來說明概念, 認爲概念或概念的表徵是由兩個因素構成: (1) 概念的定義性特徵, 即一類個體具有的共同的有關屬性; (2) 諸定義特徵之間的關係, 即整合這些特徵的規則, 用式子表示爲:

$$C = R(X, Y, \ldots\ldots)$$

其中 C 爲概念, R 爲整合個體特徵 X, Y, $\ldots\ldots$ 的規則。對於 R, 研究的焦點集中在合取、析取、否定等邏輯運算方面。原型說與特徵表說是對立的, 認爲概念主要是以原型即它的最佳實例表徵出來的, 概念也是由兩個因素構成: (1) 原型或最佳實例; (2) 範疇成員代表性的程度。這兩種理論的差別表現在幾方面: 特徵表說著重概念的定義性特徵, 帶有分析性色彩, 原型說強調最佳實例或原型, 帶有整體性色彩。特徵表說認爲特徵是由語義表達的, 原型說設想原型是以表象來編碼的。

我們認爲, 一方面, 對單個數學概念的結構的描述, 特徵表說較原型說更具有合理性, 而對概念域 (下面將專門討論) 的形成, 原型說則比特徵表說更能給出合理的解釋。另一方面, 由於特徵表說發端於人工概念的研究, 原型說的重點是對自然概念的刻畫, 兩種學說都有片面的因素, 因而對複雜的數學概念就很難做到全面地描述。例如, 極限是一個高度抽象的概念, 用定義表述不僅與諸多概念有關, 而且反映的是一種變化趨勢或過程, 對此, 兩種理論是無法解釋的。

概念學習的形式: 行爲主義認爲概念是有機體對相似的刺激物作共同反應的能力, 概念的獲得是個體經過多次刺激 — 反應後發生的。顯然, 這一說法不能解釋抽象、複雜概念的學習。認知學派對概念學習的研究則從個體的內部因素入手, 認爲概念形成與概念同化是概念獲得的兩種基本形式。對於概念形成的研究, 心理學家得到了一些頗有意義的成果, 特別是在人工概念的形成方面。J. S. Bruner 等人於1956年提出了概念形成的“假設考驗說”, 認爲概念形成是刺激與個體假設庫中的假設進行匹配的過程, 並提出了四個概念形成的策略。[3] Ausubel 從另一角度認識這一問題, 認爲學生在教學條件下學習概念, 完全不同於人們在自然條件下形成概念或科學家發明與創造概念, 不同於在人爲條件下形成人工概念, 而概念同化才是概念獲得的最基本方式。

對於數學概念學習而言，概念形成與概念同化是獲得概念的兩種基本形式，但我們認爲有兩點還值得思考。第一，數學概念獲得是否只有這兩種方式，事實上，語言學習也應是數學概念獲得的一種方式。[4] 第二，概念同化是指學生利用認知結構中的已有觀念與新概念之間的相互作用去獲取概念，概念形成是從個別實例到抽象本質去獲取概念的方式，但這兩種方式獲得的往往是概念意象 (後面將討論)，而概念的掌握必須經過概念在不同水平上的應用過程。

概念學習理論： 不同的學習理論學派對概念學習的過程都有相應的解釋。聯結主義認爲概念學習的過程是同類刺激物與機體某種反應的聯結過程，概念形成的關鍵在於外界刺激與機體反應之間的聯結。認知學派則認爲人類對於概念的學習是一個積極主動的過程，是人們根據事實進行推理，提出假設，並將這一假設應用於實踐中去檢驗的過程。作爲折衷主義，J. M. Sawrey 與 C. W. Telford 認爲學習包含簡單的聯結和複雜的認知學習的若干層級，指出："認知學習可以而且常常包含聯想的、嘗試錯誤的、模仿的、頓悟的和理性的成分。一個人是通過外部線索 (刺激或其他某些特點) 與內部的中介過程 (含義、思想或觀念) 之間的聯結而形成知覺和概念的。"[5] 我國學者莫雷教授提出了學習雙機制理論，認爲"人有兩類學習機制，一類是聯結性學習機制，另一類是運算性學習機制。……，因而，有機體的學習也相應地分爲聯結性學習與運算性學習。所謂聯結性學習；是指個體通過將同時出現在工作記憶中的若干客體聯繫起來，而獲得經驗的學習；所謂運算性學習，是指個體通過複雜的認知操作而獲得經驗的學習。"[6] 上述各種觀點，聯結主義的學習理論適合解釋初級概念的學習。認知學派注重學習中個體的內部加工過程，適合二級概念的學習，但解釋簡單學習就十分牽強。折衷主義融合兩家理論，具有重要的意義，但將兩種理論的組合顯得過於簡單。雙機制理論是折衷主義的發展，能較好地解釋概念的學習過程。

我們提出的問題是，如何綜合上述觀點，從而揭示數學概念學習的本質。

二、數學概念的特徵與結構

1、數學概念的特徵

一般而言，數學概念具有抽象化、形式化、邏輯化和簡明化的特徵，這是從靜態角度去考察個別概念的結果。如果從動態的深層面去分析個別概念或概念系統，那麼就會對數學概念特徵作出更準確的刻畫，爲此，引入概念域和概念系兩個術語。

首先，分析下面二個例子。

例1: (*關於等差數列的定義*)

數列 $\{a_n\}$ 是等差數列，當且僅當 $a_{n+1} - a_n = d$，其中 d 爲常數，$n \in N$，$n \geq 1$。

$\Leftrightarrow$ 數列 $\{a_n\}$ 是等差數列，當且僅當 $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$，$n \in N$，$n \geq 2$。

$\Leftrightarrow$ 數列 $\{a_n\}$ 是等差數列，當且僅當 $a_n = a_1 + (n-1)d$，d 爲常數，$n \in N$，$n \geq 2$。

$\Leftrightarrow$ 數列 $\{a_n\}$ 是等差數列，當且僅當 $a_n = a_m + (n-m)d$，d 爲常數，$n, m \in N$。

$\Leftrightarrow$ ……

例2: (*"距離"的概念*)

以 A, B 表示點, l, m 表示直線, N, P 表示平面, $\rho(A,N)$, $\rho(A,l)$ 分別表示 A 到 N, A 到 l 的距離, inf 表示下確界, S 爲空間點集。則有如下概念擴展鏈:

$$
\begin{aligned}
&\rho(A,l)=\inf\{\rho(A,B)|B\in l\}\\
\to\ &\rho(A,N)=\inf\{\rho(A,B)|B\in N\}\\
\to\ &\rho(A,M)=\inf\{\rho(A,B)|B\in M, M\subset S\}\\
\to\ &\rho(l,m)=\inf\{\rho(A,B)|A\in l, B\in m\}\\
\to\ &\rho(l,N)=\inf\{\rho(A,B)|A\in l, B\in N\}\\
\to\ &\rho(N,P)=\inf\{\rho(A,B)|A\in N, B\in P\}\\
\to\ &\rho(M_1,M_2)=\inf\{\rho(A,B)|A\in M_1,\\
&\quad B\in M_2\}\quad (M_i \text{ 爲點集},\quad i=1,2)
\end{aligned}
$$

分析上面兩個例子, 可以看到數學概念的三個特徵。

(1) 對同一個概念, 可以從不同的側面或選擇不同的角度去刻畫, 即可以採用彼此等價的一組定義去描述同一個概念。

(2) 概念具有發展性, 在不同背景下可以賦予一個概念新的意義。

(3) 數學概念不是孤立的, 定義一個新概念往往要用到諸多的舊概念, 概念之間存在弱抽象、強抽象或廣義抽象關係, [4] 因而組成一個由概念作爲結點, 由關係作爲紐帶的概念體系。

G. Vergnaud 提出了“概念域”的概念, 指出: “數學概念的意義是從多種情境中提取出來的。但是, 要分析每一種情境又不能只用一種概念, 而要用到好幾種概念。這就是我們不得不研究概念域的學與教的原因, 概念域有大量情境, 對情境的分析和處理則需要好幾種交織在一起的概念、過程和符號表象。”[1] 顯然, “概念域”的涵義與數學概念的上述三個特徵是吻合的。但 Vergnaud 沒有對概念域作出明晰的闡述, 顯得籠統和模糊。下面我們對此作進一步的探索。

現代認知心理學將觀念按屬性組合的知識貯存方式稱爲圖式。圖式是對同類事物的命題的或知覺的共同的編碼方式。我們利用圖式概念來描述概念域, 即:

概念 C 的所有等價定義的圖式, 叫做概念 C 的概念域。

具體地說, 概念域的涵義是指某個概念的一些等價定義 (知識) 在個體頭腦中形成的知識網絡, 是個體數學認知結構的組成部份。

在對一個概念進行描述的一組等價定義中, 有一個是最基本的定義 (在教科書中往往選擇它作爲概念的定義), 我們稱概念 C 的基本定義爲 C 的典型定義。譬如, 對平行四邊形概念的描述, 可以有如下一組等價定義:

(1) 兩組對邊分別平行的四邊形叫做平行四邊形。

(2) 一組對邊平行且相等的四邊形叫做平行四邊形。

(3) 兩組對邊分別相等的四邊形叫做平行四邊形。

(4) 兩組對角分別相等的四邊形叫做平行四邊形。

......

其中, 定義 (1) 是平行四邊形概念的典型定義。

典型定義, 是指最易於學生學習而又不失數學嚴謹性的定義, 這與概念結構的原型說有相近的涵義, 即把典型定義的圖式作爲概念域中的一個實例。

下面再對概念系進行描述。

如果一組概念 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 存在關係:

$$C_1R_1C_2R_2\ldots R_{n-1}C_n \qquad (*)$$

其中 $R_i(i=1,2,\ldots\ldots n)$ 表示強抽象、弱抽象、廣義抽象這三種數學關係中的任意一種, 那麼稱 $(*)$ 爲一條概念鏈, 記爲 $\lambda=\{C_1,C_2,\ldots\ldots C_n\}$。如果兩條概念鏈的交集非空, 則稱這兩條鏈相交。如果 m 條概念鏈中至少有一條與其餘的鏈都相交, 那麼稱這 m 條鏈的圖式爲概念系。

簡單地說, 概念系就是在個體頭腦中形成的概念網絡, 這個網絡中的概念間存在一些關係。

數學中經常出現這種情形, 就是學生在學習了一個概念之後, 具體應用這個概念時往往會犯類型不同的錯誤, 或者是沒有把握概念的內涵, 無法辯認概念的反例; 或者是不能理解概念的變式。出現這些情況除了因爲學生的學習可能是機械學習的原因之外, 另一個重要原因就在於他們在概念學習中沒有形成概念域或概念系, 不能從多角度、多背景下去深入理解概念, 沒有在頭腦中形成一個概念體系。因此, 形成個體的概念域、概念系是概念學習的一個本質特徵。

概念域 (系) 理論與筆者提出的命題域 (系) 理論[7]是平行理論。

2、數學概念的分類

認知心理學 J. R. Anderson 從知識的心理性質角度出發, 將學生學習的知識分爲兩類, 一類是陳述性知識, 另一類是程序性知識。[8] 陳述性知識是關於事實的知識, 其學習過程主要是在工作記憶中把幾個激活了的節點聯結起來形成新命題的過程。程序性知識是指關於進行某項操作活動的知識, 在這種知識的學習中, 個體要學習在某種條件下採取的某項操作或某系列操作程序, 並能按程序完成整個操作。

我們借助於特徵表說和 Anderson 知識分類說對數學概念進行分類。一個數學概念可以表述爲:

$$C=R(Z_1,Z_2,\ldots\ldots Z_n)$$

其中 $Z_i(i=1,2,\ldots\ldots,n)$ 爲個體特徵 (或上一級概念), R 爲整合這些特徵的規則 (如命題的合取、析取等演算規則)。如果 R 及 Z_1, Z_2, $\ldots\ldots Z_n$ 沒有數學的運算意義, 那麼稱這類概念爲陳述性概念, 否則稱爲運算性概念。

例如, 對於平行四邊形概念: 如果 $(AB \mathbin{//} CD)\wedge(AD \mathbin{//} BC)$, 那麼稱四邊形 $ABCD$ 爲平行四邊形。這裡是兩個特徵的合取, 不存在運算特徵, 所以平行四邊形的概念是陳述性概念。又如, 關於偶數的概念: 能被2整除的自然數叫做偶數。因爲在判斷一個數是否爲偶數時, 必須做一次除法運算, 因此偶數概念即爲運算性概念。

對於運算性概念, 根據運算方式的不同又可分爲程序性概念和構造性概念兩種類型。所謂程序性概念是指該概念的定義中給出了判斷概念本質屬性的運算程序。如“偶數”、“最大公因式”概念等。構造性概念指在判斷一個概念時, 需要構造出一個滿足某種

屬性的對象後再實施運算的概念。如“有界數列”的概念: 對數列 $\{a_n\}$, 若存在實數 $M > 0$, 使對任意自然數 n, 都有 $M \geq |a_n|$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有界數列。這裡要構造 M, 再實施運算 $M \geq |a_n|$。

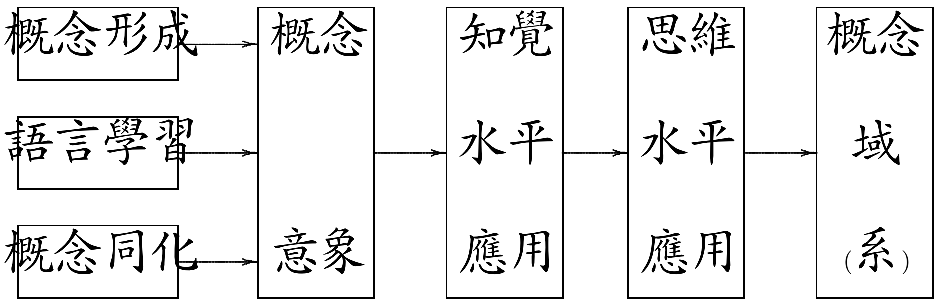
於是, 得到數學概念的一種分類:

$$
\text{數學概念}\begin{cases}\text{陳述性概念}\\ \text{運算性概念}\begin{cases}\text{程序性概念}\\ \text{構造性概念}\end{cases}\end{cases}
$$

給數學概念分類的目的在於: (1) 從理論上解析數學概念結構, 從而爲概念學習理論奠定基礎。(2) 在教學中, 便於根據不同類型概念制定相應的教學策略。

三、 數學概念學習的心理過程分析

我們將數學概念學習過程用下面模式表述:



概念意象 (concept image) 是 S. Vinner 和 F. Hershkowitz 提出的術語。[9] 概念意象“ 就是學生的頭腦中和概念名稱相聯繫的思維圖象以及描述它們所有特徵的性質。學生的意象是有關概念的例子和反例在頭腦中作用的結果。因此, 學生通過概念的例子來認識的數學對象和定義表示的數學對象不一定一致。” 顯然, 概念意象是指一個數學概念在學生頭腦中形成的不完整印象。

概念在知覺水平上應用, 指學生獲得同類事物的概念以後, 當遇到這類事物的特例時, 就能立即把它看作是這類事物中的具體例子, 將其歸入一定的知覺類型。例如, 學生在學習了等差數列的概念後, 能正確判斷一個特殊的數列是否爲等差數列, 那麼就達到了概念的知覺應用水平。概念在思維水平上應用, 指學生學習的新概念被類屬於包攝水平較高的原有概念中, 因而新概念的應用必須對原有概念進行重新組織和加工, 以滿足解當前問題的需要。例如, 學生在學習了等差數列的概念後, 在解答有關等差數列的綜合問題時, 因等差數列的“典型定義”可能很難奏效, 而需要用到等差數列的另一些等價定義去解答, 即對原有概念進行重新組織和加工, 便有利於解答問題。顯然, 概念在知覺水平上應用與概念在思維水平上應用是概念應

用的兩個層面, 前者處於低級層面, 後者處於高級層面。

現在我們分析上述數學概念學習過程的模式。

學習者首先通過辯別、抽象、假設、檢驗、分化、概括等心理過程, 以概念形成或概念同化或數學語言的學習形式獲得概念意象, 然後通過概念的知覺水平應用, 去消除概念意象中不完整印象與完整概念之間的差異, 再通過概念的思維水平應用, 最後逐步形成概念域和概念系, 從而完整地掌握概念。

從學習機制方面看, 對於陳述性概念的學習, 其心理過程首先是刺激與反應的聯結。例如, 在學習弦切角概念時, 學生要將弦切角定義 (刺激) 與頭腦中的已有概念: 切線、割線、角、切點、圓周等個別概念聯結起來。其次, 在應用概念時, 又要經歷模式識別的認知加工環節, 逐步地掌握概念。對於運算性概念的學習, 其信息加工過程更顯複雜, 學習者要經過分析、綜合、推理等運算活動, 要內化程序性概念的運算程序, 掌握構造性概念的構造方法。由此可見, 數學概念學習不能單純用聯結學習理論或認知學習理論作出解釋, 而是一個兼有聯結和認知因素的複合過程。一般說來, 由於陳述性概念學習中其刺激與聯結的因素較多, 因而概念意象與眞實概念的差異較小, 教學中採用變式、反例強化等教學策略即可消除這種差異。對於運算性概念, 因爲學習要經過複雜的信息加工, 個體的主觀因素、加工方式和策略會直接影響加工水平, 所以概念意象與概念的眞實涵義之間可能會有較大的差異, 這種差異的消失會經歷一個較長的學習歷程, 逐步形成概念域和概念系之後, 才能準確理解概念, 同時使認知結構趨於完善。例如。複數有代數形式、三角形式、向量形式、指數形式, 可見“複數”這個概念的表述是複雜的, 學生只有形成了複數的概念域, 才能完整地理解複數概念。更深一層, 複數作爲數系中一員, 又與實數概念組成一個體系, 最終理解複數概念, 還必須形成複數的概念系。顯然, 這需要一個較長的學習過程。

綜上所述, 我們認爲, 數學概念的學習是一個包含聯結與認知因素的信息加工過程, 其過程是由概念形成、概念同化以及數學語言學習去獲取概念意象, 再經過知覺水平應用與思維水平應用, 逐步形成概念域和概念系。形成概念域和概念系是數學概念學習的一個本質特徵。

參考文獻

1. 唐瑞芬等編譯, 國際展望: 數學教育評價研究, 上海; 上海教育出版社, 1996年版。
2. 邵瑞珍主編, 教育心理學, 上海: 上海教育出版社, 1997年版。
3. 王甦、汪安聖, 認知心理學, 北京: 北京大學出版社, 1992年版。
4. 喻平, 數學概念學習芻議, 課程·教材·教法, 1995年第3期。
5. 美, J. M. 索里、C. W. 特爾福德、高覺敷等譯, 教育心理學, 北京: 人民教育出版社, 1983年版。
6. 莫雷, 論學習理論, 教育研究, 1996年第6期。
7. 喻平, 論數學命題學習, 數學教育學報, 8(4), 1999年。
8. E. D. Gagne, The Cognitive Psychology of school Learning, Printed in U. S. A, 1985.

9. D. Tall & S. Vinner Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, Educational Studied in Mathematics, 1981, 12.

—本文作者喻平任教於南京師範大學數學系及廣西師範大學數學教育研究所, 馬再鳴任教於西昌高等師範專科學校—