化簡到 Eureka

黃敏晃

§1. 什麼叫化簡?

「老爸, 幫個忙, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 怎麼化簡? 」十多年前女兒上國二時, 有天在我身旁寫數學習作, 問了我這個問題。我頭也沒抬, 一面繼續寫我的稿子, 一面說:「把分子和分母同時乘上 $\sqrt{2}$ 就好了。」我寫了幾個字後, 女兒遞了一張紙過來說:「是不是這樣? 」我瞄了一眼, 只見上面寫著如下的算式。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

我說:「對呀! 就是這樣。」女兒問:「這樣就已經化簡了嗎?」「沒錯, 把 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 化成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 是把分母變成有理數, 簡稱有理化分母。在數學裡, 這是個化簡的過程。你有什麼意見嗎?」女兒嘆了一口氣說:「我總覺得有點奇怪。因爲化簡在日常生活裡, 是要變簡單些。老爸, 化簡在數學裡, 意思是不是一樣? 」

我喜歡女兒向我提問題, 這使我有機會和她討論許多事情, 澄清一些複雜的觀念, 而在這樣的互動過程中, 又可以增進我們父女的感情。所以, 我放下了手頭的工作, 和她進行了如下的對話。

「在數學裡, 化簡的意思就是把代表一個數學物件的表徵, 如符號、表格、圖形或算式等, 變成比較簡單的樣子, 使我們能看得更清楚。譬如說, $\frac{54}{243}$ 可以透過約分的方法, 化成最簡分數的樣子 $\frac{2}{9}$; 又如 $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=1$ 也可以整個式子乘上各係數分母的最小公倍數後, 化簡成整數係數的方程式 $4x+3y=6$。」

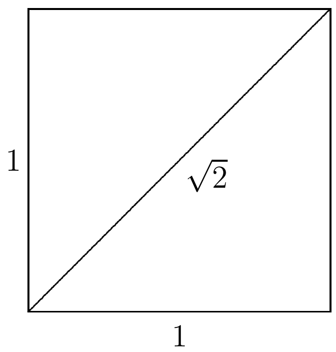
女兒一面聽我說, 一面在白紙上寫下我講的案例, 然後說:「我同意 $\frac{2}{9}$ 比 $\frac{54}{243}$ 淸楚, 也承認 $4x+3y=6$ 要比 $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=1$ 單純。但是, 並不見得 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 就比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 簡單。」「喔? 你爲什麼會覺得這樣呢?」「因爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都有 $\sqrt{2}$, 但前者另外的數字是 1, 後者則是 2, 1 比 2 簡單, 所以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 也比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 更簡。」

我說: 「原來你是這麼想的, 我知道了。讓我先去泡杯咖啡, 回來再和你討論。」一杯咖啡下肚之後, 使我腦筋清醒了不少, 我重新整理了我的思緒後說:「好, 讓我問你一個問題 ..., 這樣問好了, 當你看到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 這兩個符號的時候, 你怎樣註釋它們的意義? 」

§2. 符號的解讀

女兒皺起眉頭說:「我聽不懂你的問題。」

我進一步解釋:「一個數學符號通常會代表一個數學物件, 譬如說, $\sqrt{2}$ 這個符號, 按照古希臘數學界的傳統, 認爲它代表邊長爲 1 的正方形之對角線長 (我一面在紙上畫出如下的圖形)。現代數學界的習慣, 則喜歡用無限小數來表示 $\sqrt{2}$ 有多大。由於 $\sqrt{2}$ 是個無理數, 我們無法用小數完整完整地表達它。雖然如此, 還是可以寫出它的近似值 $\ldots$。」



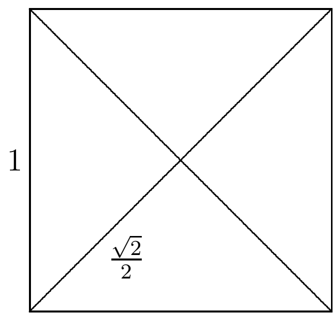
女兒搶話說:「我知道 $\sqrt{2}$ 的近似值是 $1.4142\ldots$。」「很好啊, 那麼 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 大概有多大呢? 它們用無限小數表達時, 近似值各是多少?」

她想了好一會兒然後說: 「我記得一個分數的值, 是用分母去除分子。譬如說, $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75$。」她一面說, 一面在紙上寫出上述的算式。她繼續用這種方式和我溝通, 一面寫一面說:「因此, $1/\sqrt{2} = 1 \div \sqrt{2} = 1 \div 1.4142\ldots$, 這個除法我不會做 $\ldots$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 = (1.4142\ldots) \div 2 = 0.7071\ldots$。咦, 這倒簡單, $\ldots$。所以, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 也等於 $0.7071\ldots$。」

我說:「所以,$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 這兩個符號, 哪一個比較容易解讀呢? 」她說:「$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 容易。」我說:「這就是化簡的意思, 把符號變化成容易解讀的樣子。」「原來如此, 我知道了。」說完她就想走開了。

我說:「等一下, 還沒結束。剛才我們談到古希臘人的傳統, 是用幾何的方式來表達。現在假設我給你一條長度是 1 的線段, 你能畫出長度分別是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的線段嗎? 」我在一張白紙上畫了一條線段, 並把這張紙推到女兒前面。

她在紙上隨手畫了個正方形, 它的一條對角線。想了想, 又畫出了另一條對角線, 如下圖。然後點了點頭說:「如果我用長度 1 的線段作邊, 畫一個正方形, 它的對角線就是 $\sqrt{2}$。我又知道, 一個正方形的兩條對角線相互垂直平分, 所以這樣我就得到 $\sqrt{2}$ 的一半長, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的線段了。



§3. 圖形的製作

我稱讚她:「好棒。」她大方地說:「謝謝。但是我畫不出長度爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的線段。我現在能體會爲什麼你們數學家會認爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 簡單了。」我說: 「你能把你所體會的道理說清楚, 講明白嗎? 」

她想了想說:「好, 我試試看。我本來從外表判斷 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 簡單, 但數學符號的意

思不能這樣解讀出來。要進一步去把它們代表什麼、或是有多大追問出來。剛才我們用兩種方式來追問 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的意義, 都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 更容易弄清楚。所以, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 更簡單。」

我說: 「很好。我們的討論就到此爲止, 我要回頭寫稿子了, 可以嗎?」女兒說:「我還想問一個問題。」「請說。」她問: 「如果已知長度爲 1 的線段, 怎樣畫出一條長度爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的線段? 」我說:「你應該也會畫的, 只是你沒聯想到而已。」「眞的嗎? 那該怎麼想? 趕快教我!」

我說:「好。如果你把 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 看成兩個線段相除, 或是兩條線段的比值, 其中一條線段長是 1, 另一條的長度是 $\sqrt{2}$, 就會比較容易。」她說:「線段長度的比? 那不就是比例線段了嗎?」「是呀! 想想看, 怎樣的線段會成比例?」

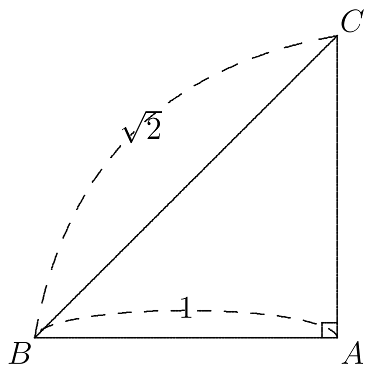
她想了想說: 「我記得相似形的對應邊成比例, 是不是有這樣的定理? 」我說:「沒錯, 有這樣的定理。就是要朝這方向想。」她想了好一會兒後搖搖頭說:「我還是不知道怎麼想. . .。」我說:「好, 你能把剛才提到的相似形定理, 在三角形的狀況下具體的說出來嗎? 」「你的意思是 . . .。」

我看她還不是很清楚, 只好進一步提示:「譬如說, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似, 其中 A 和 A', B 和 B', C 和 C' 互相對應, 則. . .。」「則 $AB : BC : CA = A'B' : B'C' : C'A'$。是不是這樣? 」「對了。但我們並不需要三條線段的連比, 只要兩條線段相比就夠了。」她說: 「那就 $AB : BC = A'B' : B'C'$, 可不可以? 」

我說:「可以。現在假設 $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 上面比例式等號的左邊的比值也就是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 了。」她說: 「對呀! 然後呢?」我說: 「因爲我們想要畫一條線段, 長度剛好是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 所以最好令上述比例式中的 $B'C' = 1$, 這樣 $A'B'$ 的長就會是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 了。」她在白紙上寫出如下的第一個算式。想了想, 再把它整理成第二個算式和第三個算式

$$\begin{aligned} \overline{AB} : \overline{BC} &= \overline{A'B'} : \overline{B'C'} \\ 1 : \sqrt{2} &= \quad x \quad : \ 1 \\ \therefore \ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

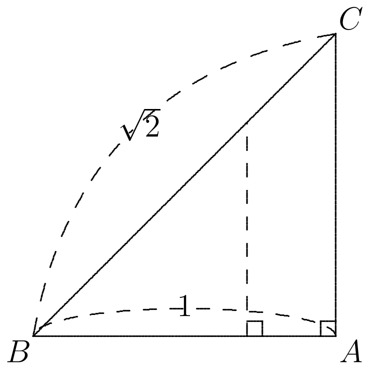
她很興奮地說:「沒錯, 這樣$A'B'$的長就是$\frac{1}{\sqrt{2}}$了。但這條線段在哪裡?」我說: 「我們現在來製造還來得及。」「怎麼製造?」「剛才不是有兩個三角形嗎? 其中 $\triangle ABC$ 的兩邊爲已知 $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 這樣的三角形畫得出來嗎?」她說:「這樣的三角形有很多, 最簡單的是直角等腰三角形。它的股長是 1, 斜邊長是 $\sqrt{2}$ 。」她一面說, 一面在白紙上畫出如下的圖形。



Eureka! Eureka!

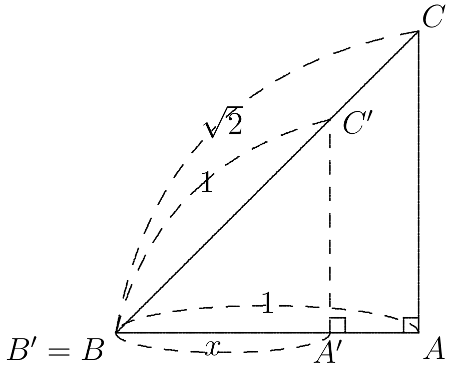
我說:「現在, 我們要畫另一個$\triangle A'B'C'$, 它要和 $\triangle ABC$ 相似, 因此, 也是一個直角

等腰三角形。其中 $A'B'$ 是股, $B'C'$ 則是斜邊, 斜邊長是 1。你會畫嗎?」她在這張紙上比畫了很久, 然後說:「有好幾種畫法耶。」我說:「沒關係, 挑一個畫出來就好了。」於是她畫了如下的圖形。



她解釋說:「$\triangle A'B'C'$ 的斜邊長只有1, 所以比 $\triangle ABC$ 要小。我本來想在 $\triangle ABC$ 旁邊, 另外畫一個小一點的等腰直角三角形。後來一想, 在原來 $\triangle ABC$ 中畫一條和邊平行的線段, 就會得到較小的相似三角形。你認為這樣可以嗎?」

我說:「很好哇。現在那個頂點是 A' 點? 那點是 B' 點? 那點是 C' 點? 並請在圖上加上 $A'C'=1$, $A'B'=x$ 的說明。」她在右圖上加上如下右圖中的註記, 然後搖頭, 大聲地對我說:「我知道了! 我知道了! x 的長度就是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。」



我提醒她說:「古希臘人的傳統是喊 Eureka! Eureka!」她好奇地問:「Eureka 是什麼意思? 這個傳統又是怎麼來的?」

我說: 「你聽過古希臘大數學家阿基米得的故事嗎?」她說:「好像聽過, 是不是那位說出 "給我一個立足點, 我就可以挑起地球" 的人?」我說:「是呀! 就是他。」「他在哪個故事裡喊 Eureka! Eureka!」

我說: 「他是古希臘人的殖民地 Syracuse 島 (此島在義大利南端) 上的居民, 他和該島的國王 (古希臘人是城邦政治, 一個城幾乎就是一個國家) 很要好。有次, 國王找個金匠, 要打造一個純金的皇冠。做成之後, 國王請阿基米得檢驗是否為純金造成? 阿基米得想了很久都想不出要怎樣檢驗。有天他在洗澡的時候, 突然想通怎麼檢查, 興奮得從浴缸裡跳出來, 來不及穿衣服就裸體跑到街上, 奔跑往皇宮, 嘴裡大喊 "Eureka! Eureka!" 意思是我找到了! 我知道了!」

女兒說:「原來如此。我願意喊 Eureka! Eureka! 但不想裸奔!」

—本文作者為國立台灣大學數學系退休教授—