射影平面六講 — 第六講

王九逵

本講不再講射影幾何, 而講 Riemann 的非歐幾何。

在歐氏的≪幾何原本≫書中, 第五公設 — 即後來所稱的平行公理, 敍述爲:

> 若一直線和另二直線相交, 其一側之二內角和小於二直角時, 將該二直線不斷延長, 終將在內角和小於二直角之一側相交。

這公理後來被 Playfair 改述如下:

> 在平面上過線外一點, 可作且僅可作一條直線, 和所與之直線不相交。

原形式的平行公理不和書的開端的前四個公設並列, 而出現在 28 個命題之後, 這使世人懷疑歐氏本人原來也想證明這公理, 但在證明不出又不得不列入的情況下, 迫於無奈, 才產生了這出場較遲, 敍述較繁的第五公設。

文藝復興以後, 大家又恢復了研究幾何的興趣, 於是很多人試圖著證明平行公理。證法之一便是歸謬法: 假定平行公理不成立, 想找出矛盾。若採用 Playfair 公理 的形式, 否定平行公理不成立, 便是做以下兩個假定之一:

- 過線外一點, 至少可做兩條不同的直線, 和所與之直線不相交。
- 過線外一點, 做任意一條直線, 都會和所與之直線相交。

從前一種假定出發, 無法得到矛盾, 而經 Bolyai 和 Lobachevsky 的推演, 產生了一種新的幾何, 即所謂雙曲型的非歐幾何。這種幾何我們在此不詳細討論。若從後一種假定出發, 會得到一些奇怪的現象: 1. 從一點出發, 沿一直線向前進行, 經過一定長度後, 會回到出發點。2. 在一直線上的任意三點, 每點都在另外兩點的中間。Bolyai 和 Lobachevsky 等初期的非歐幾何學家, 認爲這些已經構成矛盾, 而不繼續討論下去了。但 Riemann 接受了這些現象, 不但建立了一套新的非歐幾何, 即所謂橢圓型的非歐幾何, 並且繼續鑽研, 創立 Riemann 計量 (Riemannian metric) 的觀念, 奠定近代微分幾何學中 Riemann 流形理論的基礎。

在第一講中我們曾提過: 射影平面 $\mathbb{P}$ 可以看成球面, 但把對蹠點看成等同。若用 Σ

表球面, 用 $\varpi : \Sigma \to \mathbb{P}$ 表等同對蹠點的對應, 則 ϖ 是一個二對一的對應。以下我們談 $\mathbb{P}$ 時恆採用這種看法。把 $\mathbb{P}$ 中曲線的長想成對應半球中曲線的長。在以下的討論中, 我們對 $\mathbb{P}$ 採用這種弧長的看法, 便稱它爲 橢圓型平面 (plane of the elliptic type)。

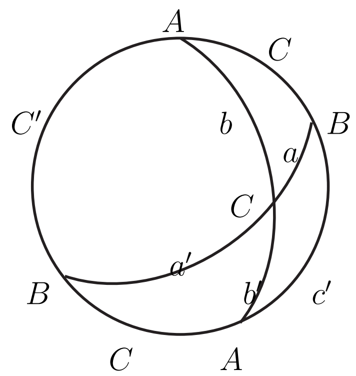
在一球上通過球心的平面和球面的交界叫作球的 大圓 (great circle)。在球面上取不是對蹠點的兩點。則有唯一的大圓通過這兩點, 這兩點將大圓分成兩個弧, 而在球面上連接兩點的曲線中, 弧長最短的便是這兩個弧中較短的一個, 而這較短的弧落在一個半球之中。這件事的證明要利用變分法, 我們不加詳論。因此我們可以把 Σ 中大圓在 ϖ 對應下的像稱爲 $\mathbb{P}$ 中的 直線。值得注意的是這樣定義的直線和射影幾何中所談的直線完全相同。用這種看法, 上述關於橢圓型非歐幾何的種種事實都顯得明顯了。因爲任意球面三角形都落在一個半球之內, 所以古典球面三角的種種結果都可以看成橢圓型非歐幾何的結果。

古典的球面三角在天文學和航海學上曾有很大的應用, 現在更用在大地測量上面。除了這些實務上的應用以外, 我們又看到它用到非歐幾何上。所以可以說它在純數學上也有應用。

對於這些結果, 讀者可以參看任何一本球面三角的書, 但須做適當的解釋, 使成爲橢圓型非歐幾何的結果。以下我們僅選擇一個簡單的結果, 當作例子。

在 $\mathbb{P}$ 中兩條直線把 $\mathbb{P}$ 分成兩個區域, 其頂角互爲補角。這樣的一個區域叫作一個 月形 (lune)。因爲兩個月形的總面積爲整個 $\mathbb{P}$ 即半球的面積, 所以等於 $2\pi R^2$, 其中 R 是球的半徑, 也叫 $\mathbb{P}$ 的曲率半徑 (radius of curvature)。又因月形的面積和頂角 (即兩邊所在平面形成的二面角) A 成比例, 而當 $A = \pi$ 時面積爲半球的面積 $2\pi R^2$, 所以對任意頂角 A, 月形的面積等於

$$\frac{A}{\pi} \cdot 2\pi R^2 = 2AR^2.$$



圖一

在 $\mathbb{P}$ 中, 一直線上相異兩點是兩個不同線段的邊界。設 A, B, C 爲 $\mathbb{P}$ 中的三點, 令 a 和 a' 爲以 B 和 C 爲端點的二線段, b 和 b' 爲以 C 和 A 爲端點的二線段, c 和 c' 爲以 A 和 B 爲端點的二線段, 其中 a, b 和 c 圍成一個三角形 $\triangle abc$。則以 A, B 和 C 爲頂點的三角形除 $\triangle abc$ 外還有 $\triangle ab'c'$, $\triangle a'bc'$ 和 $\triangle a'b'c$ 三個。從圖一可以看出這四個三角形填滿了平面 $\mathbb{P}$。

另一方面以 A (和其對蹠點) 爲頂點包含 a 邊的月形爲 $\triangle abc$ 和 $\triangle ab'c'$ 的聯集, 以 B 爲頂點包含 b 邊的月形爲 $\triangle abc$ 和 $\triangle a'bc'$ 的聯集, 這兩個月形在圖一中都已明

顯地繪出。同理, 以 C 爲頂點包含 c 邊的月形爲 $\triangle abc$ 和 $\triangle a'b'c$ 的聯集。在圖一中我們要把 $\triangle a'b'c$ 想成繪出的三角形的對蹠點的集合。這三個月形的面積分別爲 $2AR^2$, $2BR^2$ 和 $2CR^2$。在 $\mathbb{P}$ 中這三個月形覆蓋了 $\triangle abc$ 三次, 而其餘的點每點都只被覆蓋一次。所以我們得到了公式 $(2A+2B+2C)R^2 = 2\pi R^2 + 2\triangle abc$, 即

$$\triangle abc = (A+B+C-\pi)R^2.$$

如是我們證明了下定理:

定理: $\mathbb{P}$ 中三角形三內角的和必大於 π, 其多出的部分和曲率半徑的平方相乘便是三角形的面積。

三角形三角的和超過 π 的量叫這三角形的 球面角盈 (spherical excess)。這個量在球面三角中極為有用。

参考文獻

1. 趙文敏: 幾何學概論, 九章, 1993.
2. H. S. M. Coxeter: *The real projective plane*, 2nd Ed. Cambridge University Press, 1960.
3. W. Meyer: *Geometry and Its Applications*, Academic Press, 1999.
4. O. Schreier and E. Sperner: *Projective geometry of n dimensions*, Chelsea, 1985.
5. A. Seidenberg: *Lectures in projective geometry*, van Nostrand, 1962.

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—