算幾不等式面面觀

張鎮華

1. 緣起

算幾不等式緣自「所有周長相同的矩形中, 正方形的面積最大」, 正式的寫出來是:

定理 1: 設 a 與 b 是正數, 則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 且等號在 $a=b$ 時才成立。

這個事實的證明, 可以由配方法輕易得到,

也就是說

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

而且等號成立時, 一定要有 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ 也就是 $a=b$。

這樣的結果, 很快的可以推展到 n 個正實數的情況:

定理 2 (算幾不等式): 設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正數, 則 $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, 而且等號在 $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ 時才成立。

在高中的數學教材裡, 算幾不等式是一個重頭戲, 它可以用來推導各式各樣的不等式。而坊間可以看到有關定理 2 的證明, 亦極有趣, 須一點巧思, 並非第一念就能想像得到。這篇短文的目的, 是要介紹另外的證明方式, 以供高中老師及各界同好參考。

2. 算幾不等式的第一種證明方法

算幾不等式從定理 1 推展到定理 2 的直覺是利用數學歸納法, 到底要如何歸納, 卻有一點學問。首先, 來看看第一個最直接的做法, 就是由 $n=2$ (就是定理 1) 去證明 $n=4$ 的情形, 如下所示:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}) \\
&\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}} \\
&= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.
\end{aligned}$$

以此類推 (或者嚴格來說, 用數學歸納法), 可以得到 $n = 8, 16, \ldots, 2^m, \ldots$ 的情況, 但遺憾的是, 其他種類的n, 如 $3, 5, 6, 7, \ldots$ 等等, 卻不能用上述的方法證得。一般常見到的證明, 利用到「倒回式」的證法, 也就是說, 當

n 不是 2^m 的形式時, 令正整數 k 及 m 滿足 $n+k=2^m$, 再取 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+k}=A$, 其中 $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 利用 $n+k=2^m$ 項的算幾不等式, 知道

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}}{n+k} \geq \sqrt[n+k]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots a_{n+k}},$$

而且等號在 $a_1=a_2=\cdots=a_n(=a_{n+1}=\cdots=a_{n+k})$ 時才成立。但是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}}{n+k} = \frac{nA+kA}{n+k}=A,$$

所以

$$\begin{aligned} A^{n+k} &\geq a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots a_{n+k} \\ &= a_1a_2\cdots a_nA^k, \end{aligned}$$

也就是$A^n\geq a_1a_2\cdots a_n$, 因此 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 而且等號在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 時才成立。

以上, 將 n 項擴充成 2^m 項的做法, 實在是一大巧思, 一般眞的不容易想像, 我們來看看, 是不是有其他的法子可以替代。

3. 第二種證法

讓我們來考慮另外一種證法, 它的內涵基本上還是上述的精神, 只是現在我們將數學歸納法的過程寫出來, 並將「倒回式」的證明, 都化成「向前式」。

首先, 定理2對$n=1$顯然成立。假設定理2對所有 $n'<n$ 均成立, 且 $n\geq 2$, 此時設 $m=\lceil\frac{n}{2}\rceil$, 當 n 爲奇數 (也就是 $2m=n+1$) 時, 並設 $a_{2m}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。因爲 $m<n$, 由歸納法假設可知

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geq\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m},$$

而且等號在 $a_1=\cdots=a_m$ 時才成立; 及 $\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m}\geq\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}}$, 而且等號在 $a_{m+1}=\cdots=a_{2m}$ 時才成立。因此, 由上面兩個不等式及定理1可得

$$\begin{aligned} &\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2m}}{2m} \\ &\geq\frac{\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}}}{2} \\ &\geq\sqrt{\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}}} \\ &=\sqrt[2m]{a_1a_2\cdots a_{2m}}, \end{aligned}$$

而且等號在 $a_1=\cdots=a_m=a_{m+1}=\cdots=a_{2m}$ 時才成立。

當 n 爲偶數時, $2m=n$, 上面的結果也就是算幾不等式定理。當 n 爲奇數時, $2m=n+1$, 此時

$$\begin{aligned} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2m}}{2m} &= \frac{na_{2m}+a_{2m}}{2m} \\ &= a_{2m}, \end{aligned}$$

所以 $(a_{2m})^{2m}\geq a_1a_2\cdots a_na_{2m}$, 也就是 $(a_{2m})^n\geq a_1a_2\cdots a_n$, 因而得到 $\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n}=a_{2m}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$。由數學歸納法, 定理2得證。

4. 再來一種證法

上面的歸納法雖然避開了由大的 n' 返回證小的 n 的做法, 但其精神卻仍類似。我們最後要提出來的一種做法, 是要從原來定理1的精神談起。

再回到「同周長的矩形以正方形面積最小」的起點, 這一命題, 可以如定理1的證明, 其實也可以講得更精確一點, 得到「同周長的矩形, 兩邊的差距越小, 其面積越大」, 特別是兩邊的差距到最小可能的要求, 自然是面積最大的正方形。我們就是要用這種想法來證明算幾不等式, 首先討論:

引理: 假設 a 與 b 是正數, 且 $b-a>\varepsilon>0$, 則$(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)>ab$。

證: 利用 $(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)-ab=(b-a-\varepsilon)\varepsilon>0$, 可以知道 $(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)>ab$。

在前面的引理裏, 如果我們取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$, 就可以得到定理1的特例。現在, 我們就利用前面的引理來證明定理2。

首先設 $A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, 用 k 表示和 A 相異的 a_i 的個數, 很容易可以看到 $k=0$ 或 $2\le k\le n$, 特別是 $k\ne 0$ 時, 一定存在 $a_i<A<a_j$。我們將在 k 上做數學歸納法。

$k=0$ 時, 定理2顯然成立。假設定理2對 $k'<k$ 成立, 考慮 $k\ge 2$ 的情況, 此時, 取 $a_i<A<a_j$。令 $\varepsilon=a_j-A$, 則 $a_j-a_i>\varepsilon>0$, 由前面的引理得知 $(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)>a_ia_j$, 注意, 其中 $a_j-\varepsilon=A$。將 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 中的 a_i 和 a_j 分別換成 $a_i+\varepsilon$ 及 $a_j-\varepsilon$, 得到 $(a_1',a_2',\ldots,a_n')$, 則其所對應的 $A'=\frac{a_1'+a_2'+\ldots+a_n'}{n}=A$, 而且 $k'<k$。由歸納法假設可知 $A=A'\ge\sqrt[n]{a_1'a_2'\ldots a_n'}$, 但因爲 $a_i'a_j'>a_ia_j$, 所以 $A>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, 也就是定理2的敍述成立。所以由數學歸納法證得定理2。

5. 後記

我們非常感謝審查委員提供十分詳細的修改意見, 避免了許多錯誤和生硬的文辭。他並指出, 第2節的證法, 根據楊維哲教授的說法, 是 Cauchy 的巧思; 而第4節所提的方法, 其實在 Polya [7]著書第 VIII 章習題25(第135至136頁) 曾提及, 詳解在第247頁, 這本書已有中譯本 [1]。爲求更深入瞭解, 我們查閱了一些資料 [3, 4, 5, 6]; 其中 [3, 6]是專門寫給高中生看的, [3]採用的證明方法就是 Cauchy 的方法, 而 [6]則採用第4節的方法; Hardy, Littlewood和 Polya [5]提供了數種方法; Beckenback和 Bellman [4]更一口氣列出十二種解法。

參考文獻

1. 田成俠譯, 數學與逼眞推理上册 (數學上歸納法與類推之應用), 徐氏基金會出版, 民國五十九年。
2. 田成俠譯, 數學與逼眞推理下册 (逼眞推論之模式), 徐氏基金會出版, 民國五十九年。
3. E. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities, 13rd printing, The Mathematical Association of America, 1961.
4. E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities, 4th printing, Springer-Verlag, 1983.
5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, 1952.
6. N. D. Kazarinoff, Geometric Inequalities, 1st printing, Random House, 1961.

7. G. Polya, Induction and Analogy in Mathematics (Volume I of Mathematics and Plausible Reasoning), Oxford University Press, 1954.
8. G. Polya, Patterns of Plausible Inference (Volume II of Mathematics and Plausible Reasoning), Oxford University Press, 1954.

—本文作者任教於國立台灣大學應用數學系—