結 (5)

Louis H. Kauffman 著　謝春忠 譯

第九節 結的振幅

在上一節結尾我們說量子力學與拓樸的密切關連, 源於 Dirac 記號的發揚光大。

首先, 想像一個圓圈置於 $x-t$ 平面上, 如圖四十四所示。我們用 t 代表時間, x 代表空間。這個圓圈代表從眞空到眞空的程序, 包含了二個粒子的創生 (如圖四十五) 及其後來的消滅 (如圖四十六)。

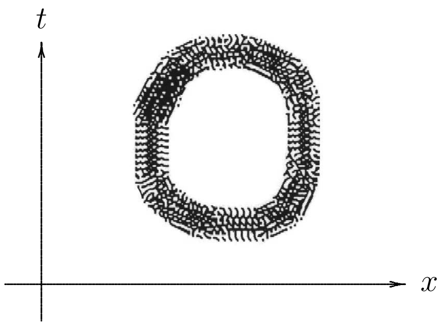

圖 四十四

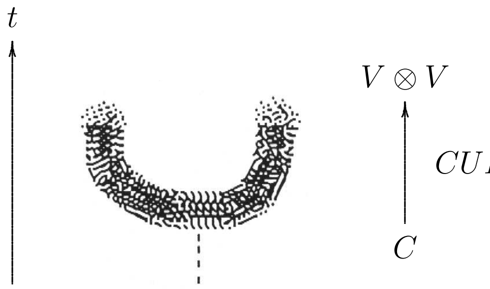

圖 四十五

仿照前面的討論, 我們把完整的圓圈分成二部分, 下半圈 — 創生狀態 (creation) a, 及上半圈 — 消滅狀態 (annihilation) b, 並考慮其間的振幅 $<a|b>$。有點不同於前的是, 不論是創生或消滅狀態, 都是具有二端點的線段, 所以自然地, 我們用一個抽象向量空間的張量積 (tensor product)

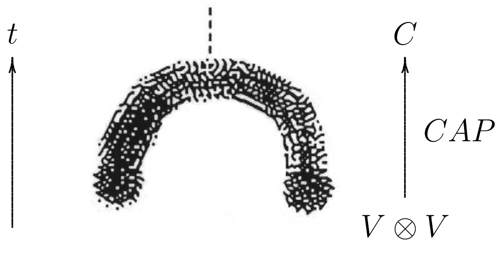

圖 四十六

$V\otimes V$ 來表示創生狀態的集合, 同理 $V^*\otimes V^*$ 表所有消滅狀態所成的集合。

用此方式, 我們的數學符號 cup (杯) 乃是創生左括, cap (帽) 乃是消滅右括, $cup=$

$< a| : \mathbb{C} \longrightarrow V \otimes V$, 而消滅右括, $cap = |b>: V \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$。

當我們體認到平面上複雜的簡單封閉曲線 (simple closed curve) — 即不自交的平滑曲線, 經過簡單的, 局部的擾動, 總可將這個曲線分解成幾個極大 (帽), 極小 (杯), 這時拓撲出現了。我們想算相對應於此曲線的振幅: 就是由眞空狀態 (vacuum state) 經過多次創生, 消滅而終至眞空狀態的振幅。

從任一個簡單封閉曲線, 可求算出一個振幅。但注意到由 Jordan 曲線定理, 任一簡單封閉曲線都可同位 (isotopic) 成標準的圓圈 (circle)。若我們想求算的振幅是一種拓樸振幅 (topological amplitude), 則任何簡單封閉曲線算出的振幅都該相等。那麼, 是怎樣的創生、消滅算子可以保證拓樸不變性? 答案關鍵在於: 任何簡單封閉曲線的同位 (isotopy) 都是由相鄰極大 (帽) 與極小 (杯) 相消而成, 如圖四十七所示 — 讀者可試證之。

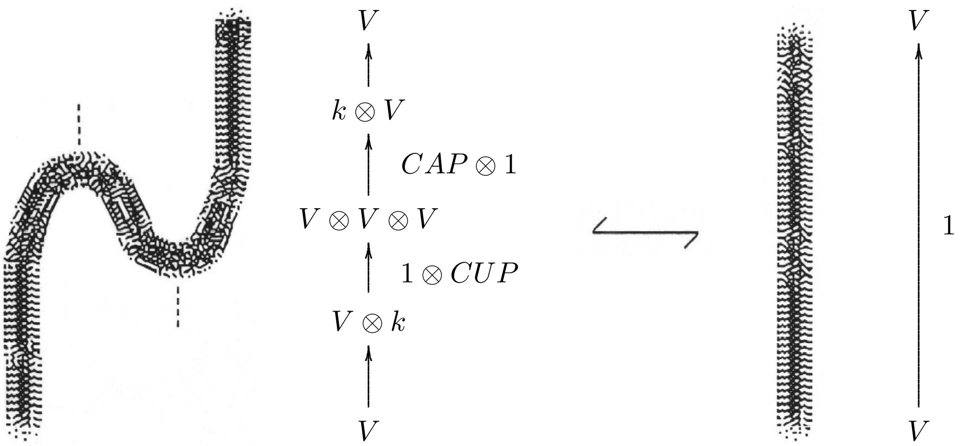

圖 四十七

我們需要下面幾個明顯的認同運算 (identification) :

$V \otimes (V \otimes V) \cong (V \otimes V) \otimes V, \quad a \otimes (b \otimes c) \longmapsto (a \otimes b) \otimes c,$ 其中 a, b, c 皆在 V 中,

$V \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes V \cong V, \quad a \otimes z \longmapsto z \otimes a \longmapsto za,$ 其中 $z \in \mathbb{C}$ 且 $a \in V$.

我們再看看圖四十七的左圖: $V \cong V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{1 \otimes cup} V \otimes (V \otimes V) \xrightarrow{\approx} (V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{cap \otimes 1} \mathbb{C} \otimes V \xrightarrow{\approx} V$。但圖四十七之右圖是 V 到 V 的等同運算 (identity mapping)。所以若我們要求拓樸不變性, 即等價於要求左圖的運算合成 (composition) 是等同運算。

現在用向量基底來重新看看上述的拓樸不變性。設 $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ 爲 V 的一基底並有 $\{e^{ij} = e^i \otimes e^j\}$ 爲 $V \otimes V$ 的一組基底。再重新檢視前面的 cup (杯) 及 cap (帽): $cup(1) = \sum_{i,j} M_{ij} e^{ij}$ 及 $cap(e^{ij}) = M^{ij}$, 其中 $cup(1)$ 中的作和, 乃是對所有可能足標作和。所以標準

圓圈的振幅是: $cap[cup(1)] = cap[\sum_{ij} M_{ij}e^{ij}] = \sum_{i,j} M_{ij}M^{ij}$, 對一般的簡單封閉曲線, 亦是如此, 以 $\{M_{ij}\}$ 代替 cup, 以 $\{M^{ij}\}$ 代替 cap, 然後對所有重覆足標作和以求其振幅。

我們發現我們前面所要求的拓樸條件就是 (M_{ij}) 及 (M^{ij}) 這二個矩陣互為反矩陣, 也就是 $\sum_i M_{ai}M^{ib} = \delta_a^b$ 及 $\sum_i M^{ai}M_{ib} = \delta_b^a$。如圖四十八所示。所以對於簡單封閉曲線其拓樸振幅是否存在的問題就輕易解決了。

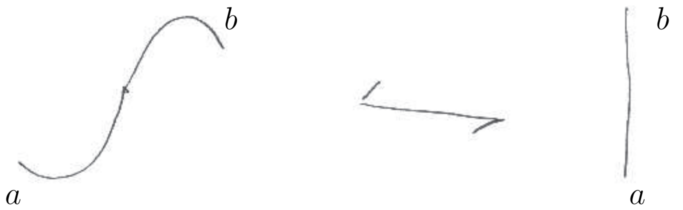

圖 四十八

現在我們看看更複雜的結與鏈結。簡單的討論即可看出任何結或鏈結都可置於如圖四十九所示的平面圖 (regular diagram)。此種平面圖總可分解成幾個極小 (創生或 cup), 幾個極大 (消滅或 cap) 和二種形式的跨越 (crossing) 如圖四十九右圖所示 (在此我所考慮的結或鏈結都沒有定向 (oriented), 它們都不具內在的行進方向)。注意, 圖五十及圖四十九右圖, 我們用代數符號來表示不同的跨越 (crossing), 並由 Reidemeister 第二形變, 馬上看出: 若圖四十九右上圖的代數符號是 R, 則圖四十九右下圖的代數符號是 R^{-1}, 而 R 與 R^{-1} 都是 $V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ 的線性映射。為方便計, 我們用 $\overline{R}$ 表示 R^{-1}。

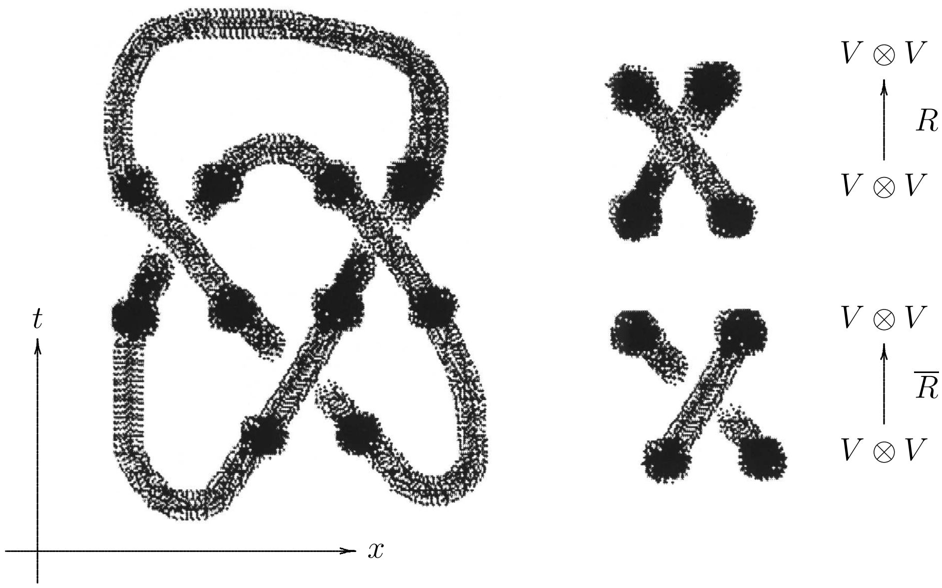

圖 四十九

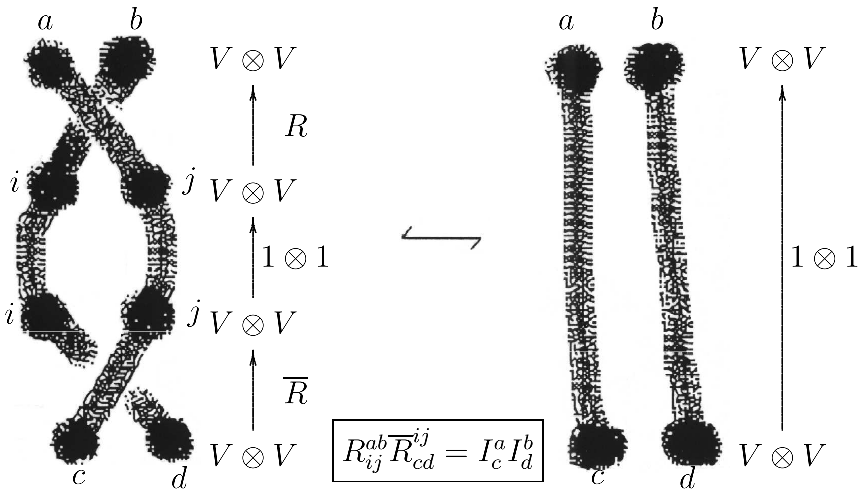

圖 五十

現在我們共有代數符號: *cup*, *cap*, R 與 R^{-1}。且任何複雜的結或鏈結都可以分解成上述代數符號的合成(composition)。所以一組這樣的合成決定了結或鏈結的振幅。因此, 要求振幅是拓樸不變的, 就等價於: 要求振幅不因圖五十一的各種形變而改變, 注意到, 圖五十一的形變乃是 Reidemeister 形變的一些簡單補充 (見第二節圖四) — 這是由於, 我們的平面圖是根據時間 t-軸而作適當安排的。我們稱圖五十一所列的形變爲正則同位 (regular isotopy), 它比所謂的周遭同位 (ambient isotopy) 少一個形變, 少的即是芮氏第一形變 (Reidemeister first move)。

利用 Reidemeister 第一形變, 我們可以增加或減少鏈結的自扭 (curl)。而鏈結 K_1, K_2 是周遭同位 (ambient isotopy) 是指鏈結 K_1 可經由一組連續變化的空間嵌入 (embedding in $\mathbb{R}^3$) 變化到鏈結 K_2。而 Reidemeister 形變定理即是說: 鏈結 K_1 與 K_2 是周遭同位的 (ambient isotopy) 若且唯若我們可利用 Reidemeister 三種形變從 K_1 形變成 K_2。

讓我們暫時忘掉 Reidemeister 第一形變, 只考慮正則同位 (regular isotopy)。我們的目標是希望研究帶框架的鏈結 (framed links), 也就是具有單位法向量場的鏈結, 另一個等價的說法就是具有寬度的帶子。事實上, 從物理或從數學觀點來看, 研究帶框架的鏈結 (framed links) 及正則同位是很自然的, 而且通常正則同位不變量經由正規化 (normalize) 後都可得到一個周遭同位的不變量, 這在第五節括號多項式中已討論過這個現象。

至此, 我們已討論過芮氏第零形變及芮氏第二形變的代數意義。其他形變亦有深刻的代數意義。例如, Reidemeister 第三形變在代數語言下, 就是有名的 Yang-Baxter 方程 [8]。Yang-Baxter 方程首次出現於統計物理中的完全可積模型 (exactly solved model), 是二十世紀物理重大發現之一。更甚者, 若全部 Reidemeister 形變一起考慮, 我們自自然然地需要作擬三角

Hopf 代數 (quasi-triangular Hopf algebra) 的研究。在此我們不擬深入此專題。有興趣讀者, 可參閱 [8]。

0.

2.

3.

4.

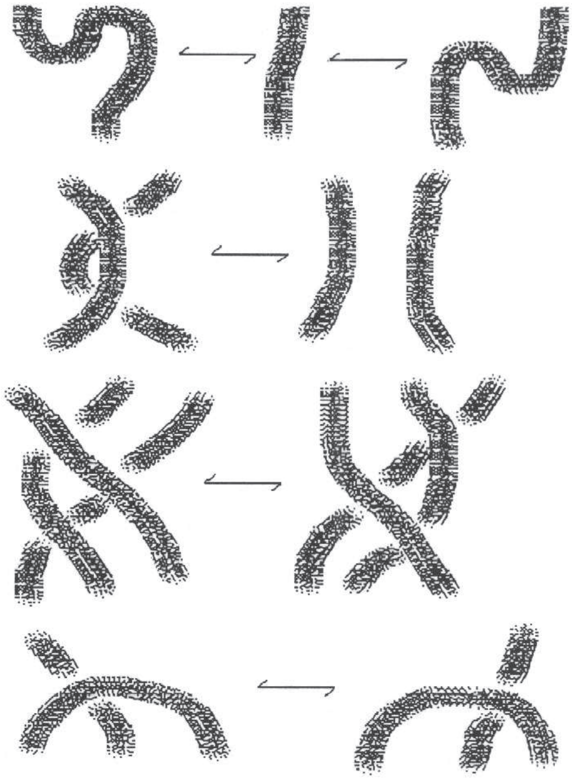

圖 五十一

如同我們在前面以向量空間之間的映射與鏈結線圖所描述的, 鏈結的不變量與量子力學的廣義振幅關連密切。如此建構不變量的策略正是由量子力學中振幅的觀念所啓發。事實上經由這個方法 (亦即有限維的矩陣與帽 (caps), 杯 (cups), 跨越 (crossings) 相對應) 所得的不變量是難以想像的豐富。它們包含了所有已知的多項式形式的不變量 (亞歷山大多項式, 鍾氏多項式及其推廣)。

現在讓我們以矩陣來說明, 如何經由將括號多項式視爲振幅來建構鍾氏多項式, 我們令 cup 與 cap 具有相同矩陣, $(M_{ij}) = (M^{ij}) = M$, 其中 M 是 2×2 矩陣, 形如

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}A \\ -\sqrt{-1}A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

注意到 $M^2 = I$, 是等同矩陣。更注意到圓圈的振幅是 $\sum_{ij} M_{ij}M^{ij} = \sum_{ij}(M_{ij})^2 = -A^2 - A^{-2}$。

且 R 矩陣爲下式所定義:

$$R^{ab}_{cd} = A\ (M \otimes M)^{ab}_{cd} + A^{-1}(I \otimes I)^{ab}_{cd}.$$

我們圖示上式等式如下: $= A \asymp + A^{-1})($ 。再者, 我們知道標準圓圈所對應的振幅是 $-A^2 - A^{-2}$。這些方程可以視爲計算振幅的一種遞迴算法。這種算法是求算鍾氏多項式的括號狀態模型[9], 如同我們在第五節所討論的, 這種模型本身就是值得探究的對象。

第十節 拓樸量子場論 — 初步

爲了說淸拓樸與 Dirac 符號的關係, 我們考慮下面的情境。若 M 是一個三維流形 — 即局部來說 M 是三維的歐氏空間。假若 M 中有一封閉 (closed) 曲面 F 將 M 分割成二塊 M_1, 及 M_2, 這二塊都是有界的三維流形, 在 F 交會。現在考慮振幅 $Z(M) =< M_1|M_2 >$, 此種形式的振幅乃是推廣前面所說的振幅, 此時曲面 F 扮演分隔起始狀態 M_1 與終止狀態 M_2 的介面角色。而 Dirac 振幅 $< a|b >$中的抽象分隔線被活生生的分隔曲面 F 所取代, 如果 $Z(M)$ 眞是一個拓樸不變量, 我們稱 $Z(M) =< M_1|M_2 >$ 是 M 的一個拓樸振幅, 而拓樸振幅是與分割 M 的曲面 F 的選取無關的。

從物理觀點來看, 拓樸振幅與分隔曲面之選取無關是最重要的性質。如是則分隔曲面之一邊 (如上述 M_1) 如同被觀察者 (the observed), 而曲面之另一邊 (如上述 M_2) 則如同觀察者 (the observer)。若拓樸振幅果眞是反應出這個三維流形的物理 (或拓樸) 性質, 則它不應該與如何將整個流形區分成觀察者及被觀察者有關。同樣的註解也可用於研究衆所矚目的四維流形及廣義相對論上。振幅與產生振幅的分隔無關這個觀念是在拓樸之先, 而拓樸不變量是一個方便而又基本的方式導出這種不相關性。

在數學物理領域中, 我們同樣也可察覺出拓樸振幅的概念。如 E. Witten 提出 [7]: 以廣義的 Feynman 積分導出一類三維流形拓樸不變量的公式。若 M 是無邊界的三維流形, 而 A 是 M 上的一個連絡 (connection) 或又稱規範場 (gauge field) 或規範勢 (gauge potential), 則我們定義 Feynman 積分

$$Z(M) = \int dA \cdot \exp\left(\frac{ik}{4\pi} S(M, A)\right)。$$

其中連絡 A 是一個取値於一個給定李代數的 1-微分式 (1-form), 而 $S(M, A)$ 是 Chern-Simons Lagrangian — 詳言之, $S(M, A)$ 就是 trace$(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$ 沿著 M 作積分求得的值。取代傳統 Feynman 積分中對所有的路徑積分, $Z(M)$ 的積分範圍是所有規範同價類 (gauge equivalent class) 所成的集合, 像這種由路徑推廣到規範場的作法是量子場論的一個特

徵。量子場論是爲了達到電磁量子化而設計的。在量子電動力學 (quantum electrodynamics) 中傳統的對象是電磁場。在這個領域裡主要的問題就是求得由一個場位 (field configuration) 到另一個場位, 起始與終止間振幅的值。類似於從 a 點到 b點間所有的路徑的: 就是從場 A 到場 B 的所有規範場。Witten 的積分 $Z(M)$ 從形式上看是一個典型的量子場論積分, 但其內涵卻極其特殊, 這個積分的形式及其內在的邏輯, 顯示存在有一大類三維流形的拓樸不變量, 以及這些流形上結與鏈結的不變量。

正當 E. Witten 用 Feynman 積分來算三維拓樸不變量的同時, Reshetikhin-Turaev [6] 也提出一種組合性的看法。Reshetikhin-Turaev 看法頗類似本文第五節的括號多項式的探討。令人驚奇的是, Witten 的定義似乎也導出與 Reshetikhin-Turaev 相同的不變量, 我們不擬在此對這二種方法所得的不變量做一一對應。值得一提的是, 當 k 很大時, Witten 積分可用無曲的連絡 (flat connections) 的計算來逼近。在這裡, 無曲的連絡 A_0 指的是: $S(M,A)$ 的臨界點 (critical point) — 意即

$$\frac{\delta}{\delta A}S(M,A)\bigg|_{A_0}=0 \text{ 。}$$

在很多例子中, 我們可同時計算 Witten 積分及作 Reshetikhin-Turaev 組合性的探討, 並得出同樣結果 [3], [5]。這是張衆人期待, 最終 Feynman 積分形式會得到驗證的大拼圖 (puzzle) 中, 諸多證據之一。

爲了由 Witten 的積分得到結與鏈結的不變量, 我們再多加點釀造的工具, 這個新工具就是 Wilson 圈 (Wilson loop)。Wilson 圈是先沿著一給定鏈結 K 作連絡 A 的線積分, 取 exponential 值再取 trace, 所以 Wilson 圈是李群上在特定表示 (representation) 下元素的 trace — 記爲: $tr\circ$pexp $(\int_K A)$。其中, 因爲我們的李代數是不可換的, 所以作路徑積分時, 必須尊重鏈結 K 的次序, 因此用 pexp 表示路徑有序積分 (path ordered integration), 也就是說我們對以矩陣爲值的函數積分並取指數, 但要注意運算的次序。tr 表示在某特定表示下取 trace。

借助結與鏈結上的 Wilson 圈函數 (Wilson loop function), Witten [7] 寫下三維流形 M 上鏈結不變量的泛函積分 (functional integral)

$$Z(M,K)=\int dA\cdot\exp\left(\frac{ik}{4\pi}S(M,A)\right)\cdot tr\left[\mathrm{pexp}(\int_K A)\right]$$

$S(M,A)$ 就是前面提到的 Chern-Simons Lagrangian。

如果我們取 $SU(2)$ 的標準表示 (Standard representation) 來計算 Witten 積分, 一番計算後, 我們發現: $Z(S^3,K)$ 可導出 Jones 多項式和在第四節中所描述之基本性質 (這

裡 S^3 是三維球)。讀者可參考 [7] 或 [4], 這種探討鏈結不變量的方式跨越了不同方法的界限, $Z(S^3, K)$ 與 Vassiliev 所定義的不變量有密切的關聯, 見 [1], [4], 這只不過是複雜的水晶球體上的一面罷了。

鏈結和 Wilson 圈 (links and Wilson loops)

現在我們分析 Witten 積分在結理論中扮演的角色。這個分析所倚賴的關鍵事實是: 將規範場的曲率與 Wilson 圈及 Chern-Simons Lagrangian 二者聯結起來。讓我們以 $A(x)$ 表示規範場在三維空間中點 x的局部座標結構, 我們可將 $A(x)$ 表成

$$A(x) = \sum\nolimits_{a,k} A_a^k \; T^a dx_k$$

其中 $\{T^1, \ldots, T^m\}$ 是李代數的基底, $k = 1, 2, 3$, $\{x_1, x_2, x_3\}$ 是 M 在 x 的局部座標, 我們也用 T^a 表示 T^a 所對應的表示矩陣。

糾紛公式 (Skein formulae)

從 Witten 積分, 我們可以形式上地導出鏈結的糾紛公式如下: 給定 M 上的鏈結 K, 我們以 K_+, K_- 分別代表 K 在某一跨越 (crossing) 處改成正跨越及負跨越之新鏈結, 同時以 $K_\#$ 表示將此跨越改成相交點的鏈結, 如圖五十二所示。再者, 以 $K_{\#\#} \sum_a T^a T^a$ 表示如圖五十二所示之李代數間插 (insertion of Lie algebra), 其中 $\sum_a T^a T^a$ 乃此李代數的 casimir, 注意, 這些李代數間插變成 Wilson 圈整個乘積之一部分。經過一番計算後可得 [4] : 若忽略 $\frac{1}{k}$ 的高階誤差, 我們有 $Z(K_+) - Z(K_-) = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{k} Z(K_{\#\#} \sum_a T^a T^a)$, (當 k 很大時)。這個公式是了解鏈結不變量諸多性質之鑰。

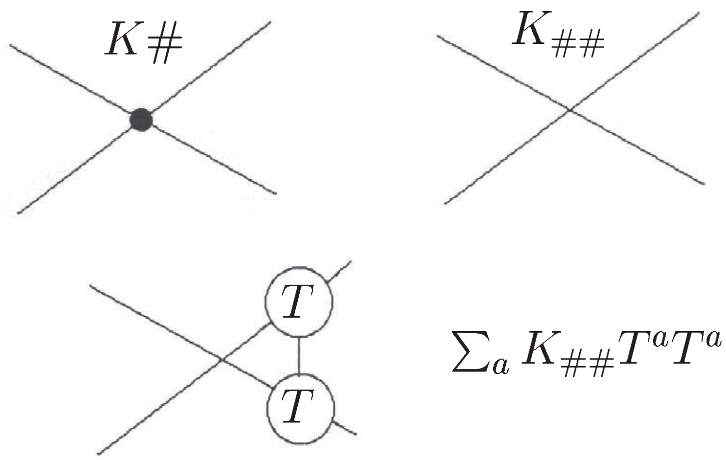

圖 五十二

圖不變量與 Vassiliev 不變量 (graph invariants and Vassiliev invariants)

在第六節, 我們有: 若 $V(G)$ (或記爲 V_G) 是一個 Vassiliev 不變量, 並採用前段 G_+, G_-, $G_\#$ 的定義, 則

$$V_{G+} - V_{G-} = V_{G\#}.$$

又, $V(G)$ 稱作 j-有限型 (j-finite type), 假若 G-具有至少 $(j+1)$ 個 4-節點 (4-valent node) 平面圖時, 則 $V(G)=0$。

讓我們重新以 Feynman 積分的看法來審視 Vassiliev 不變量, 我們有

$$Z(K_+) - Z(K_-) = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{k} Z(K_{\#\#} \textstyle\sum_a T^a T^a)$$

由此, 得知 $Z(K_\#) = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{k} Z(K_{\#\#} \sum_a T^a T^a)$。更進一步, 若 $V_j(K)$ 表示 $Z(K)$ 展開式中 $(\frac{4\pi\sqrt{-1}}{k})^j$ 的係數, 則由類似上述的計算可得: 當 G 有至少 $j+1$ 個 4-節點 (4-valent node) 時, $Z(G)$ 恆有 $(\frac{4\pi\sqrt{-1}}{k})^{j+1}$ 的因式, 因此 $V_j(G)=0$。所以, $V_j(K)$ 是一 j-有限型的 Vassiliev 不變量 (這個的結果是由 Birman-Lin [2] 用另一方法導出, 而同時亦由 Bar-Natan [1] 用與我們等價的方法導出)。

更妙的是, 前面的糾紛公式 (Skein formulae), 經過適當的解釋, 實際上告訴我們當 G 恰有 j 個4-節點 (4-valent nodes) 時如何計算 $V_j(G)$。這個結果等價於第七節中我們用李代數所導出有關權系的描述。所以, 經由 Feynman 積分探討鏈結不變量的方法, 啓發並解釋了 Vassiliev 不變量的基本結構。

由 Witten 積分觀點來探討, 低維流形的拓撲不變量與量子場論間深厚的關係仍在啓蒙階段, 未來將有許多令人驚奇的結果, 到目前爲止已被揭露的不過只是冰山一角。

参考文獻

1. D. Bar-Natan, On the Vassiliev Knot invariants, Topology, **34**(2)(1995), 423-472.
2. J. Birman and X. S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev's invariants. Invent. Math, **111**(1993), 225-270.
3. D. Freed and R. Gompf, Computer calculations of Witten's 3-manifold invariants, Comm. Math. Phys., **141**(1991), 79-117.
4. L. H. Kauffman, Functional integration and the theory of knots, J. Math. Phys., **36**(5)(1995), 2402-2429.
5. R. Lawrence and L. Rozansky, Witten-Reshetikhin-Turaev Invariants of Seifert Manifolds, Comm. Math. Phys., **205**(1999), 287-314.
6. N. Y. Reshetikhin and V. Turaev, Invariants of three manifolds via link polynomials and quantum groups, Invent. Math., **103**(1991), 547-597.

7. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Commun. Math. Phys., **121**(1989), 351-399.
8. V. Chari and A. Pressley, A Guide to Quantum groups, Cambridge U. Press, 1995.
9. L. H. Kauffman, State models and Jones polynomial, Topology, **26**(1987), 395-407.

(本文原是作者爲 *Encyclopedia of Natural and Physical Science* 所寫)

—本文作者任教於美國伊利諾大學, 譯者爲中央研究院數學所研究人員—