財務數學專題 (下) ——
財務數學(下)

陳宏 · 郭震坤

三、股票市場價格的連續模型

在第二節中, 藉由二項式模型推導出歐式買權的定價, 雖然也對模型中的參數選取作了一些討論。但人們可能對此一模型的實際適用性產生懷疑。特別是因爲二項式模型中, 股票價格在任一時點只能在兩個不同的值之中取其一, 這眞能描述股價隨著時間的動態變化嗎?

現在來看相鄰兩時點的時間間距與眞實時間的關係。如果這間距代表一天, 則顯然是不合理的, 因爲一天之內股價大概不會只取兩個不同的值。況且股票的交易基本上幾乎是連續進行的, 如果要使用二項式模型, 合理的時間間距大概只可能是在「分」或「小時」的尺度。而若要定出一個三個月後執行的歐式買權的價格, 則顯然 n 的量數應該增大到千的層級。在這個尺度上, 二項式模型可能比較接近於現實。

而當 n 的量數增大到千的層級時, 兩點之間的利率 r 應該是接近於 0 的。且上漲及下跌幅度 u 及 d 則應該非常接近於 1。不然的話, 在時間 $t = n$ 時, 股票價格的可能取值範圍會相當大。在這種情況下, 要使用第二節的推導方法來爲選擇權定價, 由計算的觀點來看, 並不是很簡易的工作, 特別是當 u 及 d 與時間有關時。

此外, 股票市場常因一些突發事件的發生, 而造成極短時間內股價作跳躍性的大幅變動。如果用數學的語言來描述, 就是股價並非時間的連續函數。若是如此, 我們也想知道, 二項式模型是否仍可用來作爲這種跳躍情況的模型? 它所推導出來的歐式買權的定價是否仍然適用?

因爲這兩個問題可以用離散逼近連續的典型方法, 再加上微積分層次的極限概念等來處理, 所以本節將先討論這兩個問題, 並藉此在下一節說明爲何需要股價的連續時間模型, 以及爲何需要引進積分理論、偏微分方程、鞅論、及隨機積分等較高層的數學架構及工具。

(一) 依據二項式模型的極限近似以推導歐式買權價格

在第二節中, 式(5) 所給出的歐式買權定價是

$$X_0 = (1+r)^{-n} \sum_{j=0}^{n} C(n,j) p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S_0 - K]^+.$$

如果將 a 定義爲股價往上移動, 使得 $S_n > K$ 的最少需要次數, 或 $u^a d^{n-a} S_0 > K$, 則歐式買權的定價可寫爲

$$X_0 = S_0 \sum_{j=a}^{n} C(n,j)\Big(\frac{pu}{1+r}\Big)^j \left(\frac{(1-p)d}{1+r}\right)^{n-j} - K(1+r)^{-n} \sum_{j=a}^{n} C(n,j) p^j (1-p)^{n-j}. \quad (6)$$

現令 Y 及 U 爲兩個隨機變數, 其分配都是二項式分配, 但成功的機率分別是 $pu/(1+r)$ 及 p , 則式 (6) 中 X_0 的首項 $\sum_{j=a}^{n} C(n,j)(\frac{pu}{1+r})^j \left(\frac{(1-p)d}{1+r}\right)^{n-j}$ 可表示爲 $P(Y \geq a)$, 而次項中的 $\sum_{j=a}^{n} C(n,j) p^j (1-p)^{n-j}$ 可表示爲 $P(U \geq a)$。當 n 大時, 可用中央極限定理得出 $P(Y \geq a)$ 及 $P(U \geq a)$ 這兩個機率的近似值, 他們分別是

$$\begin{aligned} &1 - \Phi\Big(\frac{a-1-npu/(1+r)}{\sqrt{npu/(1+r)[1-pu/(1+r)]}}\Big), \text{ 及} \\ &1 - \Phi\Big(\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big), \end{aligned}$$

其中, Φ 是標準常態分配的累積分佈函數。而此二近似值分別是式 (1) 中的 $N(d_1)$ 及 $N(d_2)$。

但一般教材中所敘述的中央極限定理, 是應用在 n 大, 且 $pu/(1+r)$ 及 p 不隨著 n 改變的情況下, 所給出的近似結果。而在這裏所考慮的情況是, p、u、r 會隨著 n 而改變, 所以需要較複雜的極限定理。

在繼續討論前, 先來看看二項式模型到底在說什麼? 由時間 t 到 $t+1$ 時, 若將股票的報酬率定義成 $(S_{t+1}/S_t) - 1$, 而二項式模型則是將相鄰兩期間的報酬率定爲一個隨機變數, 此隨機變數的取值是 $u-1$ 或 $d-1$, 其發生的機率分別是 q 及 $1-q$。因爲

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \prod_{k=1}^{n} (\frac{S_k}{S_{k-1}}), \text{ 或,} \\ \ln S_n &= \ln S_0 + \sum_{k=}^{n} \ln(\frac{S_k}{S_{k-1}}), \end{aligned}$$

且二項式模型假設相鄰兩期間的報酬率是彼此獨立的, 我們不難得出 $\ln S_n$ 的期望值及變異數是

$$\begin{aligned} E(\ln S_n) &= \ln S_0 + n[q \ln u + (1-q)\ln d], \\ \mathrm{Var}\,(\ln S_n) &= nq(1-q)[\ln(\frac{u}{d})]^2. \end{aligned}$$

如果 $\ln S_n$的期望值及變異數是有限的 (這在實務上的解釋是, 在有限的時間內, 股票價格的變化並不很大), 顯然 u 及 d 應該與 n 有關。有關正確的使用中央極限定理, 以得出良好的機率近似值問題, 留在下一小節中討論。

(二) 二項式模型的兩個極限近似

在上一小節中討論到一個合理的二項式模型, n 的量數應該增大到千的層級, r 應該接近於 0, 而 u 及 d 應該非常接近於 1。在本小節中, 令執行歐式買權的時間爲 T, 並依據二項式模型的架構, 將 T 切割成 n 個長度爲 h_n 的區間, 所以相鄰兩區間的間距爲 $h_n = \frac{T}{n}$。當 n 很大時, 可以用傳統的方法, 考慮 $n \to \infty$ 的分析, 以此極限來近似 n 很大時的結果。

令相鄰期間的利率爲 r_n, 因債券在固定時間 T 的報酬是有限的, 所以 $\lim_{n\to\infty}(1+r_n)^n$ 的取值應該是有限的, 故我們考慮 $r_n = O(n^{-1})$ (註二)。因此, 在以下的討論, 若令 $r_n = r\frac{T}{n}$, 則

$$\lim_{n\to\infty}(1+r_n)^n = e^{rT},$$

這是常見的複利公式。

接下來探討股價如何跟著時間來變動。在此小節中只討論兩種情況。第一種情況是股價跟著時間的變動而連續變化, 而且往上漲及往下降的幅度並不大。第二種情況是股價會因一些突發事件的發生, 而在極短時間內造成跳躍性的大幅變動。但是在定義上什麼叫做連續變化? 什麼又叫做突然的變化? 因爲 $h_n = \frac{T}{n}$, 而二項式 (離散時間) 模型中假設相鄰兩期間的變動是股價乘上 u 或 d (在對數的尺度上討論), 所以在連續變化的要求下, 考慮 u_n 及 d_n 分別是 $1 + a_n$ 及 $1 - ka_n$, 此處的 k 是一個固定數, 而 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

第二種情況是考慮突發事件發生時, 股價產生跳躍性的大幅變動。在這裏只考慮上漲或下降兩者之一會有跳躍, 且因視其爲一突發事件, 所以假設發生的機率很小。若考慮 $u_n = u$ 及 $d_n = 1 - a_n$, 其中 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。因 $u_n = u$, 所以跳躍只發生在上漲這個部分。且若將上漲的機率 q 寫成 q_n, 則 $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$。

情況一: 連續變化

考慮 u_n 及 d_n 分別爲 $1 + a_n$ 及 $1 - ka_n$, 此處的 k 是一個不爲 -1 的固定數, 而 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。由第一小節得知

$$E[\ln(\frac{S_T}{S_0})] = T[q\ln u_n + (1-q)\ln d_n]/h_n,$$
$$\mathrm{Var}\,(\ln\frac{S_T}{S_0}) = Tq(1-q)[\ln(\frac{u_n}{d_n})]^2/h_n,$$

且 $\ln S_T$ 的期望值及變異數是有限的。

在上述的參數選取下,

$$\ln u_n \sim a_n, \qquad \text{(見註一)}$$

$$\ln d_n \sim -ka_n, \text{ 及}$$
$$\ln(\frac{u_n}{d_n}) \sim (1+k)a_n.$$

當考慮股價上漲及下降的機會相當時, $q(1-q)=O(1)$。而當要求 $\ln S_T$ 的變異數是有限時, $[(1+k)a_n]^2/h_n$ 的極限須爲有限, 所以 $a_n = O(h_n^{1/2})$。如將 u_n 取爲 $\exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})$, d_n 取爲 $\exp(-k\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})$, 此時

$$[\ln(\frac{u_n}{d_n})]^2 = (k+1)^2\sigma^2 h_n, \text{ 所以}$$
$$\mathrm{Var}\,(\ln(\frac{S_T}{S_0})) = \sigma^2 q(1-q)(1+k)^2 T.$$

而在要求 $\ln S_T$ 的期望值是有限時, $T[q(1+k)-k]a_n/h_n$ 的極限須爲有限, 故q 應爲 n 的函數, 將 q 記爲 q_n, 則$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{k}{(1+k)}$, 故 k 爲一正數。現將 q_n 寫爲

$$\frac{k}{1+k} + b_n, \text{ 且 } \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

在 $E(\ln S_T)$ 有限的要求下,

$$b_n = O(h_n^{\frac{1}{2}}).$$

當將 b_n 取爲

$$\frac{1}{1+k}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \text{ 時, 則 } E(\ln(\frac{S_T}{S_0})) = \mu T.$$

因 $\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{k}{1+k}$,

$$\mathrm{Var}\,(\ln(\frac{S_T}{S_0})) \sim k\sigma^2 T,$$

這時可以用 Berry-Essen 定理, 得知 $\ln(\frac{S_T}{S_0})$ 會是一期望值爲 μ_T, 及變異數爲 $k\sigma^2 T$ 的常態分配。當將 k 取爲 1 時, $\ln(\frac{S_T}{S_0})$ 近似一期望值爲 μ_T, 及變異數爲 $\sigma^2 T$ 的常態分配, 而 S_T 具對數常態分配。

事實上, 不僅 S_T 具對數常態分配, 在適切的意義下, S_t, $0<t<T$, 也都具對數常態分配。這就與 Black and Scholes (1973) 這篇開創性的文章中, 對股票價格變動的假設是相同的。該文中假設股票價格係依據隨機微分方程式 (stochastic differential equation)

$$dS_t = \mu_0 S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{7}$$

來變動, 此處 B_t 是一個布朗運動, 其解爲

$$S_t = S_0 \exp((\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t), \tag{8}$$

亦即 $\ln(\frac{S_t}{S_0})$ 會是一期望值爲 $(\mu_0-\frac{\sigma^2}{2})t$, 及變異數爲 $\sigma^2 t$ 的常態分配。而在市場交易可以連續進行的情況下, 導出歐式買權的定價爲

$$S_0\Phi(y)-Ke^{-rT}\Phi(y-\sigma\sqrt{T}),$$

$$\text{其中 } y=\frac{\ln(\frac{S_0}{Ke^{-rT}})}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \qquad \Phi(u)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{u}\exp(-\frac{z^2}{2})dz.$$

以下次第說明兩種股價變動模型以及其所導出的歐式買權價格的一致性。因爲式 (7) 可解釋爲

$$S_{t+dt}-S_t=\mu_0 S_t dt+\sigma S_t(B_{t+dt}-B_t). \tag{9}$$

故

$$\begin{aligned}&E((S_{t+dt}-S_t)/S_t)\sim\mu_0 dt\\ &\mathrm{Var}\,((S_{t+dt}-S_t)/S_t)\sim\mathrm{Var}\,(\sigma(B_{t+dt}-Bt))=\sigma^2 dt\end{aligned}$$

注意, $B_{t+dt}-B_t$ 是一期望值爲 0, 及變異數爲 dt 的常態隨機變數。由於

$$(dt)^{-\frac{1}{2}}(B_{t+dt}-B_t)$$

是一標準常態隨機變數, 平均而言, $B_{t+dt}-B_t$ 遠大於 dt。故 S_t 的抽樣時間路徑屬不可微分的型式, 因此需要較高層次的數學工具來求解式 (7)。

將式 (9) 改寫爲

$$S_{t+dt}=(1+\mu_0 dt+\sigma\sqrt{dt}Z_t)S_t, \tag{10}$$

且令 $dt=\frac{T}{n}$, 則式 (10) 變成

$$S_T=S_0\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_0 dt+\sigma\sqrt{dt}Z_i)$$

其中, $Z_1,\ldots,Z_n$ 是符合 IID(independent and identically distributed) 的標準常態隨機變數。

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{\mu_0 T}{n}+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Z_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu_0 T}{n}+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Z_i)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mu_0 T}{n}+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Z_i)^2+o_p(\frac{T}{n})\\ &=T(\mu_0-\frac{1}{2}\sigma^2 n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)+\sigma\sqrt{T}n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}Z_i+o_p(\frac{T}{n}),\end{aligned} \tag{11}$$

由於 $n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i^2 = 1 + O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 及 $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n Z_i$ 是標準常態隨機變數, 故式 (11) 與式 (8) 一致, 可由應用 Itô 輔助定理而得。Itô 在 1940 年代發展的隨機微分方程解法成功地應用到現代選擇權定價理論。有關 o_P 及 O_P 的定義, 請參看一般的機率學書籍。

以上的推導, μ_0 與 μ 及 σ^2 的關係是 $\mu_0 = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$。所以若 $\mu_0 = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$, 這兩個股票價格變動的假設是相同的。

接下來於這些假設下, 說明式 (5) 的歐式買權價格與上述 Black and Scholes (1973) 文中歐式買權價格相孳合。由 [例二]知在二項式模型下的風險中立機率是

$$p_n = [(1+r_n) - d_n]/(u_n - d_n),$$

在情況一之下,

$$p_n \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}, \text{ 而}$$
$$\frac{p_n u_n}{(1+r_n)} \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

因爲

$$P(U \ge a) = 1 - P(U \le a-1),$$

而由 a 的定義可知

$$a - 1 = [\ln(\frac{K}{S_0}) - n\ln d_n]/\ln(\frac{u_n}{d_n}) - \varepsilon,$$

此處的 ε 是介於 0 與 1 之間的數。因

$$[\ln(\frac{K}{S_0}) - n\ln d_n]/\ln(\frac{u_n}{d_n}) - np_n \sim [\ln(\frac{K}{S_0})]/[2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}] - \frac{n}{2\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{n}}$$

可知

$$P(U \le a-1) \sim \Phi(\ln(\frac{Ke^{-rT}}{S_0})/\sigma\sqrt{T} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}), \text{ 所以}$$
$$P(U \ge a) \sim \Phi(\ln(\frac{S_0}{Ke^{-rT}})/\sigma\sqrt{T} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}).$$

同理可知

$$P(Y \ge a) \sim \Phi(\ln(\frac{S_0}{Ke^{-rT}})/\sigma\sqrt{T} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}),$$

所以式(5) 的歐式買權價格與上述 Black and Scholes (1973) 文中歐式買權價格相孳合。相關細節可參考 Cox, Ross 與 Rubinstein (1979) 文章第 251 頁至 253 頁, 或 Cox and Rubinstein (1985) 書第 205 頁至 208 頁。這個結果部分回答了第一小節最後所提的問題。

經由上述的極限近似結果, 我們得知當 n 大時, 看似不符實際的二項式模型可以極限近似的方法轉爲較爲接近現實的連續時間模型。二項式模型的想法在 1979 年方才提出, 這個想法提供了一個計算買權定價的方法。但若與 Black 與 Scholes (1973) 文中導出歐式買權定價的方法來比較, 二項式模型的方法所需用到的數學知識及工具事實上是相當基本的。

情況二: 非連續變化

在股票市場常可觀察到股價偶爾會有突然的跳躍性大幅變動。這常可被歸因於投資者突然接到非預期性的重要訊息, 造成他們的基本態度改變, 進而影響股價。現討論二項式模型是否仍可用來描述這種股價跳躍現象。

如前所述, 若僅考慮跳躍只發生在上漲的情況, 則在二項式模型中,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 0,$$
$$u_n = u, \text{ 及}$$
$$d_n = 1 - a_n,$$

其中 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

在這裡 $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ 是在反映股價偶爾的快速變化, $u_n = u$ 是在反映跳躍只會發生在上漲這個部分的情況。由第一小節中的討論得知

$$E(\ln \frac{S_T}{S_0}) = T[q_n \ln u + (1-q_n)\ln d_n]/h_n,$$
$$\mathrm{Var}\,(\ln \frac{S_T}{S_0}) = Tq_n(1-q_n)[\ln(\frac{u}{d_n})]^2/h_n,$$

且 $\ln S_T$ 的期望值及變異數應該是有限的。而在上述的參數選取下,

$$\ln d_n \sim -a_n, \text{ 及}$$
$$\ln(\frac{u}{d_n}) \sim \ln u + a_n.$$

當要求 $\ln S_T$ 的變異數爲有限時, 因

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 0, \text{ 故}$$

$q_n(\ln u + a_n)^2/h_n$ 的極限須爲有限, 所以

$$q_n = O(h_n).$$

如將 q_n 取爲 $\frac{\lambda T}{n}$, 則

$$\mathrm{Var}\,(\ln \frac{S_T}{S_0}) \sim \lambda(\ln u)^2 T.$$

在要求 $\ln S_T$ 的期望值是有限時,

$$T[(\frac{\lambda T}{n})\ln u-(1-\frac{\lambda T}{n})a_n]/h_n$$

的極限也應是有限的, 故

$$a_n=O(h_n).$$

因 $d_n<1$, 當將 d_n 取爲 $\exp(-\frac{\xi T}{n})$ 時,

$$a_n\sim\xi h_n\text{且}\xi>0,$$

故

$$E(\ln\frac{S_T}{S_0})\sim T(\lambda\ln u-\xi).$$

在這一組參數設定下, 由時間 th_n 到時間 $(t+1)h_n$ 時, 其相對變動可能是

$$(d_n-1)S_{th_n}/h_n\to\xi S_{th_n},\ \text{或是}$$
$$(u-1)S_{th_n}/h_n\to\infty.$$

這時股價變動會有 $\frac{\lambda T}{n}$ 的機會出現巨幅的改變, 若以時間來看, 在大部分的時間股價是連續的下降, 但在小部分的時間會產生往上的跳動。因

$$\frac{q_n}{h_n}=\lambda,$$

而 q_n 是由時間 ih_n 到時間 $(i+1)h_n$ 的跳動機率, 在連續時間下考慮時, 可想成在一個小時段 $(t,t+dt)$ 會產生跳動 $(S_{t+dt}/S_t=u)$ 的機率爲 λdt。用來描述「跳動」此一特定事件發生與時間的關係之模型, 在機率學中稱之爲卜阿松過程 (Poisson process), 而 λ 代表單位時間事件發生的平均數量, 當此事件發生於時段 $(t,t+dt)$ 時, 在時間 $t+dt$ 的股價是在時間 t 的股價的 u 倍。

對二項式模型而言, 股價在相鄰兩期間的變化只有兩種可能, 一是以機率 λdt 產生向上的跳動, 另一是以機率 $1-\lambda dt$ 產生連續的向下變動, 使得這樣的二項式模型會逼近一連續時間模型下的跳躍式過程 (Pure jump process)。此時到時間 T 時股價的可能取值是 $u^ke^{-\xi T}S_0$, 而這個取值發生的機率是 $e^{-\lambda T}(\lambda T)^k/k!$。在這裡 $e^{-\xi T}S_0$ 是代表連續向下的變動,k 是代表往上突然跳動的次數, 而 k 的取值可能是 0,1,2,...。

若與 [情況一]相較,[情況二]中的股價變化是相當不同的。它會依據

$$e^{-\xi t}S_0,\qquad 0\le t\le T,$$

之固定的變動下降, 但再加上 k 次向上的隨機固定幅度的跳動, 但 k 是隨機的且發生跳動的時間點也是隨機的。在這個特定的連續時間模型下, 其歐式買權定價可參看 Cox and Rubinstein (1985) 書之第 366 頁, 而這與二項式模型所導出的歐式買權定價也是相契合的。若認爲這個模型仍然過於簡化, 可參看 Merton (1976) 或 Cox and Ross (1976) 中所推導的更一般性的跳躍性股價連續時間模型, 獲得進一步的說明。

四、為何要考慮連續型模型?

在第二節中藉由一離散時間模型, 即二項式模型, 討論歐式買權定價的基本思考。二項式模型有效且易懂, 但若要使二項式模型能較接近於市場所觀察的股價波動, 就須考慮 n 很大的情況。且在一些情況, 例如回顧買權的定價及二項式模型參數 u 及 d 之修訂, 因爲與股價波動的路徑有關, 當 n 很大時, 路徑總數以 2^n 的尺度增加, 此時連處理離散問題最有效的電腦計算工具, 也會產生困難。此外, 在離散時間模型中, 即使有很好的電腦計算工具, 但大型的離散問題, 常因整個系統過於複雜, 不易掌握問題的本質來加以分析。

這些困難有相當多的部分, 可藉助連續時間模型及其解析工具來解決。而且在文獻中, 也早已累積了大量爲解決其他問題所發展的解析工具可資利用。應用連續時間的架構, 常可得到相當簡潔的計算工具及掌握問題的本質。因此第三節特別說明二項式模型的結果可用連續時間模型的結果來逼近。

現在再用 [例二]來進一步說明兩者之間相輔相成的關係, 在 [例二]中提到兩種不同的金融產品: 債券及股票。當考慮其價格與時間的關係時, 前者假設付固定的利息, 而後者則是隨機 (不確定) 的變動。在中學學習過程中, 可能已聽過馬爾薩斯的人口論, 其中提到人口成長與時間的關係是幾何級數的成長, 這與剛提到的債券價格與時間的關係是相同的。在二項式模型中, 一元的債券經過時間 n 時, 就成長成 $(1+r)^n$ 元; 而股票價格由時間 0 到 n 的變動也有類似的變化, 只是用隨機的方式來模擬成長的不確定性, S_0 元的股價經過時間 n 之後, 就成長成 $S_n = S_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{S_{i+1}}{S_i}$ 元。而 $\frac{S_{i+1}}{S_i}$ 的取值是 u 或 d, 發生的機率分別是 q 及$1-q$。所以在時間 n 時的價格, 就可以用二項式分配來描述。(試想當有 k 種不同的變化率時, 在時間 n 時的價格該如何來呈現?)

在二項式模型中, 如果 $\frac{S_{i+1}}{S_i}$ 只取一固定值 r 時, 可將其與時間的變化率寫成

$$\frac{S_{i+1}-S_i}{(i+1)-i} = rS_i,$$

這是一個差分方程式 (difference equation) 的寫法。如採第三節中的方法, 將相鄰時間差距取得很小時, 可將上述方程式改寫爲

$$\frac{S_{t+dt}-S_t}{(t+dt)-t} = rS_t,$$

或是改寫成微分方程式 (differential equation)

$$\frac{dS_t}{dt} = rS_t.$$

這時可藉由積分的方法, 可得出 $S_t = e^{rt}S_0$ (在第三節中是利用 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{rT}{n})^n = e^{rT}$, 而當 n 很大的時候, 用 e^{rT} 來近似 $(1+\frac{rT}{n})^n$)。因在股價的二項式模型中, 相鄰兩時點的股價與時間的可能變化率取值是 $u-1$ 或 $d-1$, 所以對應的微分方程式是 $\frac{dS_t}{dt} = XS_t$, 此處 X 是一取值是 $u-1$ 或 $d-1$ 的隨機變數。

爲能解微分方程式 $\frac{dS_t}{dt} = XS_t$, 這時產生一個自然的問題, 就是能否有一「方便的」積分工具可供使用? 回到第三節中股價連續變化的情況 ([情況一]), 時間由 0 到 T, 股價只在 ih_n 時變動, $1 \le i \le n$ 而 $h_n = \frac{T}{n}$。u_n 及 d_n分別是 $\exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})$ 及 $\exp(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})$, 上漲機率

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

而相關的差分方程式是

$$S_{t+h_n} - S_t = X_{t+h_n}S_t \qquad 當t = ih_n時。$$

故 $X_{h_n}, X_{2h_n}, \ldots, X_{nh_n}$ 是取値爲 $\exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})-1$ 及 $\exp(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})-1$, 而機率分別是

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}},\ 及\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}$$

的獨立隨機變數。此差分方程式的解是

$$S_T = S_0\prod_{i=1}^{n}(1+X_{ih_n}).$$

因

$$\ln(1+X_{ih_n}) = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \\ -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \end{cases}.$$

令 $Y_{in} = \sqrt{n}\ln(1+X_{ih_n})$, 則

$$Y_{in} = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \\ -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \end{cases}.$$

注意,

$$EY_{in} = \mu Tn^{-1/2},\ 及$$
$$\mathrm{Var}\,(Y_{in}) = \sigma^2T - \frac{\mu^2T^2}{n}.$$

故由中央極限定理

$$\sqrt{n}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Y_{in}-\frac{\mu T}{\sqrt{n}})=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_{ih_n})-\mu T\sim N(0,\sigma^2T-\frac{\mu^2T^2}{n}).$$

或,

$$S_t\sim S_0\exp(\mu t+\sigma B_t).$$

在連續時間模型下, $\prod_{i=1}^{n}(1+X_{ih_n})$ 可被

$$\exp(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z)$$

所近似。因

$$\begin{aligned}E(X_{ih_n})&=(e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}})+(e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}),\\&=(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}+O(n^{-\frac{3}{2}})\\\mathrm{Var}\,(X_{ih_n})&=\frac{\sigma^2T}{n}+O(n^{-\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

在一些特定條件下, 上述之差分方程式可寫爲一隨機微分方程

$$dS_t=(\mu+\frac{\sigma^2}{2})S_tdt+\sigma S_tdB_t,$$

利用隨機微積分中的 Itô 積分 (Itô, 1944), 可得

$$S_t=S_0\exp((\mu+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t)=S_0\exp(\mu t+\sigma B_t).$$

在離散時間模型下, 需考慮 $\prod_{i=1}^{n}(1+X_{ih_n})$ 的行爲表現, 可惜到目前爲止, 並沒有很多數學工具可用來探討其行爲表現。但在連續時間模型下,

$$\prod_{i=1}^{n}(1+X_{ih_n})$$

可被

$$\exp(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z)$$

所近似。然後引進隨機微分方程式

$$dS_t=\mu_0S_tdt+\sigma S_tdB_t,$$

此式甚易解得

$$S_t=S_0\exp((\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t),$$

這裡應用到隨機微積分中的 Itô 積分, 亦說明當考慮連續時間模型時, 在數學文獻上已發展了許多現成的知識及工具可資使用。就如同在第二節中所提, 在風險中立機率的世界裡

$$\tilde{E}(X_{t+1} \mid X_t) = (1+r)X_t,$$

其中的討論與鞅論有關, 這些知識與工具在數學文獻上已有相當發展。又如以連續時間模型來描述股價波動時, 選擇權的定價會使用到 Girsanov 定理, 這個定理的作者或許並未預期到它會被應用在財務領域上, 對財務世界做出貢獻。

五、結論

財務數學的核心是定價與避險: 對金融衍生性商品的定價; 與保護自身免受所有可能發生情況的影響。在定價中一種普遍應用的觀念是套利, 定價錯誤會招來套利者的注意, 他們會無情地利用你的錯誤來賺取無風險利潤。

一方面是因爲市場的需求, 另方面是由於標準的選擇權已因定價理論的確立而獲利空間有限, 市場持續推出奇特選擇權 (exotic options)。這些選擇權所需要的複雜定價、交易與避險策略, 持續對財務數學的發展加入新的動力。

財務數學可謂與傳統財務定價方法接軌的地方是: 將未來的期望值折現, 但期望值是在 equivalent martingale measure 之下取得。意指資產價格若遵循一個 martingale, 則可用一個調整的機率分配取期望值。折現所需的數學微不足道, 但 Harrison 與 Pliska (1981) 闡述 equivalent martingale measure 的觀念時, 對此領域的數學要求達到了一種深度。初學者要得到適切的了解最好由學習測度理論 (measure theory) 與鞅論 (martingale theory) 開始, 但這已需要數學系高年級或研究所的程度。Equivalent martingale measure 事實上就是財務經濟學界所言的「風險中立測度」(risk neutral measure)。

附註:

- 註一: 當投資者對具不同風險的投資工具, 只要這些投資工具都有相同的期望報酬, 就視爲同等的投資, 對持這種態度的投資者, 被稱之爲風險中立投資者。
- 註二: 在本文中, $a_n = O(b_n)$ 係指當 n 很大時, $\mid a_n/b_n \mid$ 是有界的; 而 $a_n \sim b_n$ 係指 $\lim_n a_n/b_n = 1$。
- 註三: 由微分的定義, 可知當 x 非常接近 x_0 時, 一非線性函數 $f(x)$ 可被 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (這是熟悉的線性函數 a+bx) 近似得好。所以 $\ln(1+x) \sim x$ 當 x 很小的時候。依據這個想法的延伸, 在同樣的 x 值範圍, $\ln(1+x)$可被多項式函數 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ 近似得好些。

参考文獻

1. F. Black and M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 82(1973), 637-659.
2. M. Brennan and E. Schwartz, Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(1978), pp.461-474.
3. J. Cox and S. Ross, The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1976) 145-166.
4. J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein, Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 6(1979) 229-263.
5. J. Cox and M. Rubinstein, *Option Markets*, Prentice Hall, 1985.
6. J. M. Harrison and S. R. Pliska, Martingales and Stochastic Integrals in the theory of Continuous Trading, *Stochastic Process.* Appl. 11(1981), 215-260.
7. K. Itô, Stochastic integral.*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20(1944), 519-524.
8. R. C. Merton, Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1976) 125-144.

—本文作者陳宏任教於國立臺灣大學數學系, 郭震坤任教於國立臺灣大學國際企業學系—