財務數學專題 (下) ——
財務統計

傅承德

1. 前言

在金融市場的理論探討與實務操作中, 我們經常會碰到下列的問題:

- 金融市場在不確定 (uncertain) 的情況下, 是如何運作?
- 資產 (asset) 的價格是如何訂定, 以及它隨著時間的走勢又是如何?
- 資產未來的價格是否爲可預測的 (predictable)?
- 在制定某種財務管理政策之後, 其風險 (risk) 爲何?

爲了回答上述的問題, 我們介紹一些基本的概念與理論。在描述某一種資產價格的走勢及其衍生性金融商品 (derivatives) 的定價時, 我們採用 "市場無套利 (no arbitrage)" 的觀點。從數學的角度來說, 此一經濟假設是表示 "存在一無風險機率測度 (risk neutral probability measure), 並且其經折現後的價格走勢 (discounted prices) 相對此一測度爲一平賭過程 (martingale)"。如此一來, 我們即可利用隨機微積分 (stochastic calculus) 來對衍生性金融商品 (尤其是選擇權 (option)) 制定其價格。本文的主要目的, 就是將上面那句話做一個簡易的介紹。

全文共分5節。在第2節中, 我們介紹市場價格報酬率 (return) 的隨機漫步 (random walk) 假說, 並舉台積電的股價爲例, 對此一假設做進一步說明。第3節介紹效率市場 (efficient market) 的基本概念, 及其相對應的統計模型。第4節介紹歐式選擇權 (European option) 及其定價公式, 並與傳統 (大一) 微積分做一簡單的類比。第5節是結論, 我們敍述一些較深入的課題。

2. 隨機漫步假說

在30年代, 一些統計學家諸如: Cowles (1933), Working (1934), 及 Cowles 和 Jones (1937), 對一些財務資料做了實證分析, 而試著去回答下列問題: 價格的走勢是否爲可預測的?

在這些論文中, 作者們經由對大量數據的統計分析, 進而發現一個有趣並且出人意料的結果; 即

$$R_n=\ln\frac{S_n}{S_{n-1}},\quad 其中\ S_n\ 表示在時間\ n\ 時的價格,\quad n\geq 1, \tag{2.1}$$

爲一 “獨立” 的序列。但因爲此結果與一般大衆認爲價格可經由節奏性 (rhythms)、週期性 (cycles)、趨勢性 (trends) 等現象, 而可預測的直觀相異, 故並未引起廣泛的注意。

經過一段時間的沈寂之後, 在50年代初, Kendall (1953) 在英國皇家統計學會 (Royal Statistical Society) 上發表一篇重要的文章, 因而開啓了近代財務統計的里程碑。Kendall 教授原本想要經由對股票及商品價格的分析, 找出其週期性。但在分析實際資料後 (1928-1938期間, 19種上市股票的週資料; 1883-1934期間, 芝加哥市場小麥的月平均價格; 1816-1951期間, 紐約交換市場棉花的價格), 出乎意料之外, 他發現的是這些價格並沒有任何節奏性、週期性或趨勢性。進而他得到的結論是 “$\cdots$ the demon of chance drew a random number $\cdots$ and added it to the current price to determine the next $\cdots$ price”。換言之, $R_n=\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$ 的行爲像是一隨機漫步 (random walk)。

然而從歷史的角度來看, 法國天才數學家 Bachelier (1900) 才是第一位利用隨機漫步去描述價格走勢的學者。他假設價格 $S^{(\Delta)}=(S^{(\Delta)}_{k\Delta})$ (注意他並未對 S_n 做對數轉換) 在瞬間 $\Delta, 2\Delta, \ldots$ 的表現爲

$$S^{(\Delta)}_{k\Delta}=s_0+\zeta_\Delta+\zeta_{2\Delta}+\cdots+\zeta_{k\Delta}, \tag{2.2}$$

其中 S_0 爲初始價格, $(\zeta_{i\Delta})$ 爲獨立同分佈的隨機變數, 且取値在 $\sigma\sqrt{\Delta}$ 及 $-\sigma\sqrt{\Delta}$ 的機率各爲 $\frac{1}{2}$。因此

$$E(S^{(\Delta)}_{k\Delta})=S_0,\qquad \mathrm{Var}\,(S^{(\Delta)}_{k\Delta})=\sigma^2\cdot(k\Delta). \tag{2.3}$$

令 $k=[\frac{t}{\Delta}]$, $t>0$ 以及讓 $\Delta\to 0$, Bachelier 發現 (2.2) 的極限過程爲 $S=(S_t)_{t\geq 0}$, 其中 $S_t=\lim_{\Delta\to 0}S^{(\Delta)}_{[\frac{t}{\Delta}]\Delta}$ (注意此極限是在某特定的機率意義下), 且有下列表示式:

$$S_t=S_0+\sigma W_t, \tag{2.4}$$

其中 $W=(W_t)$, $t\geq 0(W_0=0,\ EW_t=0,\ EW_t^2=t)$ 爲標準布朗運動 (standard Brownian motion) 或稱爲 Wiener 過程。此爲最早描述價格的模型, 雖然其數學性質簡單, 但它的缺點爲價格可能爲負値而與實際狀況不相符。

以下我們用台積電股價的例子來做進一步的說明。在圖2.1中, 我們將台積電在民國83年9月上市至民國90年12月之每月月底的收盤股價記錄並畫出它的折線圖 (資料來源: 台灣新報–B&T 國內 TOP3000大企業資料庫), 這是財務上描述資產最典型的資料圖。我們發現台積電的股價高低的起伏變化相當大, 如果在不對的時間點進行買賣, 將會損失很多資金。而從圖中可看出不可預測性 (unpredictability) 似乎是財務模型的重要特徵。更何況我們關心的並不是股

價的高低, 而是報酬率的大小。若以 S_i 表示第 i 月的股價, 則第 i 至 $i+1$ 個月的報酬率可表成

$$\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i}=R_i \quad \text{或} \quad \ln\frac{S_{i+1}}{S_i}=R_i \tag{2.5}$$

兩種形式 (注意在 (2.5) 中, 前式爲後式 $\ln(1-x)$ 在 $x=1$ 的一次泰勒展式)。在表2.2中, 我們計算出台積電股價的月報酬率, 並將其描繪在圖2.3上。由圖觀之, 這些資料恰似一些雜訊 (noise), 問題是我們要如何去建立統計模型呢?

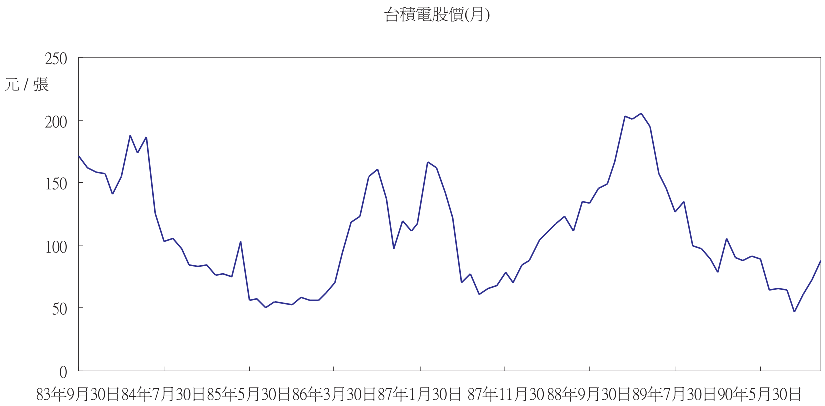

圖2.1. 民國83年9月至90年12月, 台積電每月收盤股價

表2.2. 台積電股價資產報酬率

	A	B	C	D	E	F
1	年/月/日	收盤價	報酬率	報酬率		
2	83/9/30	171		取自然對數	平均報酬率	0.006712
3	83/10/29	162	-0.0526316	-0.05406722	標準差	0.165776
4	83/11/30	159	-0.0185185	-0.01869213		
5	83/12/31	157	-0.0125786	-0.0126584		
6	84/1/26	141	-0.1019108	-0.10748591	平均報酬率	
7	84/2/28	155	0.09929078	0.094665227	(取自然對數)	-0.0077
8	84/3/31	188	0.21290323	0.193016846	標準差	0.173145
9	84/4/29	174	-0.0744681	-0.07738666		
10	84/5/31	187	0.07471264	0.072053318		
11	84/6/30	125.5	-0.328877	-0.39880286		
12	84/7/31	103	-0.1792829	-0.19757677		
13	84/8/31	105.5	0.02427184	0.023981965		
14	84/9/30	98	-0.07109	-0.07374347		
15	84/10/30	84	-0.1428571	-0.15415068		
16	84/11/30	83	-0.0119048	-0.01197619		
17	84/12/30	85	0.02409639	0.023810649		
18	85/1/31	76.5	-0.1	-0.10536052		
19	85/2/29	77.5	0.0130719	0.012987196		
20	85/3/28	75	-0.0322581	-0.03278982		

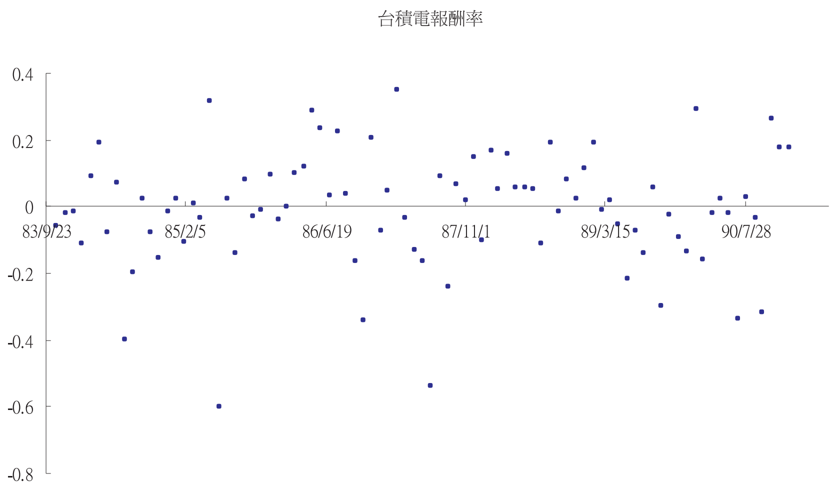

圖2.3. 台積電股價每月報酬率

然而經由標準化後 (即數據減去其樣本平均後再除以其樣本標準差), 如圖2.4, 我們可用一標準常態分佈 (其機率密度函數爲 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$) 去描述 $\frac{R_i-\overline{R}}{S_R}$, 其中

$$\overline{R}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}R_i,\qquad S_R=\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(R_i-\overline{R})^2},\tag{2.6}$$

M 爲樣本個數。

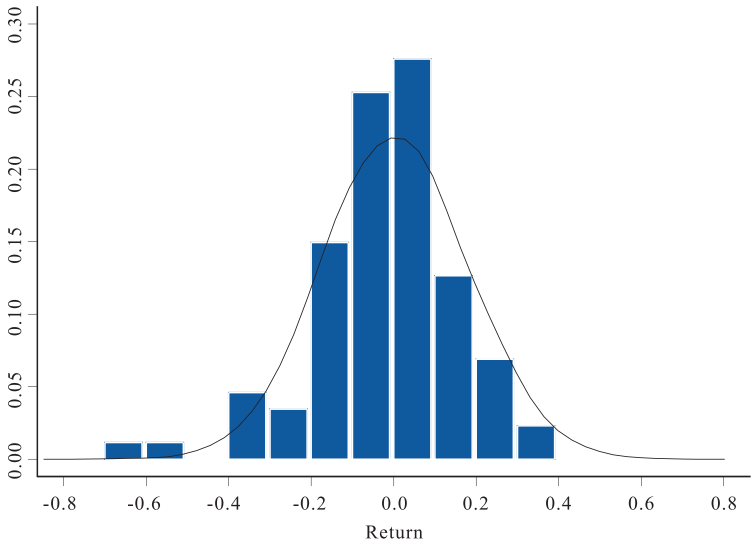

圖2.4. 台積電報酬率直方圖與標準化常態分佈

即

$$R_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} = \text{mean+standard deviation} \times \phi \tag{2.7}$$
$$= \mu \Delta k + \sigma \sqrt{\Delta k} \phi.$$

如同 (2.3) 和 (2.4), 令 $k = [\frac{t}{\Delta}]$, $t \geq 0$ 以及讓 $\Delta \to 0$。我們可得

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \tag{2.8}$$

其中 $W = (W_t)$, $t \geq 0$, 爲一標準布朗運動。此即 Samuelson (1965) 所提出的幾何 (或稱經濟) 布朗運動 (geometric Brownian motion)。

我們可將方程式 (2.8) 看作資產價格的隨機漫步模型, 如圖2.5, 我們知道現今的資產價格, 但不知道下一期的資產價格, 而只知道資產價格是按照 (2.8) 式所產生出來的。

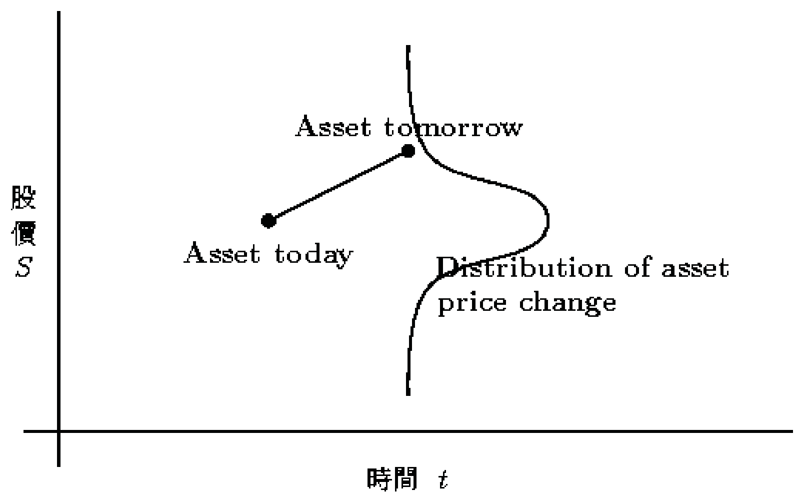

圖2.5. 股價的隨機漫步模型

3. 金融市場的效率性

3.1. 有效性的意義

很少有人懷疑 “價格是由需求和供給所決定的” 這一個經濟的基本想法。在證券市場上, 這個現象每時每刻都在發生。任何一種單一股票的 K 線圖, 說明的都是成交價 (以及成交量) 的變化情形。設有一個理想市場, 它滿足以下三個條件:

(a) 所有的資訊是公開而免費的;

(b) 所有的投資人都是好分析師;

(c) 所有的投資人都密切注意股價並隨時適當地調節所持的證券。

如此在任何時間, 該證券就應該準確地反應出它的實質價值。因此成交價同時也是證券的正確價位。

投資分析的主要工作, 就是找出某些證券的眞實價位。而證券目前的價格高於它的眞實價格, 該出售; 反之, 則應該買入。但是若 (a)(b)(c) 三條件都滿足, 則任何時間證券的價格既不會太高, 也不會太低, 因此投資人無法找出有利的投資機會, 這就叫做一個具有效率性的市場 (efficient market)。

在一個效率市場裡, 平均來說, 投資人, 不論是散戶還是專業財務經理人, 都不能保證獲利。從數學的眼光看來, 在 "效率性" 的假定之下, 我們可以導出一些結果。因爲 "效率性" 這個概念是可以用數學來建構的。其中最簡單的描述就是第2節所介紹的隨機漫步模型。

當然, 願意將資金投入市場以追求利潤的人, 基本上都不相信市場是具有效率性的。否則, 不論他們多麼聰明努力, 長期下來, 都不會賺得超過預期的報酬。而在投資市場上能否獲利, 基本上只靠一件事情: 預測的準確與否。這一方面, 財務分析者可分爲兩大類: (a) 技術分析, (b) 基本分析。前者以研判諸如 K 線或相關的波浪理論爲主, 後者則側重於公司基本面的判斷。

對於一個成熟的或接近成熟的證券市場而言, 即使這個市場還不算具有效率性, 但也不會相去太遠, 因此不論多麼高明的財務分析, 其預測的精度, 都不可能高明到那裡。基金經理人的表現不如大盤者, 比比皆是。而長期能維持20%的投資報酬率的情形, 也不太多。但這個市場看似有太多的獲利機會在內, 所以仍然是現代人最愛爭逐的園地。

眞正的長期利潤, 是來自經濟活動本身的成長 (即後文 (3.2) 式中之 $\mu > 0$)。直觀上, 技術高明的玩家似乎可能分到較大的一塊餅。但是我們認爲技術高明的人士, 往往只因他們是贏家–因爲他們是贏家, 才被看成技術高明。而我們其實並不知道他們根據甚麼理論勝過市場。

市場的效率性, 可分爲弱式、半強式、和強式三種形式。用簡單的話來說, 具效率性的市場, 就是沒有 "白吃的午餐" 的市場。但要將這件事說箇明白, 卻也不是易事, 因其觀點不止一種, 用數學表現出來的時候, 也有不同的形式, 並且它們雖不見得互相衝突, 但也不是完全一樣。至於再談到以資料驗證, 想法更是不一, 而傳統上, "市場是否具有效率性" 一直是一個被相當詳細研究的課題。

市場的效率性這一概念起源於本世紀初法國數學家 Bachelier 的研究, 他的貢獻是很大的, 但是他的工作直到近20年才日益被人認識到。在第2節中, 我們提到他是首次利用布朗運動模型來描述股票價格的學者, 而市場有效性的起源也是在那個時候。但考慮市場有效性與信息 (information) 的相聯繫, 卻是近幾十年來的發展。Fama (l970) 指出價格完全反映了可以使用的信息時, 這個市場才能稱爲是具有效率性的。但怎樣用數學的語言來反映這一概念, 是值得深入探討的課題。

用 S_t 表示某一證券在時刻 t 的價格, 時刻 t 的信息集記爲 $\mathcal{F}_t$ 於是 S_t 可以認爲是基於信息 $\mathcal{F}_s$ 的條件期望, 即用 V^* 表示基價, 若 $t < s$, 那麼應該有

$$S_t = E\{V^* | \mathcal{F}_t\} \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

由於 $\mathcal{F}_s$ 的信息比 $\mathcal{F}_t$ 不會少, 即 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$。數學上, 我們很容易將 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 想成 "信息流程 (information flow)"。容易看出, (3.l) 所表現的, 不過是說 $\{S_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 構成一個平賭過程 (martingale) 而已。

平賭過程, 是指

(i) 對所有的 $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_t$ 都是 σ-域 (σ-field);

(ii) 若 $s > t$, 則 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$;

(iii) S_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可測函數; 及 $E(|S_t|) < \infty$, $t \in (0, T]$.

(iv) $S_t = E(S_s | \mathcal{F}_t)$ a.s. $s > t$.

其中 (iv) 所表現的意思是, 在時間點 t, 當你知道一切到達時間 t 爲止的資訊時, 你對未來的期望, 和目前一樣。如果把 S_t, 當作你在時間 t 的某一種賭博資金的全部, 則 (iv) 表示, 你對任何的未來時間點 $s > t$ 而言, 你所期望的所有資金, 和目前完全一樣。

不難自 (3.1) 導出 (iv)。但是在這樣做的時候, 你需要知道甚麼叫做已知某 σ-域時的條件期望值 $E(S|\mathcal{F}_1)$。這基本上需要懂較深的機率論才行, 我們在此就略過不講。

因爲 $\mathcal{F}_t$ 代表到時間 t 爲止的所有資訊, 前述三種形式的效率市場, 就導致現有文獻中常用的有效市場的三種類型:

弱式 (weak form) 的效率市場: 信息集是指證券自己過去歷史中的價格和收益。

半強式 (semi-strong form) 的效率市場: 信息集是指市場參與者都知道的信息 (公共信息)。

強式 (strong form) 的效率市場: 信息集是指市場參與者所有的信息 (包含私人內線信息)。

爲了要檢驗市場的效率性, 必須將上述這三種定義進行相應的數學描述。從上面的定義可以看出, 能夠檢驗的效率性, 只可能是弱式和半強式。因爲強式涉及到私人信息, 這些資料是難以收集的。即使是半強式, 由於公共信息也難以清楚的型式體現, 因此也較難檢驗其效率性。所以弱式是文獻中最易見到的研究。

對於弱式的描述, 簡單的看可以有以下三個不同的模型: 它們的共同基點都是隨機漫步, 用 S_t 表示時刻 t 證券的價格, 於是有

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \tag{3.2}$$

其中 μ 表示預期報酬率。對於 ε_t 的不同要求, 形成了不同的模型。

(i) $\{\varepsilon_t, t \geq 0\}$ 是獨立同分布的, $E\varepsilon_t = 0$, $\mathrm{Var}\,(\varepsilon_t) = \sigma^2$;

(ii) $\{\varepsilon_t, t \geq 0\}$ 是獨立的, 但分布不一定相同 (實際上, 從長期的資料來看, 同分布的假定是不易被接受的);

(iii) $\{\varepsilon_t, t \geq 0\}$ 是不相關的, 即要求對 $t \neq s$, 便有 $\mathrm{Cov}\,(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, 這比 (ii) 更弱一些。如果對 (i) 再加上常態性的要求, 這些條件就更強了。因此有效性的檢驗是通過還是不通過, 要看是對那一個模型來談。

這些模型, 因爲都是時間序列所包含的部分, 故我們可以用傳統的統計方法加以檢驗, 在此我們就不一一敍述了。這些工作在過去幾十年中, 大規模地被經濟學家做過, 而基本上沒有拒絕過 “市場有效” 的假設。然而在另一方面, 現今也沒有方法可以驗證平賭過程的假設。我們所知的一些做法, 都是先假設了十分明確的簡單 (有時又過分簡單) 模型。

3.2. 馬可夫過程 (Markov process) 的想法

關於效率市場, 對於數理財務而言, 它的目的只不過是假設如 (3.2) 那樣的模型。因爲只有在有了數學架構之後, 才能由此推導其性質。其它用文字來描述的現象, 只是加強讀者印象用的, 對於嚴謹的數理推導, 並無實質幫助。

不論文字如何描述, 市場效率性可歸納成兩點:

(a) 過去的歷史資料, 已完全被反應在目前的證券價格上;

(b) 對於任何新的資訊, 市場會立刻將之反應在證券的價格上。

上面的 (a) 是比一般的 “平賭” 的假設要強。它是說, 即使我們知道過去一百年的價格, 但這一堆資料的價値, 和“最近的證券價” 是相同的。例如說, $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ 表示過去 n 日的股價, 則

$$P\{S_{n+1} < x | (S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}) \in A, S_n = a\} = P\{S_{n+1} < x | S_n = a\} \tag{3.3}$$

對所有的 $a \in R$ 及 $A \subset R^{n-1}$ 都成立。滿足 (3.3) 的叫做一個馬可夫過程 (Markov process), 它所具有的性質就是 “若已知最近的明確消息, 則可忘記所有過去的其它資訊”, 而這也是上面 (a) 性質的數學陳述。

3.3. 平賭過程所引申的意義

若 $S_1, S_2, \ldots$ 爲一個平賭過程, 取 $\zeta_n = S_n - S_{n-1}$, 則 ζ_n 這個序列, 被叫做平賭差 (martingale difference), 平賭差序列滿足下面的性質:

$$E(\zeta_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{a.s.}$$

由一個平賭過程, 可用上法產生一個相對應的平賭差序列; 反之, 若有一個平賭差序列 ζ_n, 我們也可經由令

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i, \tag{3.4}$$

而得到 S_n 是一個平賭過程。

設 ζ_n 爲由 S_n 這個平賭過程所產生的平賭差序列, 又設 $g_n(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ 爲任一個只和 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 有關的函數, 令

$$Y_n = g_{n-1}(S_1, \ldots, S_{n-1})\zeta_n. \tag{3.5}$$

則

$$E(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(g_{n-1}\zeta_n|\mathcal{F}_{n-1}) = g_{n-1}E(\zeta_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad \text{a.s.} \tag{3.6}$$

故 Y_n 也是一個平賭差序列。再令

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{3.7}$$

則 Z_n 也是一個平賭過程。

不妨設 S_n 代表時間 n 時的某股票價格, 則 ζ_n 代表一單位時間後的價差。而若將 g 想成某人買進或賣出的數量, 則 $Y_n = g_{n-1}\zeta_n = g_{n-1}(S_n - S_{n-1})$ 就是此人在這一單位時間內的利潤或損失。這樣看來, Z_n 代表的就是此人連續 n 日的總經營績效。此處, 因爲 g_n 是全然不加限制的 (除了 $g_{n-1}(S_1, \ldots, S_{n-1})$ 的條件, 表示所有在時間 $n-1$ 的決策, 只和 $\mathcal{F}_{n-1}$ 所包括的資訊有關)。上面的結果所說的是, 若股價呈平賭過程, 則不論此人如何下單, 其所顯現的總所得過程, 仍爲平賭。即你不能用精妙的下單技術來取得利潤。

上面的說法, 是假設了投資人對同一股票持續做買或賣。但若是他中途決定退場情形又如何?

設此投資人決定在時間 T 退場。若 T 是一個非隨機變數, 則問題簡單。因此我們假設此人是否在時間 n 決定退場, 全然由 $\mathcal{F}_n$ 中所含的資訊而定。用機率的角度來說, 這就是 $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ 這個 "在時間 n 決定不做" 的事件, 是 $\mathcal{F}_n$ 中的事件。這樣的 T, 在機率論裡叫做停止時間 (stopping time)。

若 Z_n 爲一個平賭過程, 定義

$$\begin{aligned} Z_n^* &= Z_n \quad 若 \quad n \leq T; \\ &= Z_T \quad 若 \quad n > T. \end{aligned} \tag{3.8}$$

則 Z_n^* 就是一個 "根據 T 來決定何時退出" 的過程所產生的利潤。有意思的結果是: 若 Z_n 爲一個平賭過程, 則 Z_n^* 也是平賭過程。易言之, "贏了就跑" 的策略, 也沒有用。我們可進一步來看

“蜻蜓點水” 的方法是否有用。設 $T_1, T_2, \ldots$ 爲一個序列的停止時間, 它們滿足 $T_1 < T_2 < \cdots$, 以及 $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$。

令 $Z_n^{**} = Z_{T_n}$, 則 Z_n^{**} 是一個 “只在時間 $T_1, T_2, \ldots$ 下場的投資人所應有的報酬”。數學上也可證明若 Z_n 爲平賭, 則 Z_n^{**} 亦然。

我們可將 “下單技術” 和 “離場時間” 合併以涵蓋到更複雜的情況, 但上面的道理, 概念上是明確的: 如果用一個平賭過程來描繪股價, 則任何不作弊的手段, 都不能使你從平賭跳到非平賭。這表示說, 在一個具有效率性的市場裡, 沒有白吃的午餐。

註: 上面的結果, 也可以用另一個角度來看。如果一個遊戲是不公平的, 則無論你怎麼玩, 仍然會吃虧。這就是賭場即使不作弊, 也仍然賺錢的基本道理。因爲遊戲都將贏面偏向莊家。

3.4. 效率市場的檢定

平賭的解釋, 是數學模型的性質。統計上, 則需要 “可檢測” 的大量數據來做實質上的驗證。做法又是不一樣的了。

在市場平衡的想法下, 文獻中討論市場的有效性, 一般有四種模式。

A. 我們預期的報酬率是正的;

B. 我們預期各報酬率都是常數 (constant), 但不同的證券可有不同的常數;

C. 報酬率的結構和市場模型一致;

D. 報酬率還將風險加入考量。

在最簡的規則 A 之下, 證券在時間 $t+\tau$ 的價格 $S_{t+\tau}$, 是由 $E(S_{t+\tau}|J_t)$ 所規範的, 其中 J_t 表到時間 t 爲止時所有投資人所知的資訊。它要滿足 $E(S_{t+\tau}|J_t) - S_t > 0$ a.s. 的條件。至於 $E(S_{t+\tau}|J_t)$ 是甚麼分布, 反而不那麼重要。

在這個假設之下, 最合理的投資方式就是 “買入持有 (buy and hold)”。反過來說, 如果市場效率性不足, 則任何消息就不會那麼快地被反應在證券的價格上。這其實是技術分析派 (看 K 線來決定進出的人) 的主要立論依據。他們認爲若是市場反應價格的速度不可能那麼快, 則不論是漲或是跌, 都應該持續一段時間。而所謂的 “濾嘴法則 (filter rule)” 就可能比買入持有要好。

何謂濾嘴法則? 設某股上漲了3% 我們就買, 一直等到它自最高點下跌了3% 就賣出 (並融券), 這就是一個3% 的濾嘴法則。濾嘴法則的精神和看 K 線決定買賣是一樣的。如果 A 成立, 那麼某一個濾嘴法則就會比買入持有要強。

在模式 A 之下檢定市場的效率性, 研究頗多, 且多具有相當大的規模, 但似乎未有正式的假設檢定。基本上, 除了極小百分比的濾嘴法則之外, 一般的濾嘴法則皆不能在操作上勝過買入持有的策略。但小濾嘴的副作用是進出頻繁, 因此加上操作成本之後, 可能抵消所獲的利潤。

關於 B 模式, 因爲報酬率爲 $R_{t+\tau} = (S_{t+\tau} - S_t)/S_t$, 故 $\{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ 的信息, 和 $\{R_1, R_2, \ldots, R_t\}$ 的信息等價。因此

$$E(R_{t+\tau}|S_1, \ldots, S_t) = E(R_{t+\tau}|R_1, \ldots, R_t) = \text{常數}. \tag{3.9}$$

假如我們設一般情況爲

$$E(R_{t+\tau}|R_1, \ldots, R_t) = \alpha + \beta R_t. \tag{3.10}$$

則我們的問題, 就可以化爲檢定 $H_0 : \beta = 0$ 這一類的統計假設檢定。當然, (3.9) 和 (3.10) 已進一步地限制了我們的模型, 並且這問題也自動地歸引到自迴歸 (autoregressive model) 這一類的模型上去。

我們不再討論 C 及 D 這兩類的市場效率研究。這一類的研究, 雖然規模都相當大, 但如前面所說, 眞到了檢驗的時候, 只有回到極度簡化的模型上, 才可能做實際的實證研究。因此純學術的意義並不大。

市場具有效率性嗎? 這些研究的結論, 大致均認爲找不到市場不具效率性的證據。但就以我國而言, 股市就已經是一個日成交量達到千億的市場。這些上百萬的股民, 心裡在想甚麼?

“市場也許是具有效率性的, 但我更聰明”。

從這一個角度來看, 人類似乎都不是全然理性的動物。也許我們只是一廂情願地以爲投資人都是冷靜而理智的。

4. 歐式選擇權

選擇權是一種延後交割的契約, 契約的買方有權利但並無義務在未來特定日子或之前, 以特定的價格買進 (買權 (call option)) 或賣出 (賣權 (put option)) 特定數量之商品或證券。現今的選擇權的標的物資產 (underlying asset) 包括金融資產如股票、債券、外匯與實物商品, 如黃金、石油或純期貨契約, 如股價指數期貨契約。自 1973年 Black 和 Scholes (1973) 及 Merton (1973) 提出有封閉型式解 (closed-form solutions) 的論文, 使得選擇權定價理論出現突破性的發展。Black 和 Scholes 及 Merton 分別在他們的文章中, 看出透過標的物資產與現金構成的簡單投資組合進行動態避險, 如此可決定選擇權的合理價格 (rational price)。這項原理是目前金融市場選擇權定價公式的基礎 (讀者可參閱上期陳宏和郭震坤及陳仁遶的文章, 有較詳細的敍述)。如同 (2.8) 式, 假設資產遵守幾何布朗運動, 即滿足下列隨機微分方程式:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{4.1}$$

其中 μ 是預期報酬率, σ 是標的物資產的股價變動量 (volatility), S_t 是標的物資產在時間 t 的股價, W_t 是標準布朗運動。所謂的歐式選擇權是指其選擇權只能在到期日當天才能執行的選

擇權。買權的歐式選擇權公式, 其價格 $V_0(C)$ 可寫成以下的積分形式:

$$V_0(C)=\int_{-\infty}^{\infty}[(S_0e^{-(1/2)\sigma^2T+\sigma\sqrt{T}x}-e^{-rT}K)^+]\frac{e^{-(1/2)x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx, \tag{4.2}$$

其中 S_0 表訂選擇權合約的股價, K 表履約價格, T 表到期日, r 表無風險利率。可將 (4.2) 做進一步化簡成

$$V_0(C)=S_0\Phi(d_+)-Ke^{-rT}\Phi(d_-), \tag{4.3}$$

其中 Φ 表標準常態分佈的累積機率密度函數, $d_\pm=\frac{\log(S_0/K)+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$。

再根據買權賣權平價關係 (call-put parity), $V_t(C)-V_t(P)=S_t-Ke^{-rT}$, 可得賣權價格 $V_0(P)$,

$$V_0(P)=Ke^{-rT}\Phi(-d_-)-S_0\Phi(-d_+), \tag{4.4}$$

這就是所謂的 Black-Scholes 公式。以 $T-t$ 代替 T 及 S_t 代替 S_0, 可得到更一般的價格過程 V_t

$$V_t(C)=S_t\Phi(d_{t+})-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_{t-}), \tag{4.5}$$

其中 $d_{t\pm}=(\log(S_t/K)+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))/\sigma\sqrt{T-t}$。

觀察 (4.5) 式, 我們可知 $V_t(C)$ 與 S_t, K, T, r 及 σ 有關。以下我們對此一公式做一些直觀的解說。當 S_t 遞增時, $d_{t\pm}$ 會跑到無限大去, 故 $\Phi(d_{t\pm})$ 會趨近到 1, 則極限值爲 $V_t(C)=S_t-Ke^{-r(T-t)}$, 此時選擇權的價格會和遠期契約 (forward contract) 的價格一致, 並且確定 (certain) 會在到期日 T 以 K 的價格執行合約。如果用同樣的方式來看 σ 趨近到 0, 也會得到相同的結果, 並且有風險的股票會和債券 (或將錢存在銀行) 具有相同的特性。當時間 $t\to T$ (即將到期) 和 $S_t>K$, 則 $d_{t\pm}\to+\infty$, $e^{-r(T-t)}\to 1$, 因此 $V_t(C)\to S_t-K$; 反之, 若 $S_t<K$, $d_{t\pm}=-\infty$, 則 $V_t(C)\to 0$, 亦成立。故當 $t\to T$, 如我們所預期的有 $V_t(C)\to(S_t-K)^+$。

在 Black-Scholes 公式 (4.3) 中, 一個很有趣的現象是 “歐式選擇權的定價與 μ 無關”。從數學的角度來看, 是因爲我們知道 μ 在 Black-Scholes 公式中並沒有用到, 其原因是在我們消去偏微分方程 (PDE) 公式中的 μ。但這種說法並不非常直觀, 故要了解歐式選擇權的定價與 μ 無關最好的方式可藉由二項套利 (binomial arbitrage) 的概念得到 (見上期陳宏和郭震坤的文章)。我們發現股價上升、下降的機率和計算套利價格是不相干的, 並且在多期二項模型也可發現相同的現象。在多期的模型中, 可很快導致隨機漫步, 並從隨機漫步導致布朗運動及 Black-Scholes 公式。這都說明了當預期報酬率 μ 和二項模型無關, 故在取極限之後的連續時間模型中也是如此。

最後我們將 Black-Scholes 公式與微積分中的微分作一個簡單的類比。讀者或許注意到一個有趣的現象是, 衍生性金融商品 (derivatives) 和微積分中的微分 (derivative) 的英文是相同的。這是否說明它們本質上也有些相關性呢? 我們可從以下的直觀來看:

首先將 (4.1) 用以下的形式表示

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}. \tag{4.6}$$

然後我們可將 $\ln \frac{S_t}{S_0}$ 看成是一廣義的線性函數 f, 即可寫成 $f(x) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma x$ 的形式, 其中 x 表隨機性, 時間 t 固定而略去不計。在 (4.6) 中, μ 與 σ 是描述股價的兩個未知參數。讀者也注意到 (4.3) 式中之 S_0, K, T 與 r 皆爲已知, σ 是唯一的未知參數。本章前言所提的風險中立測度可看成將 $f(x)$ 做平移使其經過原點, 而計算其選擇權價格即相當於對函數 f 做 “廣義微分” $f'(x) = \sigma$ (線性函數的微分與斜率有關而與位置無關)。這也是對 “歐式選擇權的定價與 μ 無關”的另一種解釋。

5. 結論

從數學及統計的觀點來說, 財務數學及財務統計的主要工作是

(a) 找一個描述資產價格, 例如股票、債券、外匯等的 (隨機) 函數。

(b) 求其 “微分 (derivative)”, 即對衍生性金融商品 (derivatives) 定價。

統計模型 (即隨機函數) 的選取上, 我們經常碰到 “模型簡單” 與 “現實描述” 左右爲難 (dilemma) 的情況。一方面, 我們希望模型簡單以便得到數學上的結果; 另一方面, 我們又希望模型能確實的反應現實狀況。本文介紹了一個簡單又貼切的模型 (隨機函數) “幾何布朗運動”。並在此模型之下, 介紹了歐式選擇權的定價及其直觀的解說。

雖然在描述股價的走勢上, 幾何布朗運動是一個大多數人都可接受的模型。但實際的數據分析卻顯現出它有一些缺點 (在此無法敍述)。因而一些修正的模型, 例如: stochastic volatility models, (G)ARCH models, jump diffusion models 等, 皆被提出以做爲更精確的描述。這類的研究工作, 現今被統稱爲計量財務 (quantitative finance)。

在衍生性金融商品的交易中, 除了歐式選擇權之外, 現今市場上最普遍的是美式選擇權 (American option) (即持有者可在合約時間範圍內的任何時間去執行合約), 以及其它各式各樣的奇異選擇權 (exotic options) (在美國華爾街 (Wall Street) 市場上, 有上百種不同的選擇權)。這些選擇權的定價 (即求各式各樣的 “廣義微分”) 是現今很熱門的課題。除了少數的幾種選擇權之外, 其它的大都沒有解析解, 故利用電子計算機來求數值解是很重要的。當然, 在諸多不同的模型之下, 求各式各樣選擇權的定價是現今很重要的課題。這也是一般所稱的財務工程 (financial engineering), 它是結合財務、數學、統計與電算的一門學科。

本節最後, 我們列舉3本書, 以供有興趣的讀者做進一步的探討。

Hull (2000): 本書爲財務工程的基本教科書 (相關科系之大四或研一課程)。介紹金融市場及其衍生性金融商品的定價原理。

Pliska (2000): 本書利用簡易的數學模型 (非測度的機率論) 去描述金融市場, 適合具有數學

背景的大四或研一學生。

Shiryayev (1999): 本書對財務數學與財務統計有較深入的探討, 適合具數學和統計背景的研究生及專業人士。

致謝詞: 作者感謝趙民德博士及王仁和先生所給予的協助, 也感謝審稿人的建議, 提高了本文的可讀性。

參考資料

1. L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, **17** (1900), 21-86.
2. F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, **81**(1973), 637-659.
3. A. Cowles, *Can stock market forecasters forecast*? Econometrica, **1**(1933), 309-324.
4. A. Cowles and H. E. John, *Some a posteriori probabilities in stock market action*, Econometrica, **5**(1937), 280-294.
5. E. F. Fama, *Efficient capital market: A review of history and empirical work*, Journal of Finance, **25**(1970), 383-417.
6. J. Hull, Options, Futures and Other Securities, 4^{th} ed. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
7. M. G. Kendall, *The analysis of economic time-series, Part 1. Prices*, Journal of the Royal Statistical Society, **96**(1953), 11-25.
8. R. C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, **4**(1973), 141-183.
9. S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Model*, Blackwell, Great Britain, 2000.
10. P. A. Samuelson, *Proof that property anticipated prices fluctuate randomly*, Industrial Management Review, **6**(1965), 41-49.
11. A. N. Shiryayev, *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore, 1999.
12. H. Working, *A random-difference series for use in the analysis of time series*, Journal of the American Statistical Association, **29**(1934), 11-24.

—本文作者任職中央研究院統計科學研究所—