

# 幹嘛學數學

石厚高

「Strength in Numbers by Sherman K. Stein」是斯坦近作，坊間有中譯本「幹嘛學數學」。本書譯文順暢，談數學趣味引人入勝，談數學教育弊端也很中肯。

作者談他女兒的老師，很有意思。他的女兒蘇珊娜讀小學五年級的時候，她的老師別科雖然教得很好，但顯然不喜歡教數學。數學課常被挪用，有時好幾天都沒有上一次數學。斯坦去學校拜訪老師，建議由他定期到校協助數學課的教學，當然受到歡迎。

可見美國小學老師是樣樣都教的，要能樣樣精通是很難的，真要能樣樣精通也就樣樣希鬆了。民國七十三年四月九日民生報報導，美國中學缺乏數理老師，任教者百分之三十不適任。這是當時全美科學教師協會的調查結果，該會指出美國高中裡，每十位科學及數學教師裡就有三人「完全不適合或嚴重不適合」擔任這些課程。在對大會提出的報告裡又說由於過去十二年來，願意從事科學與數學教學的學生人數減少了百分之六十七，而使得危機益形加重。

談到數學在就業時的應用，斯坦表示數學是很多職業裡的一種工具，每三個高所得

的工作中，大概有兩個需要比算術更高深的數學。而那些較低所得工作中，只有十分之一有此需求。他舉了個例子，很讓學數學的覺得不可思議。

第19章「錢憑空而來」談到美國聯邦銀行要求各銀行，保留存款的固定比例作準備金，其餘的錢銀行可以借出去。為了計算方便，我們假設必需保留存款的百分之20%即 $1/5$ ，剩下的百分之80%也就是 $4/5$ 可以出借。仔細看看發生了什麼事。這部份斯坦本來也難以置信，直到印成書他才相信。

假設布洛走進信心銀行，存1000元。銀行保留了200元，將其餘的800元（1000元的 $4/5$ ）借給杜爾。杜爾又把這800元存進信心銀行或另一家銀行。銀行保留了800元的百分之二十，又把剩下的640元（800元的 $4/5$ ）借給愛麗絲。

這時魔術表演開始了。布洛認為自己有1000元，杜爾自認有800元，而愛麗絲自認有640元。在開始的時候，本來只有布洛的1000元，現在總數變成 $1000 + 800 + 640 = 2440$ 元，憑空多出許多錢來，這是很高明的手法。

而且銀行不但創造出一些錢來，還可以用它來生利息。顯然開銀行是一種很不錯的生意。

現在愛麗絲存入她的640元。銀行又把512元(640元的 $4/5$ )借給李納斯，李納斯接著存409.6元，如此繼續以至無窮，故得

$$1000+1000(4/5)+1000(4/5)^2+\dots=5000$$

於是布洛、杜爾、愛麗絲與李納斯等人，還有以後的人會認為他們總共有5000元。開始時只要有1000元，長期就會有5000元。如果不信，斯坦建議大家找一本中級經濟學看看。

負負得正是個不好接受的觀念，第25章「爲什麼負負得正？」用四種方式詮釋，它們是從分配律、指數律的積、方程式的圖形與物理世界的蹺蹺板作說明，講得很精彩，初中學生從這四種方式的任一種都可以欣然接受負負得正了。講了四種方法當然是了然於胸了，好像電視廣告「用了本公司的化妝品，高中女老師變成高中女同學」，一遍又一遍硬給你灌進去讓你記住。

本書談到美國的數學改革，很值得本地借鏡。看看第12章「所有改革都到哪裡去了？」的題目，就可以知道斯坦對這些改革是很不以為然的。每次改革都有個響亮的名號，1950年代「回歸基礎」、1960年代「新數學」、1970年代又「回歸基礎」、1980年代「解決問題」以及1990年代「團體學習」。而改革運動會引起多大的回響，就要看提倡者有多大的熱忱了。在宣導上能否把改革的理念說得很清楚？有沒有本事拿到大筆補助款。斯坦說「回顧以前那些改革行動，我對那些改革者能前仆後繼，不斷推動這個改革的破輪胎前

進，實在印象深刻。」回想本地數學教育作了四次改革，是在民國54、62、74與88年，前三次已經是過去式了，問問歷經這些改革的數學老師，他、她們會表示譽少毀多而不是毀譽參半。

顏元叔主編「閱讀精選」有一篇 Education: high schools under fire 有一段是「To search for ways to improve schools without flash-in-the-pan innovations」註解是 flash-in-the-pan 轉眼消逝的改革，在熱鍋內的油突然冒火，表示熱一陣就熄滅了的作爲。

徐城北著「梅蘭芳與中國文化」商鼎出版，在(二胡與加速度)一節裡說「從清末民初直到如今，京劇的各個方面都變化很大...以樂隊來說，梅蘭芳一九二三年在排演「西施」時，爲了豐富樂隊的音色，經過反覆的調試，決定增加一把二胡...他怎會想到這一改動馬上就被肯定下來...梅蘭芳一生當中，確有許多類如增加二胡這樣似小實大的改革例子。他改舊戲或是排新戲，變動總是一次只來一點兒，而且每次都抱著“試一試”的態度——如果觀衆歡迎就肯定下來，如果觀衆提出異議，就不妨暫時放棄。表面上看梅蘭芳改革的加速度不算大——他從沒有在某一天讓熟悉自己的觀衆看到一個面目全非的梅蘭芳；但這加速度卻長期保持著，不顯山不露水地一點點兒加大。成名後雖然長期唱大軸但仍是一點點的在自己的改革之路上面往前舉步。這樣的「大」才是真「大」，才是穩健的「大」，才是準確的「大」。梅蘭芳的改革很值得教育官員借鏡。

這裡我想再舉兩個例子說明不適當的改革帶來的禍端。民國七十一、二年間教育部下令建中率先開辦資優教育，可是只給了大原則而沒有「執行細則」。建中的教學組長是位數學老師，他挑高一新生聯考數學一百二十分也就是滿分的編成一班，名之曰「資優班」。高一升高二時「資優班」四名學生自動退學。爲什麼？因爲以前我八十幾分都是全班第一名，現在我八十幾分是倒數第幾名。他們活不下去了所以走路。數學科開教學研究會時，某老師提出「這種作法是否有待商榷？」教學組長滿臉通紅「再研究再研究」。去年（民國八十八年）一位某高中「資優女生」要跳樓，大家在樓下喊不要跳不要跳，她還是跳下來送醫不治。爲了什麼，因爲她在初中都是第一名，讀高中分在「資優班」考第二十幾名，所以她覺得「對不起父母、對不起老師……」跳了樓。是誰殺了她？當然是教育部。這個弊端很容易解決，可以辦資優教育，不能集中編「資優班」。各校爲什麼熱中編「資優班」，因爲有了「資優班」教育部就給經費。我很不想寫這一段，我實在不願意因爲本文而妨害有關人士的利益。

當然有些改革是很有意義的，第12章裡有一節「貝尼澤特小實驗」很值得教育界多研究研究。1929年，在紐約的綺色佳 (Ithaca) 舉行了一場校長會議……新罕布夏州曼徹斯特的校長貝尼澤特 (L. Benezet) 寫信回應：「讓孩子花八年的時間才學會一般數學，是沒有意義的。數學課程可以延遲到國中才教，正常學生只要花兩年功夫就能學會。」這項改革深獲我心，小學不要學數學，只要把國語

文，音樂，美術與運動弄好就行了，「上學」應該是很快樂的事。可是如果我作教育部長，我不會貿然實施這種改革。因爲問題很多很大，例如有些學生小學讀了一、二年，就要幫助家計學業中斷；有的搬家或移民，沒有學數學吃虧很大。所以小學一、二年級不教數學「貝尼澤特的改革完全從舞台上消失得無影無蹤。」這一段在97、98頁。

斯坦舉了些大器晚成的例子，如懷爾斯 (Andrew Wiles) 在1994年41歲的時候經過八年的努力，解決了有三百年歷史的數學難題「費馬大定理」。1976年，黑肯 (Wolfgang Haken) 48歲，阿培爾 (Kenneth Appel) 46歲，二人合力解決了「四色問題」。1983年，德布蘭吉斯 (Louis de Branges) 52歲證實了比伯巴哈 (Bieberbach) 在複數分析上的一項推測。阿培里 (Roger) 六十多歲於1977年證明了所有正整數立方的倒數和不是一個分數等。更有趣的是他說「身體健康、家庭幸福、儘量避免繁重的行政工作，可能是數學長期創造力的關鍵要素」，其實很容易理解，我國有句話說「一作行政便不足觀」，作行政就沒有自己研究的時間了。

馮諾曼 (Von Neumann) 曾說數學家三十歲就完蛋了，等他年事稍長就一再追加成三十五、五十、五十五。大家都以爲數學家要早早成功，過了三十歲就完了，其實沒有這回事。年長數學家作品有較寬視野，而年輕人作的是一個又一個的單一難題。美國人說過不要相信三十歲以上的人說的話，現在聽說美國人也比較敬老了。

斯坦表示如果學子們接觸到的數學只是一長串枯燥的計算，只是每天分配到幾頁一

定作完的習題，或只是一堆沒有好好解釋的難懂規則，那麼你看到的是最不幸的景像。這時候數學對你只是折磨、只是處罰，你一定會自怨自艾的。其實你也有權利埋怨你的老師，埋怨數學課本。

本書要傳播數學的正確觀念給每一個人。對於那些在學校裡有不愉快經驗而放棄數學，或漠不關心數學的人，斯坦希望能把他拉回最初的邂逅點，或對數學一見鐘情。至於那些喜歡數學的人，斯坦希望本書所舉的事例能充分表現出數學之美與數學的價值，進而加深他們對數學的熱愛。

我列出本書的目錄與數播讀者共享。

### 第一部 數學這玩意

1. 數學的許多面貌
2. 冷數字的咒語
3. 熱數字
4. 不要編個數字在我頭上
5. 經驗 vs. 統計數字
6. 事情不一定是這樣的
7. 敏捷的白癡
8. 發明之母
9. 職業究竟是什麼？
10. 那裡面有哪些數學？
11. 行動症候群
12. 所有改革都到哪裡去了？
13. 溫和的直爽的建議

### 第二部 國民數學須知

14. 怎麼讀數學
15. 你永遠看不到一個大數
16. 汽車與兩隻山羊
17. 兩數字之間的五種運算
18. 級數的總和

19. 錢憑空而來
20. 對於分數應該知道的事
21. 每個數都是分數嗎？
22. 直角三角形的三邊
23. 圓周率只是個小玩意？
24. 把方程式變成圖形
25. 為什麼負負得正？
26. 無窮大也有大小之分？

### 第三部 真理近了

27. 0分之0
28. 曲線有多斜
29. 想辦法計算曲線下的面積
30. 求得曲線下的面積
31. 圓與所有的奇數
32. 數學之美

斯坦另有名著 MATHEMATICS—The Man-made Universe, 坊間似無中譯本。我挑幾句序裡的話作個簡介

This book grew out of a college course designed primarily to give students in many fields an appreciation of the beauty, extent, and vitality of mathematics. I had searched several years for a suitable text, but those I found were either too advanced or too specialized.

The subjects, chosen from number theory, topology, set theory, geometry, algebra, and analysis, can be presented to the reader having little mathematical background (some chapters use only grammar school arithmetic). Each topic illustrates some significant idea and lends itself easily to experiments and problems.

—本文作者曾任教於建國中學，現已退休—