我是怎樣應用MM 方式[1]組織教學的

周家禧

摘要: 本文對 MM 方式作了簡介, 並闡述了如何操作 MM 因子, 設計數學課的基本課型, 充分發揮數學教育的技術教育功能與文化教育功能, 全面提高學生的數學素質。

一、MM 方式簡介

MM方式即數學方法論的數學教育方式的簡稱, 許多專家學者借鑑了美籍匈牙利數學教育家 G. Polya 用數學方法論改革數學教育, 提高了美國數學教育水平的經驗, 舉辦了多期 G. Polya 教學思想研討會。1988年徐利治教授提出要用 G. Polya 思想改革數學教材和教法, 要培養 G. Polya 型教育工作者, 把數學方法論的原則貫徹到數學教學中去。

無錫市教育科學研究所徐瀝泉先生審時度勢, 於1989年5月設計了「貫徹數學方法論的教育方式, 全面提高學生素質」數學教育實驗 (簡稱“MM 實驗”)。經過5年的實驗, 在1994年5月以中國科學院院士原北京師範大學校長王梓坤教授與中科院數學所顧問徐利治教授爲首的專家組進行了鑑定, 並進行了高度評價, 認爲“該實驗所確定的 MM 方式。只要對原有教材適當進行加工, 操作簡便, 能與各種優秀教學方法協同使用, 既能減輕師生負擔, 又能提高教學效益, 從而大幅提高數學教學質量。”

鑑定組認爲:“這種數學教育方法在小學中學以及職教和成人教育中, 都是可行的、有效的, 值得繼續實驗和大力推廣。”

二、MM 方式的科學性

學習數學首先要有正確的數學觀, 了解數學的心理規律, 要有求眞、完善、求簡潔、對稱和諧的審美意識[1]。

離開了這些最本原的基礎, 學好數學就成了一句空話。比如學生若沒有正確的數學觀, 把數學看成一堆符號和法則, 因而採取死記硬背, 依樣摹仿的形式來學習, 如果沒有正

1. MM 是 Mathematical methodology 的縮寫, MM 方式指數學方法論的數學方式。

確的審美觀, 把雜亂無章、隨意塗抹認爲是瀟灑美觀, 沒有求眞、求善、求簡的習慣, 那麼不管是誰, 無論花多少時間, 也是學不好數學的。

所以 MM 方式把科學的數學觀, 數學中的反璞眞的教育, 數學中的美育, 數學心理學教育以及數學史, 數學家成長史作爲宏觀可控變量, 用來設計數學課型與教法, 這就使數學教學有了科學的理論基礎。

現代認知心理學的研究成果表明: 人類對邏輯、數學、物理的認識, 都是不斷建構的產物。"全部數學可以按結構的建構來考慮" [2]。"建構的過程除最初階段少量外部活動外, 主要是內部的心理活動, 是一系列思維動作的內部操作" [3]。這就離不開數學方法論中的微觀因子: 即合情推理, 邏輯推理, 和一般解題方法的研究, 這些作爲學生思維活動的必要工具。

所以 MM 方式又把數學方法論中的微觀因子分解出來作爲可控變量來指導學生的數學活動, 讓學生在思維活動的過程中, 不斷擴大自己的認知結構, 從而通過發現, 發明的方式來學數學, 旣獲得知識, 又增長智力與能力。

於是 MM 方式設計了如下操作表 (可省略, 詳見參考文獻1)

<table>
<tr><th></th><th></th><th>MM 因子</th><th>MM 可控變量</th><th>水平</th><th>MM 狀態變量</th><th>水平</th></tr>
<tr><td rowspan="8">數學方法論的教育方式</td><td rowspan="5">宏觀操作</td><td>數學的對象及性質研究</td><td>數學的反璞歸眞教育
密切聯繫生活
提倡問題解決</td><td></td><td>數學意識
應用能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學美學方法研究</td><td>數學教學中的美育
運用審美原則
引進美學機制</td><td></td><td>數學美感
審美能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學發明心理學的研究</td><td>數學發現法教育
揭示創造活動
再造心智過程</td><td></td><td>數學機智
創新能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學家成長規律的研究</td><td>數學家優秀品質教育
介紹生平事跡
分析成敗緣由</td><td></td><td>科學態度
競技能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學史與數學教育史的研究</td><td>數學史教育
巧用數學史料
編制軼事趣聞</td><td></td><td>唯物史觀
洞察能力</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">微觀操作</td><td>觀察、實驗、歸納、類比、聯想、猜測等合情推理的方法</td><td>合情推理的教學
教 (學) 猜想、教學 (學) 發現</td><td></td><td>合理推理能力, 一般科學思維方式, 形象思維能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學模型法、公理化方法和抽象分析法等邏輯推理方法</td><td>邏輯推理的教學
教 (學) 證明, 教 (學) 反駁</td><td></td><td>邏輯思維能力, 具體事物數學化的本領</td><td></td></tr>
<tr><td>徐利治“RMI”原則, 波利亞解題模式等一般解題方法研究</td><td>一般解題方法的教學
教 (學) 規則, 教 (學) 策略教 (學) 算法, 教 (學) 應變</td><td></td><td>運籌計算能力, 數學智力活動, 結構和綜合應用能力</td><td></td></tr>
</table>

MM方式根據表中的 MM 因子和可控變量來設計課型教法, 這就表明 MM 方式具有嚴格的科學根據與理論系統性。

在此基礎上 MM 方式提出了自己的教學原則、目標和措施, 就是:“在數學教學中要充分發揮兩個功能 — 數學的科學技術功能和文化教育功能; 貫徹兩個原則 — ‘教學·研究·發現’同步協調原則和‘既教證明又教猜想’原則; 瞄準三個具體目標 — 引導學生不斷自我增進一般科學素養, 提高他們的社會文化修養, 形成和發展數學品質; 自覺地恰當地操作八個變量 — 數學的反璞歸眞教育、數學教學中的美育、數學發現法教育、數學家優秀品質教育、數學史教育和數學中的合情推理、邏輯推理一般解題方法的教學”。[4]

三、用 MM 方式組織教學

3.1 操作八個變量, 優化三種課型

3.1.1 “反璞歸真”的概念課

按現代觀點, 數學應當被定義爲模式的科學, 人們爲了在純粹狀態下研究與解決問題, 把與問題無關的一切因素放在一邊, 創造了呈現極端抽象形式的數學模式。然而數學教學若僅僅是教師向學生傳授這些抽象的概

念、定義、符號與法則的話, 就會把數學中最寶貴的創造過程給弄丟了, 恰似入寶山而空返。這樣的教學必然使學生感到數學就是一堆毫無生氣的教條, 既枯燥無味, 又難以理解。

所以數學教學首先要讓數學恢復其本來面目。恢復其創造過程中的形式, 進行所謂反璞歸眞的改革, 才能通過學生自己的發現與創造學習教學。

要讓學生像數學家一樣親自來發現與創造數學模式似乎不可能。

但認知心理學揭示了人們學習數學是不斷建構的過程。當學生原有認知結構與外界數學新情境基本相符時, 學生可以通過同化和順應的方式來擴大自己的認知結構, 通過主動建構來學數學, 體驗數學家發明與創造的喜悅是完全可以的, 而且也只有這樣, 才能在教學中落實學生發現、發明與創新。

3.1.1.1 利用學生原有認知結構同化新情境

爲了讓學生掌握新概念、新模式, 傳統教法總是先作各種鋪墊, 讓學生跟著教師的步子被動的承認與摹仿, 但最終還是改變不了知其然不知其所以然的一知半解的局面。

MM方式卻能另僻蹊徑, 根據認知論原理與美學原理, 讓學生自己主動發現新知識。

例如在教三角函數的誘導公式一節時, 我們作了如下設計:

先給出單位圓上的點 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, 然後指著單位圓對同學說, 幾何學家認爲圓是最美的, 爲什麼? 同學們說因爲圓是最對稱的圖形, 比如關於 x 軸、y 軸、原點, 還有直線 $y=x$, $y=-x$ 都對稱等等。我對同學們說, 回答很正確, 那麼請大家根據所學過的知識, 把 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 關於 x 軸、y 軸、原點, 還有直線 $y=x$, $y=-x$ 的對稱點寫出來, 若把這裡所示的對稱點分別記作 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 它們的坐標如何, 讓學生以練習的形式寫了 $P_1(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$, $P_2(-\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $P_3(-\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$, $P_4(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$, $P_5(-\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$。

然後讓大家考慮, 當我們把角的概念推廣之後, $-\alpha$ 與 α 的位置關係如何, 同學們立即發現關於 x 軸對稱, 然後再讓大家聯想, $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 是否還可以用另一種形式寫出上述對稱點, 同學們經考慮後很順利地寫下了 $P_1\,[\,(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\,]$, $P_2[\cos(180^\circ-\alpha), \sin(180^\circ-\alpha)\,]$, $P_3\,[\cos(180^\circ+\alpha), \sin(180^\circ+\alpha)\,]$, $P_4\,[\cos(90^\circ-\alpha), \sin(90^\circ-\alpha)]$, $P_5[\cos(270^\circ-\alpha), \sin(270^\circ-\alpha)]$。

這時讓大家通過數形結合, 觀察發現, 根據同一點坐標應相同的道理, 很快發現了:

$$\begin{cases}\cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha\\ \sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha\\ \sin(270^\circ-\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

繼而又根據兩次對稱的規律找到了

$$\begin{cases}\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\\ \sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha\\ \sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$$

這7組基本公式, 並由此很快推出 $-\alpha$, $180^\circ\pm\alpha$, $90^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$ 的所有誘導公式, 僅一節課就完成課本上3節的內容, 且課堂上氣氛非常活躍, 學生的興趣十分濃厚, 同學們既學得知識, 又增長能力, 同時還充分享受了發現的喜悅, 加強了對數學的熱愛。

3.1.1.2 通過變換方式, 把新情境轉化為學生原有認知結構的圖式 (格局) 中

在傳統數學教學中, 教師往往不易察覺學生對新知識不理解, 但有時即使知道了也無能爲力, 比如對數學歸納法的教學, 幾乎所有的教材都是以突然呈現的形式引入兩條證題法則, 使學生無法理解。

有的教師爲了讓學生理解證題規律, 作了許多鋪墊, 先講了很多關於傳遞現象的實例, 比如報數、傳口令、放鞭炮等例子, 但只要一接觸“假設 $n=k$ 成立, 證明 $n=k+1$ 也成立時”學生就感到不理解了。

從皮亞杰的發生認識論原理來看, 這是很正常的, 因爲在學生的認知結構中根本不存在這種類似遞推的證題的格局 (圖式), 所以無論如何用比喻來解釋, 學生也無法把新情境同化於自己的認知結構, 或改變結構來順應新情境。

MM方式則從數學中的等價變換出發, 把新情境巧妙地轉化爲學生原有認知結構中的圖式。從而創造了讓學生親自發現數學歸納法的教法。這對數學教學來說無疑是一個開創性的貢獻。

例如: 我在教數學歸納法時, 在介紹了不完全歸納與完全歸納之後, 就向學生提出: 要讓一個對一切自然數都成立的命題, 是否可以用完全歸納來一個個地驗證? 比如:

證: $1+3+4\cdots+(2n-1)=n^2$

當 $n=1, 2, 3, 4$ 時, 有: $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$, 是極易驗證, 但對一切 $n\in N$ 是否可無限地驗證下去? 這時全班同學一致回答不行! 因這樣驗下去永遠也驗不完。

這時我讓大家考慮, 能否有好辦法解決這個困難?

首先觀察一下, 上述驗證中有無重複計算可省略? 比如我們做了 $1+3=2^2$ 後, 再做 $1+3+5=3^2$ 時, 其中 $1+3$ 是否還要再算一次? 大家說: 不用了。這樣我們就可得到化簡後的驗證形式:

$n=1$ 時 $1=1^2$, $n=2$ 時 $1+3=1^2+(2\cdot1+1^2)=2^2$, $n=3$ 時 $1+3+5=2^2+(2\cdot2+1^2)=3^2$, $n=4$ 時 $1+3+5+7=3^2+(2\cdot3+1^2)=4^2$ 等等, 接著我問同學們, 這些運算是否有共同規律, 是否能用數學形式概括出一般驗證算式? 類比於對表示加法交換律的無數個算式: $1+2=2+1$, $7+8=8+7$ ...... 等等, 概括成一般形式即 $a+b=b+a$。

經大家認眞觀察分析, 類比聯想, 很快就發現了這無限個算式都遵循著統一的法則: 即用 $n=1$ 成立的結論來證 $n=2$ 命題也

成立, 再用 $n=2$ 成立的結論證 $n=3$ 命題也成立, 再用 $n=3$ 成立的結論證 $n=4$ 命題也成立等等。這樣讓學生自己把此規則寫成一般形式, 大部分學生都很快寫出用 $n=k$ 時 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ 成立的結論, 證 $n=k+1$ 時命題也成立, 其算式就是

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\ &=k^2+2k+1\\ &=(k+1)^2 \quad (k=1,2,3,\ldots).\end{aligned}$$

類比加法交換律的表示使學生很容易理解這一個算式就概括了無限多個算式, 但 $n=1$ 時 (或 $n=n_0$ 時) 命題成立的結論, 必須獨立驗證, 因爲只有 $n=1$ 或 ($n=n_0$ 時) 命題成立被證實之後, 其後的無限個驗證才有理由概括爲上述一般形式。

這樣, 我們就帶領學生通過觀察、發現、類比、聯想、抽象、概括的方式親自發現了這個數學歸納法, 這與歐拉解決“七橋”問題, 圖靈揭示計算的本質所使用的抽象分析法在本質上是一致的。MM方式的優越性就在於它能根據心理學規律, 巧妙應用數學的方法和技巧, 充分調動學生的積極性, 發揮其主體作用, 把讓學生獲得知識的過程變爲訓練其應用數學解決問題的能力與創造能力的過程。

3.1.2 “問題解決”的習題課

美國數學家哈而莫斯 (P. R. Halmos) 認爲問題是數學的心臟, G. Polya 認爲: “掌握數學就意味著善於解題”[5], 所以習題課在數學教學中占有舉足輕重的地位。

據現代心理學的研究, 問題解決就是受目標指引的認知操作序列, 分爲需要開發新步驟的創造性問題解決與使用現成步驟的常規性問題解決。

爲了幫助學生掌握和熟悉有關定理、定義和運算法則的習題, 屬常規性問題解決類型, 傳統的教育方式是對這部份問題採用: 給出的問題, 通過模仿、分類練習, 以達熟練的目的。

對創造性的問題解決, 傳統的教材教學中幾乎見不到。

數學方法論指出, 任何數學中的發現創造都離不開合情推理, 即用觀察、類比、聯想、猜測的方式來發現新方法、新規律的推理, 以及普遍化、特殊化, 不完全歸納等探索方式, 所以我們把習題課的重點放在既教證明, 又教猜想, 努力提高學生創造性解題這一目的上。

例如: 已知 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$, $a\cos\beta=b\sin\beta=c$, 求證:

$$\frac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}(\alpha\neq\beta)$$

按常規性解題方式即從形式上由條件向結論逐步轉化就是由題設:

$$\begin{aligned}&a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta\Rightarrow\\ &\frac{b}{\cos\alpha-\cos\beta}=\frac{a}{\sin\beta-\sin\alpha}\Rightarrow\\ &\frac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\Rightarrow\\ &\frac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\\ &\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha}=\frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha}\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a\cos\alpha + b\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

按創造性解題方式即用觀察、猜想發現的規律來完成從條件向結論的轉化。

首先, 我們要求學生把觀察到的條件概括一下, 則可概括成 $ax_1+by_1 = c$, $ax_2+by_2 = c$。問同學們由此聯想到什麼? 學生說: 題設表明直線 $ax + by = c$, 經過 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 兩點, 結論形式

$$\frac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (\alpha\neq\beta)$$

在與直線有關的公式中與什麼關係式很相似? 同學們很快聯想到, 這是兩直線重合, 對應係數成比例的形式, 這時我鼓勵同學們提出自己的的解題方案。很多同學踴躍地提出自己的看法, 認爲題設條件是以一般式給出的直線過兩點, 因而其兩點式與一般式都表示同一直線, 因而對應係數成比例, 這就是結論形式。這個由觀察、猜想得到的見解是否正確? 我讓大家動腦動手, 來完成對猜想的證明, 結果絕大部分同學都能證實自己的猜想, 完成本題的證明。

實際上, 由題設點 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 與 $(\cos\beta, \sin\beta)$ 在直線 $ax + by = c$ 上, 於是用直線的兩點式來表示它並化簡即得 $(\sin\beta - \sin\alpha)x + (\cos\alpha - \cos\beta)y = \sin(\beta - \alpha)$, 於是由 $\frac{a}{\sin\beta-\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha-\cos\beta} = \frac{c}{\sin(\beta-\alpha)}$, 即得所證。

實踐證明, 教會學生用自己發現的規律與方法解題一方面使學生享受到發現的喜悅, 使他們的創造才能得以展現, 這種體現能養成他們善思的習慣, 有效地提高其思維能力。另一方面, 學生對未曾見過的問題也必須通過猜想 — 證明的方式求解, 這對教會學生獨立解題, 起著至關重要的作用。

3.1.3 “由厚到薄”的復習課

中國著名數學家華羅庚曾指出: 學數學應有一個“由厚到薄”的過程。即把所學的知識消化、理解、概括爲最簡原理與法則的過程, 他曾舉例說他上中學時學習了很多解二元一次方程組的方法, 比如加減法、代入法、行列式法等等。以後經過一段時間的理解與體會, 悟出了其目的是爲了消去未知數, 即數學中的消元思想, 這就是由厚變薄! 這個消元思想的應用就更廣泛。這正如李政道教授指出的:“定律闡述越簡單, 應用越廣泛, 科學就越深刻。”[6]

在復習課上帶領學生對所學過的知識進行進一步整理, 抽象概括, 一方面能有效訓練學生的抽象概括能力, 另一方面通過整理概括加深了學生對知識的理解與認識, 從而也提高了他們應用知識的能力。

比如, 學習數列求和之後, 在復習課上對求和方法進行了分類整理。比如: 倒序相加、錯位相減、裂項求和、分解組合等等, 但是否存在一種普遍適用的方法來統一上述各種形式, 從而揭示求和的實質?

我們通過分析, 幫助同學們發現裂項或把通項化爲一個函數的差分規律都反應了事物間相反相成的規律即 $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ 是普遍適用的求和法。

因爲對等差數列:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= a_1 + [\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}]d,$$

則

$$\sum a_n = na_1 + \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 3\cdot 2 - 2\cdot 1 + \cdots n(n-1) - (n-1)(n-2)}{2}d$$
$$= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

對等比數列 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 當 $q = 1$ 時, $\sum a_n = na_1$, 當 $q \neq 1$ 時,

$$a_n = a_1 q^{n-1}\frac{1-q}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}(q^{n-1} - q^n),$$
$$\sum a_n = \frac{a_1}{1-q}(q^0 - q^1 + q^1 - q^2 \cdots + q^{(n-1)} - q^n)$$
$$= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q};$$

對等差數列的和

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$
$$= \frac{n(n+1) - n(n-1)}{2}a_1 + \frac{(n+1)n(n-1) - n(n-1)(n-2)}{6}d,$$
$$\sum S_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6}d$$

等等。

於是總結出求和化作差的規律, 同時聯想到求數列前幾項之積則應化成商。即把 a_n 寫成 $a_n = \frac{b_{(n+1)}}{b_n}$, 於是有 $\Pi a_n = \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_{(n+1)}}{b_n} = \frac{b_{(n+1)}}{b_1}$, 這些規律, 這樣就可幫助同學們以更高的層次來認識求和。

對各個知識點也可進行進一步抽象與概括, 比如等差數列性質可一次函數概括, 其和的性質可用二次函數概括, 等比數列可用指數函數概括, 數列求和可用函數的差分求和概括, 平均值不等式的定理, 又可用冪平均函數的性質來概括, 等等。由此總結出函數思想應用的廣闊性, 讓學生養成函數思想處理問題的習慣。

事實證明“由厚到薄”的復習方式正是數學方法論中的抽象分法在教學中的應用, 能有效地使學生通過不斷總結, 來提高自己的認識能力, 理解能力與處理問題的能力。

3.2 充分發揮數學的文化教育功能

徐利治教授指出: “數學教育本應同時具有文化教育功能與技術教育功能兩個方面” [7]。MM教育方式要求我們: “不應把數學單純地理解爲一門工具學科, 而應該把它當做一種文化形態來對待, 把數學作爲提高公民素質的重要手段, 在數學教學中致力於提高人們一般文化修養。” [8]

3.2.1 在教書中育人, 在求真中立德

用 MM 方式講數學, 就要不失時機地向同學們宣講數學的重要意義, 介紹今日數學及其應用。

今天, 數學已不僅僅是一門工具學科, 它在科技的前沿已直接發揮作用, 隨著現代信息技術的出現, 現代工業數學的興起和電子計算機革命的創新、普及和廣泛應用, 數學已經把科學、技術和文化融爲一體, 正以嶄新的風貌, 改變著人們的思維方式和生活方式。“舊時王榭堂前燕, 飛入尋常百姓家”。數學, 它早已不再是少數手人手中的高深莫測的一門工具學科, 而已成爲爲全體公民服務的人類文明的重要組成部份。

華裔數學家, 國際數學大獎菲爾茲獎得主丘成桐教授在北大百周年校慶的講演報告中指出: “在傳統文化中 (更確切地說應是在

政治文化中), 我們說立德, 但卻從不討論如何求眞, 不求眞, 則何以立德。" 這話說得多精闢而深刻啊!

一般說來, 人們占有的知識越多, 內在的精神世界就越豐富, 道德自我意識就越發展, 對行爲的道德意義理解就越深刻, 而數學又是求眞與立德的最恰當不過的載體, 因爲數學的科學性和思想性是統一的, 而數學對於人類的教育作用是巨大的, 它能使人習慣於清楚地表述思想, 並嚴格地遵守規則。一個人創業精神、科學素養、工作作風、敏銳的洞察力和高超的決策技術等都可以在數學教育中得到訓練。廣而言之, 一個人的性格、毅力、興趣、氣宇風度甚至世界觀等等都可在數學教育中得到體現。

結論的明確無誤和思維過程的嚴謹精神是數學對於公民所提供的不可缺少的素養。數學教學中我經常利用數學具有嚴密的邏輯推理的特點, 培養學生養成對待問題能自覺地推理和尋根究底的習慣, 做到落筆有據, 言之有理, 使之形成嚴謹的治學精神, 嚴肅認眞的工作態度, 言必信, 行必果良好的道德品質。而學高爲師, 行正爲範, 要求學生做到的, 老師首先在課堂講授和板書中加以示範。

數學教學中不斷地引導學生掌握類比、聯想與化歸等合情推理的本領, 不僅有助於形成學生思維的一靈活性, 而且有助於提高學生應用數學知識解決實際問題的能力, 讓學生認識到事物是多方面聯繫的, 解決問題的方法不是單一的, 養成自覺建立聯繫, 調整思維方向的習慣, 也是每個公民應具備的素質。

在解題教學中, 如何教導學生面對繁重的計算任務能堅持計算到底的決心和具有克服困難的堅強毅力, 以及建立互幫到學合作攻關的協作精神, 也是教書育人, 求眞立德的具體表現。很難設想, 一個意志軟弱, 缺乏堅強毅力的人能圓滿地完成學習數學的任務, 具有較高的數學能力。

在數學教學中, 結合授課內容恰當地向學生介紹數學史和數學家的生平事跡, 及其對數學作出的貢獻, 可以讓學生了解到數學家在理論的研究和實踐過程中所經歷的艱苦、漫長而曲折的道路, 不僅讓學生獲得更多的知識, 又能讓他們獲得自強不息, 追求眞理與修正錯誤的勇氣。

陳景潤身居 (六尺) 陋室, 爲了摘取數學皇冠上的明珠, 而做出了常人難以想像的努力, 被外國專家們稱之爲移動了群山。華羅庚先生在異國講壇上溘然長逝, 給後人留下了感人肺腑的美德。

3.2.2 增進學生一般科學文化素養

在給學生課外指導, 面批作業, 談心教育以及給學生個別輔導時, 我不僅傳授數學知識, 更注重的是一般科學文化素質教育, 把教會學生導循哲學、心理學、美學等規律, 正確地閱讀、理解、觀察、思考、分析與處理問題放在重要位置; 並注重提高學生的藝術欣賞與審美能力, 對數學的學習要達到懂、化、用、賞, 四個層次, 利用數學美來激發學生興趣, 陶冶情操, 讓學生在求眞求實中變得更純潔, 心靈更完善。

在教會學生如何辯證地, 全面地觀察與思考問題時, 當場解答學生問題的言傳效果最好。

現想現推, 有意識地把自己置於解題的困境, 再從困境中解脫出來的教學過程, 讓學生看到老師的數學思維過程, 從而教會他們如何在探索中反饋信息, 調整思路, 找到正確的解題途徑, 這種教學方式讓學生受益最大。

例如: 我曾當衆解答學生的一道題, 對不全爲零的數 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 有 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=0$, $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0$, 求證: $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ 三點共線。

我對學生說: 此題就是要證: $k_{P_1P_2}=k_{P_1P_2}$, 即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ 或 $x_1=x_2=x_3$, 由題設不妨設 $\lambda_3\neq 0$, 則 $\lambda_1+\lambda_2=-\lambda_3\neq 0$, 於是有 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(\lambda_1+\lambda_2)x_3$, $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2=(\lambda_1+\lambda_2)y_3$, $\Rightarrow \frac{y_3}{x_3}=\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}$, 並試用此式推出上述所要求的形式。但作了很多努力都失敗了, 一度陷入困境, 這時自然想到問題出在何處? 當看到 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(\lambda_1+\lambda_2)x_3$ 時, 我情不自禁地對學生說:“衆里尋他千百度, 驀然回首, 那人卻在燈火闌珊處。”

大家看: $\lambda_1+\lambda_2=-\lambda_3\neq 0$, 所以 $x_3=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, 且 λ_1 與 λ_2 中至少有一個一零, 不妨設 $\lambda_1\neq 0$, 則有 $x_3=\frac{x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2}{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, 同理: $y_3=\frac{y_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}y_2}{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, 這表明 P_3 分 $\overline{P_1P_2}$ 的定比爲 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, 即 P_1, P_2, P_3 共線。

此時再分析受挫原因, 則不難發現這是因急於想用比例式 $\frac{y_3}{x_3}=\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}$ 來證所需結論時約去了 $\lambda_1+\lambda_2$, 這樣就丟失了原來的信息, 在解題中從條件到結論的變形要保持原信息不變, 這就給學生留下了深刻印象。

利用數學中簡潔、對稱、和諧的美學原理幫助同學找出最簡單解法是提高學生對解題的興趣見解最有效措施之一。

例如有這樣一道題: 已知圓臺上下底半徑之比爲 $2:3$, 過高的三等分點分別作平行於底面的截面, 將圓臺分爲三部分, 求自上而下的三部分體積比。

引入美學機制, 讓四個截面半徑之比均爲整數, 於是把 $2:3$ 化爲 $6:9$。這樣四個截面半徑之比就是 $6:7:8:9$, 從而得出圓臺三部分體積比爲 $(7^3-6^3):(8^3-7^3):(9^3-8^3)=127:169:217$。

當我把一份試卷的這樣一道壓軸題用如此簡潔的解法提供給學生時, 使學生在驚嘆中深深感到數學美的魅力, 從體會數學美到欣賞數學美到追求數學美, 在追求眞善美的過程中情感得以昇華, 各方面素質得到提高。

四、結束語

由上述用 MM 方式組織教學的原理與過程, 不難看出 MM 方式是數學化的教學方式。

隨近代科技發展, 人們越來越淸楚的看到: 當今一切高技術本質上都是數學技術。那麼在數學教育中, 如何使用高新技術, 使教育跟上時代的步伐。

一方面人們已廣泛注意到, 把電子計算機用於數學教學, 並已取得顯著成效。但如何

進一步把數學思想、方法、技術應用於數學教學? 這應當是當今數學教育認眞考慮的問題, 而 MM 教育方式正好爲此譜寫了開創性的一頁。

參考文獻

1. 徐瀝泉, 數學方法論與新世紀數學教學, 數學傳播季刊 (臺灣), Vol. 23, No. 4。
2. [瑞士] 皮亞杰, 發生認識論原理, 王憲鈿等譯, 商務印書館出版。
3. 涂榮豹, 數學建構主義學習的實質及其主要特徵, 數學教育學報, 1999年11月。
4. 徐瀝泉等, MM 實驗回顧與小結, 數學教育學報, 1998年5月。
5. [美] 波利亞, 數學的發現 (一、二) 劉景麟、曹三江、鄒清蓮譯, 內蒙古人民出版社, 1979-1981年。
6. 李政道, 科學和藝術 — 一個硬幣的兩面, 經濟日報, 1993年6月26日。
7. 徐利治, 給全國教育科學規劃領導小組的「建議書」, 1991年7月。
8. 徐瀝泉, 數學方法論與數學教育實驗, 數學教育學報, 1992年1月。

—本文作者任教於江蘇省睢寧縣中學—