關於三角形等周虧量的不等式

毛其吉

給定平面上的一個三角形, 則聯繫著若干的幾何量, 這些量之間的大小比較, 歷來吸引了許多數學家與數學愛好者的廣泛興趣。其中最著名而古老的一個是歐拉 (L. Euler) 於1765年給出的關於一個三角形的外接圓半徑 R 與內切圓半徑 r 的不等式[1]

$$R \geq 2r \tag{1}$$

這個不等式以其簡單而不平凡的特徵體現了數學的優美性。我們將 (1) 稱之爲歐拉不等式。如果該三角形的外接圓圓心爲 O, 內切圓圓心爲 I, 則從等式 $\overline{OI}^2 = R(R-2r)$ 就推證出了不等式 (1)。

如果用 $\triangle ABC$ 表示已知的三角形。它的邊長 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 並且假設它的面積爲 S, 則有如下的一個不等式[2]

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S \tag{2}$$

這個不等式較早於1919年由威森伯克 (R. Weitzenböck) 給出。今人通常稱它爲威森伯克不等式。

聯繫三角形的三邊長與面積的另一個重要的不等式是下列不等式[3]

$$p^2 \geq 3\sqrt{3}S \tag{3}$$

上式中的 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是三角形周長的一半。

在不等式 (1)、(2) 與 (3) 中, 等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立。從不等式 (3) 可以推論出在周長爲一個定量的所有三角形中, 以等邊三角形的面積最大, 同樣由不等式 (3) 可推知在面積爲一個定量的所有三角形中, 以等邊三角形的周長最短。由於這些事實, 不等式 (3) 一般稱它爲三角形的等周不等式。

由於不等式 (3) 對一切三角形都成立, 因此它的左端與右端的差是非負數, 我們引入等周虧量這個術語和符號 d^2 來表達, 即

$$d^2 = p^2 - 3\sqrt{3}S \tag{4}$$

本文中, 我們將要證明三角形的含有等周虧量的幾個不等式。

定理1: 設 a, b, c, S 和 d^2 表達一個三角形的三條邊的長, 面積與等周虧量, 則有不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+\frac{4}{3}d^2 \tag{5}$$

其中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立。

證明: 已知三角形的三邊爲 a, b, c, 則它的面積根據海倫-秦九韶公式計算得

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中的 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是三角形的半周長。因爲 $u=p-a>0$, $v=p-b>0$, $w=p-c>0$, 且三個正數 u, v, w 滿足不等式

$$\sqrt[3]{uvw} \leq \frac{u+v+w}{3} \tag{6}$$

(其中等號當且僅當 $u=v=w$ 時成立), 因此

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{27}p^3$$

代入海倫-秦九韶公式就得到

$$3\sqrt{3}S \leq p^2.$$

又根據

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \tag{7}$$

可以得出 $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$。

所以 $3\sqrt{3}S \leq (\frac{a+b+c}{2})^2 \leq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, 從而得出

$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)-3\sqrt{3}S \geq p^2-3\sqrt{3}S。$$

所以, $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+\frac{4}{3}d^2$。

根據不等式 (6) 與 (7) 中等號成立的條件可以知道不等式 (5) 中等號成立當且僅當三角形爲等邊三角形的時候。

不等式 (5) 在形式上改進了威森比克不等式 (2)。

定理2: 假設三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心是 O, 它的重心是 G, 且以 R, r 分別表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑, 該三角形的等周虧量是 d^2, 則有不等式

$$R^2 \geq 4r^2+\overline{OG}^2+\frac{4}{27}d^2 \tag{8}$$

其中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立。

證明: 因爲三角形的面積 $S=pr$, 從不等式 (3) 可得

$$S \geq 3\sqrt{3}r^2 \tag{9}$$

由於 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 因此

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

所以有

$$\begin{aligned}\overline{OG}^2=\frac{1}{9}(&\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\\&+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\&+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})\end{aligned}$$

因爲 O 是三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心, $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=R$, 且 $\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 的夾角等於 $2\angle A$ 或 $2\pi-2\angle A$; $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 的夾角等於 $2\angle B$ 或 $2\pi-$

$2\angle B$; $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角等於 $2\angle C$ 或 $2\pi-2\angle C$。從而可以得到下列等式

$$\begin{aligned}\overline{OG}^2 &= \frac{1}{9}(3R^2+2R^2\cos 2A+2R^2\cos 2B\\ &\quad +2R^2\cos 2C)\\ &= \frac{1}{9}\Big[3R^2+2R^2(3–2\sin^2 A–2\sin^2 B\\ &\quad -2\sin^2 C)\Big]\\ &= R^2-\frac{1}{9}(4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B\\ &\quad +4R^2\sin^2 C)\\ &= R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \qquad (10)\end{aligned}$$

依據定理1, $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+\frac{4}{3}d^2$, 故而 $R^2\geq\frac{4\sqrt{3}}{9}S+\frac{4}{27}d^2+\overline{OG}^2$。

給合不等式 (9), 得

$$R^2\geq 4r^2+\overline{OG}^2+\frac{4}{27}d^2.$$

從不等式 (5) 與 (9) 中等號成立的條件可推知在不等式 (8) 中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立。

不等式 (8) 的結論加強了不等式 (1)。

定理3: 如果三角形 $\triangle ABC$ 的半周長爲 p, 它的內切圓半徑是 r, d^2 表示此三角形的等周虧量, 則有

$$(1)\ \ (p-3\sqrt{3}r)^2\leq d^2 \qquad (11)$$

$$(2)\ \ 3\sqrt{3}r(p-3\sqrt{3}r)\leq d^2 \qquad (12)$$

其中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立。

證明: 因爲 $S=pr$, 故從不等式 (9) 得

$$p\geq 3\sqrt{3}r. \qquad (13)$$

依據

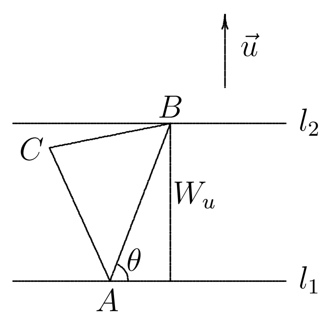
$$\begin{aligned}d^2 &= p^2-3\sqrt{3}S\\ &= (p-3\sqrt{3}r)^2+3\sqrt{r}(p-3\sqrt{3}r)\end{aligned}$$

由於不等式 (13), 即知不等式 (11) 與 (12) 成立。由不等式 (13) 中等號成立的條件, 推出不等式 (11) 與 (12) 中等號成立當且僅當三角形是等邊三角形的時候。

不等式 (11) 與不等式 (12) 都可以看成不等式 (3) 的加強形式。

本文最後要涉及到三角形的寬度。設 $\vec{u}$ 是平面上的一個單位向量, 則垂直於 $\vec{u}$ 並且與 $\triangle ABC$ 至少相交於一個交點的直線中, 使得該三角形位於此直線一側的直線叫做 $\triangle ABC$ 的支持線。例如圖中的直線 l_1 與直線 l_2, 垂直於方向 $\vec{u}$ 的這樣兩條直線之間的距離 w_u 叫做相應於方向 $\vec{u}$ 的寬度, 當取遍平面上所有方向時, 將

$$W=\mathrm{Min}\{w_{\vec{u}}|\vec{u}\quad 取遍一切方向\}$$



稱做 $\triangle ABC$ 的寬度。不難看出, 如果兩條平行直線之間的寬度等於 W, 則此三角形的三個頂點都在這兩條支持線上, 因爲如果不是這樣的話, 如圖 $w_{\vec{u}}=|AB|\sin\theta$, 因此只要將兩平行線 l_1 與 l_2 繞 A, B 作一個保持平行性的微小的擾動, 使 θ 角變得較小

些, 則對應於兩條新的平行支持線的寬度變小, 與寬度 W 的定義發生矛盾。由於上述事實, 我們可以得到下述結論:

$$W=\mathrm{Min}\{h_a,h_b,h_c\} \tag{14}$$

其中 h_a, h_b, h_c 分別表示 $\triangle ABC$ 的三條邊 BC, CA 和 AB 邊上的高線長。

定理4: 假設三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心是 O, 它的重心是 G, 且以 R, W 分別表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與它的寬度, 該三角形的等周虧量是 d^2, 則有不等式

$$\frac{4}{9}W^2\le R^2-\overline{OG}^2-\frac{4}{27}d^2 \tag{15}$$

其中等號當且僅當三角形是等邊三角形的時候成立。

證明: 從三角形的餘弦定理與半角公式可推知

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

因此

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{pS}{abc},$$

又由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$, 得到 $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

由於 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 故有 $p\le\frac{3}{2}\sqrt{3}R$ 及

$$S\le\frac{3}{2}\sqrt{3}Rr. \tag{16}$$

因爲

$$h_ah_bh_c=\frac{8S^3}{abc}=\frac{2S^2}{R},$$

而且

$$\begin{aligned}&h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b\\ &=\frac{2S^2}{R}\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)\\ &=\frac{2S^2}{Rr}\end{aligned}$$

依據不等式 (16) 得

$$h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b\le 3\sqrt{3}S$$

由 (14) 式得到

$$W^2\le\sqrt{3}S. \tag{17}$$

同定理1和定理2的證明類似, 我們有

$$4W^2\le 4\sqrt{3}S\le\frac{4}{3}p^2\le a^2+b^2+c^2,$$

及 $a^2+b^2+c^2=9(R^2-\overline{OG}^2)$, 因此得

$$9(R^2-\overline{OG}^2)-4W^2\ge\frac{4}{3}p^2-4\sqrt{3}S.$$

經過整理後, 即得出不等式 (15)。

不難驗證, 不等式 (16) 中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立, 由此可以推知不等式 (15) 中的等號當且僅當三角形是等邊三角形的時候成立。

從不等式 (15) 可以得出下列不等式

$$W\le\frac{3}{2}R \tag{18}$$

而且不等式 (17) 與不等式 (18) 中等號當且僅當三角形是等邊三角形時成立, 由此得到下面的兩個推論。

推論 1: 在面積爲一個定量的一切三角形中, 以等邊三角形的寬度最大。

推論 2: 內接於一個已知圓的一切三角形中, 以等邊三角形的寬度最大。

参考文獻

1. L. Euleri, Novi commentarii academiae scientiarum petropoli. tanoe, 11(1765), 1767, 103-123.
2. R. Weitzenböck, Math. Z., 5(1919), 137-146.
3. H. Hadwiger, Jber. Deutsch, Math.-Verein, 49(1939), 35-39. Kursiv.
4. Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S., and Vasić, P. M.: Geometric Inequalities, Noordhoff, Groningen, 1969.
5. QI-JI Mao (毛其吉): On the Isoperimetric Deficit of a Simplex and of a Polygon, Geometriae Dedicata, 63:93-98, 1996.

—本文作者任教於中國江蘇省蘇州教育學院—