環球城市數學競賽 (續)

葉均承 · 葉永南 · 孫文先

1999秋季賽 高中組 初級卷解析

(1) 將某三角形的內心和三個頂點相連, 把原三角形分割爲3個小三角形。已知其中一個小三角形與原三角形相似, 求原三角形各角的角度。(四分) (內心是指三角形的三個內角平分線之交點。)

承青: 這題非常簡單, 這三角形的三個角度是 $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$。

君南: 承青, 你怎麼知道三角形三個角的答案呢?

承青: 很簡單! 令 $\triangle ABC$ 的內心爲 I, 不失一般性, 根據題意我們可以令 $\triangle IAB \sim \triangle ABC$, 因爲 $\angle IAB \neq \angle CAB$, 所以我們令 $\angle IAB = \angle ABC$, 其中 $\angle ABC = 2\triangle IBA$, 由於 $\angle IBA$ 和 $\triangle ABC$ 中某個角全等, 但是 $\angle IBA = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{4}\angle BAC$, 所以 $\angle IBA = \angle ACB$, 這樣我們得到 $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 7\angle ACB = \pi$, 所以 $\angle ACB = \frac{\pi}{7}$, $\angle ABC = \frac{2\pi}{7}$, $\angle BAC = \frac{4\pi}{7}$。如果 $\angle IAB = \angle ACB$, 則同理可證。

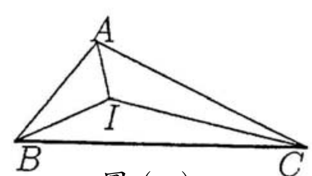


圖 (一)

曉安: 其實可以不必分二種情形討論, 只要我們先定好角度的大小關係即可。不失一般性, 我們可以令 $\angle CAB = \alpha \geq \angle ABC = \beta \geq \angle BCA = \gamma$, 由於 $\triangle IAB \sim \triangle ABC$, $\angle IBA = \frac{\beta}{2}$ 只有等於 $\angle BCA$, $\angle IAB = \frac{\alpha}{2}$ 只有等於 $\angle ABC$, 另外 $\angle AIB = \angle CAB$。也就是說 $\frac{\beta}{2} = \gamma$, $\frac{\alpha}{2} = \beta$。又 $\pi = \alpha + \beta + \gamma = 7\gamma$, 所以 $\gamma = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$, $\gamma = \frac{4\pi}{7}$。

(2) 證明: 有無限多個正奇數 n, 使得 $2^n + n$ 不是質數。(四分)

君南: 這題好難喲! 怎麼找無限個呢?

承青: 就是找一大類呀! 這題答案是 $n = 6k + 1$, 其中 $k \in N$。

君南: 爲什麼?

承青: 因爲當 n 是奇數時, 2^n 除以3的餘數是2。當 $n = 6k + 1$ 是奇數, 所以 $2^{6k+1} + 6k + 1$ 除以3的餘數和 $2 + 6k + 1$ 除以3的餘數一樣, 也就是 $2^{6k+1} + 6k + 1 \equiv 0 \pmod 3$,

只要 k 是自然數, $2^{6k+1}+6k+1$ 一定是3的倍數, 又 2^n+n 的值隨著 n 變大而變大, 所以它不是質數。($a\equiv b \bmod n$ 是指 $a-b$ 是 n 的倍數)

君南: 爲什麼你會我都不會。

永淳: 其實構造無限個奇數 n 的方法很多, 君南, 你想想看, 整數 x "不是質數" 是什麼意思?

君南: 就是除了1和本身之外, x 還有其它因數。

永淳: 好, 如果你想構造一大堆 2^n+n 型的整數, 使得整數 d 都是它們的因數, 那你會從哪一個因數著手?

君南: 從2開始, 嗯! 我來作作看, 呀! 不行, 當 n 是奇數, 2^n+n 也一定是奇數。

永淳: 沒關係, 2不行, 那你會再試那一個數?

君南: 好, 那麼再試試 $d=3$ 的情形。因爲 n 是奇數, 所以可以令 $n=2m+1$, $2^{2m+1}+2m+1\equiv 2+2m+1\equiv 2m \pmod 3$, 只要 m 是3的倍數, 則 2^n+n 也會是3的倍數, 所以令 $m=3k$, 則 $n=2m+1=6k+1$。嗯, 我會了, 如果我想到的 d 是5呢?

永淳: 你可以再試試看。

君南: 令 $n=2m+1$, 則 $2^n+n=2^{2m+1}+2m+1\equiv 2\cdot 4^m+2m+1\equiv 2\cdot(-1)^m+2m+1 \pmod 5$。

m 可以分爲奇、偶二類:

(i) 若 $m=2k$, 則 $2^n+n\equiv 2+4k+1\equiv 4k+3 \pmod 5$, 所以 $k\equiv 3 \pmod 5$。這樣 $k=5p+3$, 也就是 $n=4k+1=20p+13$, $p\in N$ 。

(ii) 若 $m=2k+1$, 則 $2^n+n\equiv -2+2(2k+1)+1\equiv 4k+1 \pmod 5$, 所以 $k\equiv 1 \pmod 5$, 這樣 $k=5p+1$, 也就是 $n=2(2k+1)+1=4k+3=20p+7$, $p\in N$。這樣我又構造2組答案了, 一組是 $20p+13$, $p\in N$, 另一組是 $20p+7$, $p\in N$。

(3) 空間中有 個平面, 每個平面恰好與1999個其它平面相交, 求 n 的所有可能值。(四分)

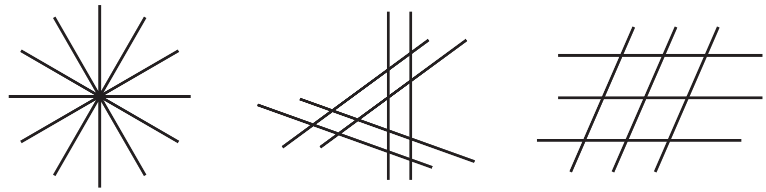
此題解法與國中組初級卷第 (3) 題類似。

小淳: 這一題最簡單了, 答案是2000條任意二個平面都相交, 所以 n 的值是 $1+1999=2000$。

小承: 會不會有其它答案呢?

小淳: 我不知道啊。

小君: 可以先觀察 n 值很小的情況, 如果有4個平面, (i) 任意二個平面都相交, 則每個平面恰好其它3個平面相交。(ii) 這個平面恰爲二組二個平行的平面排成井字形, 則每個平面恰好與其它2個平面相交。



(a) (b) (c)

圖 (二)(平面投影圖)

如果有6個平面, 則我們可以排成圖二的三種情況: 每個平面恰好與其它的 (i) 5個 (如圖二 a), (ii) 4個 (如圖二 b), (iii) 3個 (如圖二 c) 平面相交。

一般情形的時候我可以這樣想: 這些平面分成 k 堆每一堆都有 m 個平行的平面, 但是不同堆的平面都不平行, 則每個平面恰好和其它 $(k-1)\cdot m$ 個平面相交, 現在令 $(k-1)\cdot m=1999$, 所以可以知道 $k=2$, $m=1999$ 或者 $k=2000$, $m=1$。因爲平面共有 $k\cdot m$ 個, 所以答案有2種, $2\times 1999=3998$ 和 $2000\times 1=2000$。哇! 我又作出來了。

小承: 慢著, 你爲什麼可以假設 “每一堆都有個平行的平面” 呢?

小君: 本來就是這樣嘛! 這樣也比較有對稱性, 而且作解答方便些嘛!

小承: 不行, 必須講理由才行。理由是: 如果堆數 ≥ 2 (即 $k\geq 2$), 任一個平面都和同一堆中的平面平行, 而和其它堆中的平面相交。在第 i 堆及第 j 堆中各挑出一個平面, 令其爲 L 與 M, 令: 全部平面數的個數爲 N, 第 i 堆平面的個數爲 I, 第 j 堆平面的個數爲 J, 又令 L 相交的所有平面數目爲 l, 和 M 相交的所有平面數目爲 m, 因爲和第 i 堆中的任一個平面相交的平面數等於全部平面數減去第 i 堆的平面數, 所以 $I=N-l$。同理 $J=N-m$。因爲和每一個平面相交的平面個數都是一樣, 所以則 $l=m$, 也就是 $I=J$, 所以每堆的平面數目都必須一樣。

小淳: 幹嘛這麼麻煩呢?

小承: 數學是追求眞理, 概念必須弄清楚才行。

(4) 已知有一百個整數 $1,2,\ldots,100$, 將這一百個整數分爲50對, 每一對中的兩數之差稱爲這一對的編號, 請問這50對全部的編號可否恰好爲1 至50? (四分)

君南: 這一題我試了好久都作不出來。

承青: 如果 $X-Y$ 是偶數, 則 X, Y 同爲奇或偶數; 如果 $X-Y$ 是奇數, 則 X, Y 兩數爲奇偶各一, 照題意來看, $1\sim 100$ 中有50個偶數及50個奇數, 若是可以排成50對, 使其編號恰爲1至50, 那麼1至50中有25個奇數, 所以必須用去1至100的中25個奇數和25個偶數, 剩下奇數和偶數各25個, 這樣就不可能排成25對同奇偶的數對, 所以不可能。

曉地: 我有不同的作法, 首先將這50對中每一對大的數放左邊, 小的數放右邊, 令左邊的全部相加之和為 A, 右邊的數全部相加之和為 B, 則 $A+B=1+2+3+\ldots+100=5050$, 又 $A-B=1+2+3+\ldots+50=1275$, 則 $A=\frac{5050+1275}{2}$, 不是整數, 矛盾。所以此命題不可能。

永淳: 其實用任意二個整數和與差同為奇數或偶數就可以了, 因為每一對中的二數之和與它的編號同為奇數或偶數, 所以50對的整數全部相加之和與50對的編號全部相加之和的奇偶性一樣, 但是 $1+2+3+\ldots+100=5050$ 是偶數, $1+2+3+\ldots+50=1275$ 是奇數, 所以答案是不可能。

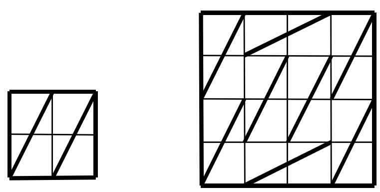
(5) 能不能將 8×8 的棋盤, 分割為32個 1×2 或 2×1 的長方形, 而且在每個長方形內只劃一條對角線, 使得這32條對角線中的任何兩條對角線, 都沒有共同的端點? (四分)

(註: 每個長方形都有二條對角線, 一條從左上到右下, 另一條從右上到左下。)

此題解法與國中組初級卷第 (5) 題同。

小淳、小君、小青: 這題好難哩! 我們根本無從著手嘛!

小承: 其實這題不難, 當棋盤是 2×2 與 4×4 時很容易作出來, 就像圖五, 那你們看, 這兩個圖三 (a), 三 (b) 有什麼關係呢? 如何從圖三 (a) 得到圖三 (b) 呢?



(a) (b)

圖 (三)

小淳: 圖三 (b) 好像是圖三 (a) 放在中間, 外面再圍著一圈。

小承: 對, 那 6×6 的棋盤怎麼辦?

小淳: 那 6×6 不也就是把 4×4 的外面再圍一圈嗎? 我試試看, 哇, 你們看 (圖四) 6×6 的棋盤我可以作出來了, 再試 8×8, 嗯, 也可以, 那任何 $2n\times 2n$ 都是 一樣的作法! 好簡單哩!

小承: 對! 小淳! 你好聰明! 但是一般情形要用數學歸納證明或把 $2n\times 2n$ 棋盤座標化再詳細描述所有對角線的位置, 說明它們不會相交才行。

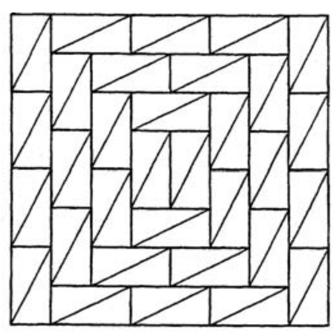


圖 (四)

1999秋季賽 高中組 高級卷解析

(1) 如果可以將正整數 $1,2,3,\ldots,$ 填在圓周上, 使得依順時鐘方向任何兩個相鄰的數之和, 都能夠被它們的下一個數整除。求 n 的所有可能值。(三分)

小君: 因為 , $n=1,2$ 及3時, 很容易就作出來。但是 $n=4$, 我把各種情況 (共6種) 都試過了, 結果都不符合題意。

小淳: 你的答案不完整, 你如何知道都不行呢? $n=1,2,3$ 時顯然成立。當 $n\geq 4$ 時, 如果圓周上有二個連續偶數, 由於「依順時鐘方向任何兩個相鄰的數之和, 都能夠被它們的下一個數整除」, 則將造成這個圓周上的每一個整數都是偶數 (不合)。因為圓周上必有一個整數是偶數, 而它的逆時鐘方向的下二個數及順時鐘方向的下個數, 都必須是奇數。所以奇數的個數至少是偶數個數的2倍。由於 $1\sim n$ 中, 奇數的個數至多比偶數的個數多1個, 所以我們可以推導出圓周上最多只有一個偶數, 這樣奇數至多有2個, 因此 n 最多是3, 將1、2、3這三個數任意排在圓周上依順時針填上, 這樣便滿足題意。所以 $n=1,2,3$。

小承: 小淳, 你作得很好, 進步很快。

(2) 在一張矩形紙片上有一些黑點: (a) 當所有黑點共線; (二分)
(b) 任意三黑點。(三分)

試著將這張紙沿直線摺幾次, 但摺線不可以通過任何黑點。然後, 使用細針插進摺好的紙, 使得針只穿過所有的黑點, 但不能穿過其它的點。求證: 在 (a) 和 (b) 二種情況下, 上述穿法必能成功做到。

小孫: (a) 設矩形紙上有共線的 n 個黑點, 依序取名為 $A_1,A_2,\ldots,A_n$。令 A_i,A_{i+1} 的垂直平分線為 L_i, $1\leq i\leq n-1$。我們沿著 $L_1,L_2,\ldots,L_{n-1}$ 依摺扇疊方法, 一正一反地對折紙張後, 此時這 n 個點都會重合, 而且條直線把平面分成 n 部份, 所以一針插過黑點, 它們穿過所有的 n 個黑點, 但不會穿過其它的點。

(b) 白紙上任三點 A,B,C (如圖一), 我們可以在 B、C 點附近各任取異於 B、C 點之 B', C'點, 使得 $\overline{B'C'}//\overline{BC}$ 且其距離不大於 d, 以 $\overline{B'C'}$ 為對稱軸, 取 $\overline{BC}$ 直線之鏡像直線 $\overline{B''C''}$。

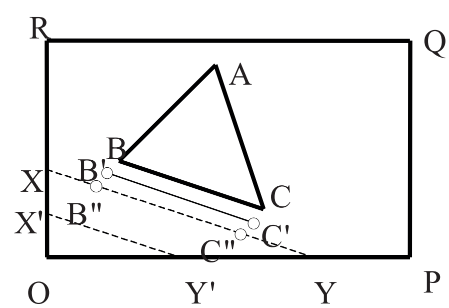


圖 (一)

設直線 $\overline{B''C''}$ 與矩形之二邊交點為 X, Y。不失一般性, 令 $\overline{B''C''}$ 與 $\overline{OR}$ 交於 X; 與 $\overline{OP}$ 交於 Y。摺疊紙片, 將點 O, X 重合, 取出 $\overline{OX}$ 中點 X_1, 將點 O, Y 重合, 取出 $\overline{OY}$ 中點 Y_1。將紙片沿直線 $\overline{X_1Y_1}$ 對摺, 則 O 點將落在直線 $\overline{B''C''}$ 上。再對摺紙片將 $\overline{X_1Y_1}$ 與 $\overline{B''C''}$ 重合, 得出摺線 $\overline{X_2Y_2}$, 再繼續將 $\overline{X_2Y_2}$ 與 $\overline{B''C''}$ 重合, ... 一直依此方式繼續下去, 總可以使 $\overline{X_nY_n}$ 與 $\overline{B''C''}$ 之距離小於 d, 這時 $\overline{X_nY_n}$ 與 $\overline{B''C''}$ 之間是一疊非常細窄的一疊 "紙帶", 其寬度小於 d, 最後將這疊紙帶沿 $\overline{B'C'}$ 直線向 $\overline{BC}$ 方向對摺過去。同樣, 也可以在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 邊上作上述同樣的動作。此時, 原紙片變成 $\triangle ABC$ 及外部三條非常細窄的紙帶 (如圖二), 其寬度 d 要多小就可以多小, 我們差不多可以忽略不計。這時

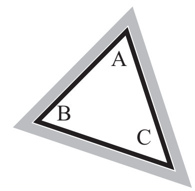


圖 (二)

(1) 如果 $\triangle ABC$ 不是正三角形或等腰三角形, 則總可以將最短邊上的二端點對摺使之重合, 如圖三, 不失一般性, 假設 $\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$, $\overline{ST}$ 為摺痕, 則 $\overline{AT} = \overline{BT}$, $\overline{ST} \perp \overline{AB}$, $\angle CAB = \angle SBA$, 因為 $\overline{AC} > \overline{BC}$, 得 $\angle CBA > \angle CAB = \angle SBA$, 故 C 點會落在 $\triangle ABS$ 之外部 (圖三)。我們再將 B, C 點疊合, 即可用針同時穿過此三點且不穿過其它的點。

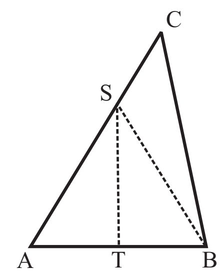


圖 (三)

(2) 若 $\triangle ABC$ 為正三角形或等腰三角形, 則依 (1) 所述之方法將原紙片摺成 $\triangle ABC$ 及外部三條非常細窄的紙帶。如圖四, 不失一般性, 若 $\overline{AB} = \overline{AC}$, 我們總可以找到 $\overline{XY}$ 直線將紙片對摺後, 使得 $\overline{AB'} \neq \overline{AC'}$。並使得 A 點落在 $B'XYC'$ 之外部及 $\triangle A'B'C'$ 三邊均不相等。問題則變成 (1) 的情況, 所以我們總能作到題目的要求。

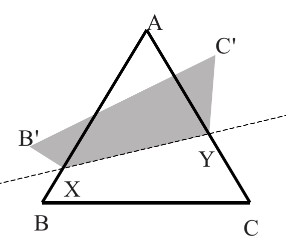


圖 (四)

(3) 小唐和小夏輪流構造一個數列, 首先任給一個正整數作為首項, 由小唐開始增添新項, 他選擇的方法是將前一項的數值加上該數的某一位數字 (例如: 首項是 234, 小唐可選 $234+2$ 或 $234+3$ 或 $234+4$); 接著換小夏, 他選擇的方法是將小唐新添的數值減去該數的某一位數字 (例如: 小唐選的數是 237, 則小夏可選 $237-2$ 或 $237-3$ 或 $237-7$), 如此不停地輪流構造下去。求證: 有一個整數會在這數列中至少出現 100 次。(六分)

小淳: 如果希望某數在此數列 $a_1, a_2, \ldots$ 出現100次, 則我們該如何去解題呢?

小承: 我希望能證明這個數列 $a_1, a_2, \ldots$ 有上界, 即存在一個 $M > 0$, 使得對於所有正整數 n, 都有 $a_n \le M$。這樣就會有一個整數會在這數列中至少出現100 次。

我們從題目知道, 小唐添的項是偶數項 $a_2, a_4, a_6 \ldots$, 其中 $a_{2n} = a_{2n-1} + x$, x 是 a_{2n-1} 中的某一位數字, $0 \le x \le 9$。小夏添的項是奇數項, 其中 $a_{2n+1} = a_{2n} - y$, y 是 a_{2n} 中的某一位數字, $0 \le y \le 9$。

如果 a_1 是 n 位數, 則令 $Z = \overbrace{44\ldots431}^{n+3\text{ 位}} > a_1$。令

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, \ldots, Z\};\\
B &= \{Z+1, Z+2, \ldots, Z+9\} = \{44\ldots432, \ldots, 44\ldots440\};\\
C &= \{Z+10, \ldots, Z+13\} = \{44\ldots441, \ldots, 44\ldots444\};\\
D &= \{Z+14, \ldots, Z+17\} = \{44\ldots445, \ldots, 44\ldots448\}.
\end{aligned}$$

我們用 $X \xrightarrow{\text{甲}} Y$ 代表已構造的數列中最後一項是 $a_i \in X$, 輪到甲添的新項 a_{i+1} 會屬於 Y。

如果數列中已構造的數列中最後一項是 a_i

(1) 當 $a_i \in A$, 輪到小唐添新項 a_{i+1} 會屬於 $A \cup B$; 輪到小夏添新項 a_{i+1} 會屬於 A。

(2) 當 $a_i \in B$, 輪到小唐添新項 a_{i+1} 會屬於 $B \cup C \cup D$; 輪到小夏添新項 a_{i+1} 會屬於 $A \cup B$。

(3) 當 $a_i \in C$, 輪到小唐添新項 a_{i+1} 會屬於 $C \cup D$; 輪到小夏添新項 a_{i+1} 會屬於 B。

(4) 當 $a_i \in D$, 輪到小夏添新項 a_{i+1} 會屬於 $B \cup C$。(如下圖五);

$$\begin{array}{lcl}
A & \xrightarrow{\text{小唐}} & A \cup B\\
B & \longrightarrow & B \cup C \cup D\\
C & \longrightarrow & C \cup D
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
A & \xrightarrow{\text{小夏}} & A\\
B & \longrightarrow & A \cup B\\
C & \longrightarrow & B\\
D & \longrightarrow & B \cup C
\end{array}$$

圖 (五)

我們將證明: 對於任何正整數 n, $a_{2n} \le Z + 17$ 和 $a_{2n+1} \le Z + 13$:

當 $n = 1$, 顯然 $a_2 \le Z + 17$ 和 $a_3 \le Z + 13$。

假設 $n = k$ 時, $a_{2k} \le Z + 17$ 和 $a_{2k+1} \le Z + 13$。

當 $n = k + 1$ 時, 因爲 $a_{2k+1} \le Z + 13$ (即 $a_{2k+1} \in A \cup B \cup C$), 由上述論證得知, 輪到小唐添的新項 $a_{2(k+1)} \le Z + 17$ (即 $a_{2(k+1)} \in A \cup B \cup C \cup D$); 由上述論證得知, 輪到小夏添的新項 $a_{2(k+1)+1} \le Z + 13$ (即 $a_{2(k+1)+1} \in A \cup B \cup C$)。

由數學歸納法得知, 對於任何正整數 n, $a_{2n} \leq Z+18$ 和 $a_{2n+1} \leq Z+13$。因此我們證明了數列中任何項都不會大於 $Z+18$。

小君: 令 $Z=\overbrace{88\ldots870}^{n+2\text{ 位}}$, 我們可以令

$$
\begin{aligned}
A &= \{1,2,\ldots,Z\}\\
B &= \{Z+1,Z+2,\ldots,Z+9\}\\
C &= \{z+10\}\\
D &= \{Z+11,Z+12,\ldots,Z+18\}
\end{aligned}
$$

則集合 A,B,C 關係和圖五一樣, 所以同理可證數列中任何項都不會大於 $Z+18$。

小淳: 我跟你的想法一樣, 只不過 $Z=\overbrace{99\ldots980}^{n+3\text{ 位}}$, 這也是一種正確答案。

小南: 照小承的說法, 我們可以令 $P=A\cup B\cup C=\{1,2,\ldots,44\cdots444\}$, $Q=A\cup B\cup C\cup D=\{1,2,\ldots,44\cdots448\}$, 則 $P\xrightarrow{\text{小唐}}Q$ 且 $Q\xrightarrow{\text{小夏}}P$, 因爲$a_1\in P$, 由小唐、小夏輪流構造下去, 所得到的新數一定在 Q 集合中, 因此證明數列中任何項都不會大於$Z+18$。

(4) 有 n 個砝碼, 它們的質量分別爲 $1,2,3,\ldots,n$ 克, 在所有可以的方法中, 打算從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。

(a) 求證當 $n=100$ 時, 一定能成功。(四分)

(b) 當 $n\geq 4$ 時, 是否對所有的 n 值都保證能成功? (四分)

小承: 我的想法是: 將這100個砝碼分成二組放在天平的兩邊, 使它們平衡, 不失一般性, 設質量爲1克的砝碼在左邊, 左邊的砝碼都標 L , 右邊的砝碼都標 R。

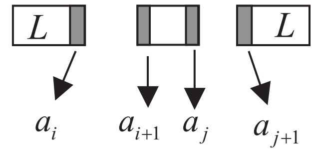
把所有砝碼拿出來, 按輕重從小到大排成一列, 成爲一個 L,R 的序列 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ a_{100} 其中 $a_1=L$, $a_i\in\{L,R\}$ (即 a_i 是 L 代表質量爲 i 克的砝碼在左邊, a_i 是 R 代表質量爲 i克的砝碼在右邊)。把這個序列分成數段 (至少2段), 每段的標號 L 或 R 都相同, 但和下一段不同。

(i) 只分成二段, 左邊是 $a_1,a_2,\ldots,a_k$, 而 右邊是 $a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{100}$。因爲左邊任一個砝碼都比右邊任一個砝碼輕, 所以不可能從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。

$$\underbrace{\boxed{\;L\;}}_{k\text{個}}\quad\boxed{\;R\;}$$

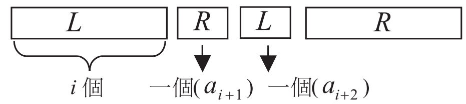
(ii) 如果分爲三段, 左邊是 $a_1,a_2,\ldots,a_i$ 及 a_{j+1}, $a_{j+2},\ \ldots,a_{100}$ 而右邊是 $a_{i+1},a_{i+2},\ \ldots,a_j$, 中

間的段落至少有二個砝碼 (即 $j-i\geq 2$), 否則所有標 L 號的砝碼之總重量不會等於標號 R 的砝碼之總重量。

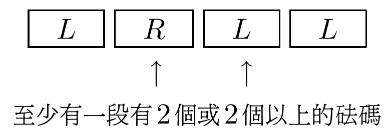


因此取右上圖中的四個砝碼: 左邊的 a_i, a_{j+1} 及右邊 a_{i+1}, a_j, 則 $i+j+1=i+1+j$, 所以可以從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。

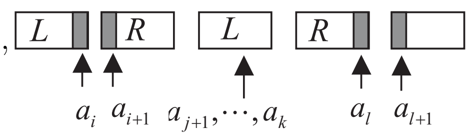
(iii) 如果分成四段, 且左邊是 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 及 a_{i+2}, 而右邊是 a_{i+1} 及 $a_{i+3}, \ldots, a_{100}$, 則因為左邊任二個砝碼都比右邊任二個砝碼輕, 所以不可能從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。



(iv) 如果分成四段, 且左邊是 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 及 a_{j+i}, a_{j+2}, a_k 而右邊是 $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ 及 a_{k+1}, $\ldots$, a_{100}, 其中 $k-j\geq 2$ 或者 $j-i\geq 2$。則同 (ii) 的論證, 可以從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。



(v) 如果分成5段或5段以上, 且左邊是 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 及 $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_k$ 及 $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots$, 而右邊是 $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ 及 $a_{k+1}, \ldots, a_l$, $\ldots$, 則必同 (ii) 的論證, 可以從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。



由上述論證得知, 如果是情形 (i) 和 (iii) 則不可能從兩邊各拿掉兩個砝碼, 而不影響平衡。所以我們考慮情形 (i) 和 (iii):

如果是 (i), 則存在 k 使得

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)+1=\frac{1}{4}n(n+1)$$

如果是 (iii), 則存在 k 使得

$$1+2+3+\ldots+k+(k+2)=\frac{1}{2}(k+2)(k+1)+1=\frac{1}{4}n(n+1)$$

分析完所有情況後, 讓我們再看題目的問題吧!

(a) $n=100$, 因為 $\frac{1}{2}\cdot 70\cdot 71+1<\frac{1}{4}\cdot 100\cdot 101=2525<\frac{1}{2}\cdot 71\cdot 72$ 不可能是 (i) 及 (iii)。故只能是 (ii)(iv)(v), 即必可以從左右各拿掉2個砝碼使得仍舊平衡。

(b) 討論一般的 n。取 $n=20$, $k=13$ 則可能分成 (i) 的狀況, 所以可能使左右各拿掉2個砝碼使得仍舊平衡。

(5) 在一個很大的棋盤上, 其中有 $2n$ 個小方格被塗上紅色, 而這 $2n$ 個小方格排列的方式, 可讓一枚只能夠橫走或直走的棋子, 從任一紅色格子不用穿過沒有塗色的格子, 便能在數步移動後, 到達任何其它的紅色格子。求證可以將這 $2n$ 個紅色格子分割為 n 個矩形 (包括正方形)。(八分)

小承: 一個紅色小方格和它的上、下、左、右的紅色小方格稱為它們相鄰。令 T 為一堆紅色小方格所組成的集合。從任何 T 中一個紅色小方格開始, 每次都可以從任一紅色格子移動到與其相鄰的紅色小格子, 能在數步移動後, 到達任何其它的紅色格子。我們稱 T 為連通。題目的意思是指這 $2n$ 個紅色小方格形成一個連通部份。這一題將用數學歸納法證明, 但是我只會簡單的情形。

當 $n=1$ 或2時, 顯然成立。假設 $n \le k$ 時, 題目是成立。

當 $n=k+1$ 時, 我們將把 $2n$ 個紅色小方格分成兩個連通的子集合, 它們分別有 $2s$ 與 $2(k+1-s)$, 由假設可知它們可以被分割為 s 和 $(k-s)+1$ 個小矩形, 所以共有 $k+1$ 小矩形。如果這 $2n$ 個紅色小方格被分成三個或四個連通的子集合, 或者分成兩個奇數個小矩形連通的子集合, 我就不會了。

小地: 我會。我將證明一個更一般的定理。

定理: 在一個很大的棋盤上, 其中有 個連通小方格被塗上紅色, 則可 以將這 個紅色格子分割為 $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ 個矩形 (包括正方形)。

小君: 幹嘛? 那不是更難證明了嗎?

小地: 這是數學上常用的方法, 因為證明偶數情況時必須用到奇數情形的結果, 光對偶數作歸納法就作不下去了。

定理證明: 我們將用數學歸納法證明上述兩種情形同時成立。

當 $m=1$ 或2時, 顯然成立。假設 $m \le p$ 時, 題目是成立。

當 $m=p+1$ 時, 我們考慮二種情況: (a) m 是奇數和 (b) m 是偶數

(a) 當 $m=2k+1$ 時, 我們拿掉某一小方格 A, 剩下的 $2k$ 個紅色小方格。

(1) 如果它們還是連通的, 由假設我們可以將這 $2k$ 個紅色格子分割為 k 個矩形, 加上紅色小方格 A, 我們把這 $2k+1$ 個紅色小方格分成 $k+1$ 個矩形, 得證。

(2) 如果它們可以被分成 r 個 $(r>1)$ 連通部份 $C_1, C_2, \ldots, C_r$ 則我們把這 $2k+1$ 個紅色小方格分成二塊連通部分, 一塊是 C_1, 另外是全部扣除 $C_1 (= A \cup C_2 \cup C_r)$。這二塊連通部分包含紅色小方格的個數奇偶不同。

由假設我們把這 $2k+1$ 個紅色小方格分成 $k+1$ 個矩形。

由 (i), (ii) 及數學歸納法可得證。

(b) 考慮 $m = 2k+2$ 情形。由於棋盤上任何小方格最多與4個小方格相鄰, 我們考慮三種情況: (1) 如果存在有一個紅色小方格 A, 它恰與2個紅色小方格相鄰; (2) 所有的紅色小方格, 它不會恰與2個紅色小方格相鄰, 但是存在有一個紅色小方格 A, 它恰與4個紅色小方格相鄰; (3) 所有的紅色小方格, 它不會恰與2個或4個紅色小方格相鄰, 而且這些 $2n$ 個紅色小方格不會包含4個形成田字形的紅色小方格。

(1) 如果存在有一個紅色小方格 A, 它恰與2個紅色小方格相鄰, 令其爲 B, C, 剪掉紅色小方格 A, 我們考慮剩下的 $2k+1$ 個紅色小方格, 它們至多形成兩個連通部分。

(i) 它們形成兩個連通部分, 則其中有一個連通部分有奇數個紅色小方格, 一個連通部分有偶數個紅色小方格, 奇數連通部分聯集 A 仍然是連通的。這樣我們得到2塊偶數個紅色小方格的連通部分, 由 (a) 得證。

(ii) 它們形成一個連通部分, 再剪掉紅色小方格 B, 我們考慮剩下的 $2k$ 個紅色小方格中包含 C 的連通部分 X, 如果 X 包含偶數個紅色小方格, 則全部的紅色小方格剪去 X 所剩下的紅色小方格也是連通的; 如果 X 包含奇數個紅色小方格, 將 X 聯集 A 會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 加上另外剩下的部分也會形成一個連通部分, 這樣我們得到2塊偶數個紅色小方格的連通部分, 由 (a) 得證。

(2) 所有的紅色小方格, 它不會恰與2個紅色小方格相鄰, 但是存在有一個 紅色小方格 A, 它恰與4個紅色小方格相鄰, 令其爲 B, C, D, E, 這些 B, C, D, E 中必有一個小方格和3個或4個紅色小方格相鄰 (如果 B, C, D, E 都只和紅色小方格 A 相鄰, 則 $m = 5$ (不合)), 我們知道這 $2k+2$ 個紅色小方格一定包含一個由4個紅色小方格組成的田字形。剪掉這4個田字形的紅色小方格, 我們考慮剩下的 $2k-2$ 個紅色小方格:

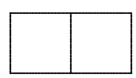
(i) 如果它們包含偶數個紅色小方格的連通子集合, 則由 (a) 得證。

(ii) 如果它們包含兩個奇數個紅色小方格的連通子集合 X 與 Y, 由於所有的紅色小方格, 它不會恰與2個紅色小方格相鄰, 所以田字形的4個紅色小方格都會與 X 或 Y 相連。不失一般性, 假設 X 與田字形中的某一個紅色小方格 P 相鄰, Y 與田字形中的某一個紅色小方格 $Q (P \neq Q)$ 相鄰, 這樣 X 聯集 P 會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 加上另外剩下的所有部分也會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 這樣我們得到2塊偶數個紅色小方格的連通部分, 由 (a) 得證。

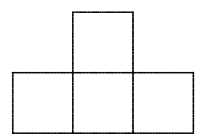
(iii) 如果它們包含4個奇數的連通子集合 X, Y, Z, W, 假設田字形的4個紅色小方格 B, C, D, E 中有一個紅色小方格 P 只會與連通子集合 X, Y, Z, W 中

某一個相連, 令爲 R, 這樣連通子集合 R 聯集小方格 P 會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 加上另外剩下的所有部分也會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 由 (a) 得證。假設田字形的4個紅色小方格中每一個紅色小方格都會與連通子集合 X, Y, Z, W 中某二個相連。假設田字形的4個紅色小方格 P 與 Q 相連, 則紅色小方格 P 與 Q 必會與 X, Y, Z, W 中某一個相連, 令爲 R, 設紅色小方格 P 與 X, Y, Z, W 中某另一個相連, 令爲 S, 這樣 R 聯集 S 聯集 P 聯集 Q 會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 加上另外剩下的所有部分也會形成一個包含偶數個紅色小方格的連通部分, 由 (a) 得證。

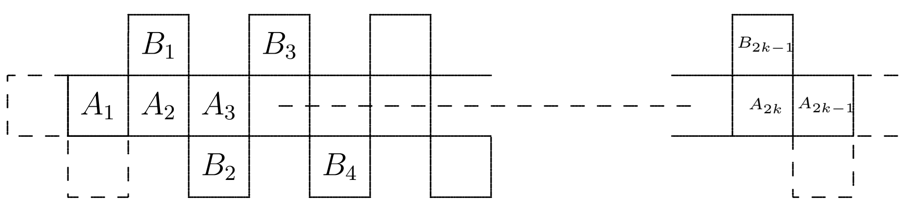
(3) 所有的紅色小方格, 它不會恰與2個或4個紅色小方格相鄰, 而且這些 $2n$ 個紅色小方格不會包含4個形成田字形的紅色小方格。我們將描出這種情況下這 $2n$ 個紅色小方格的圖形會像圖形的圖六 c 或 d。



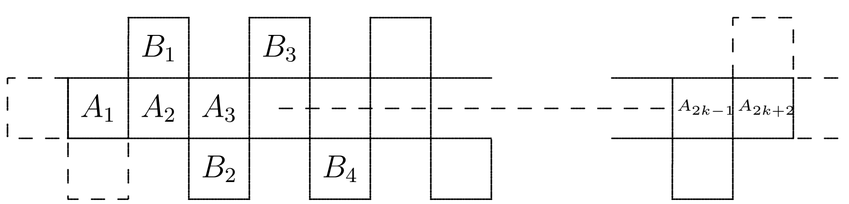
圖六 (a)



圖六 (b)



圖六 (c)



圖六 (d)

當 $n = 1, 2$ 時, 圖形爲圖六 a, b。假設 $n = k$ 時, 圖形如圖六 c 或 d。當 $n = k + 1$ 時, 我們必須加2個紅色小方格到圖六 c 或 d 上, 因爲所有的紅色小方格, 它不會恰與2個或4個紅色小方格相鄰, 而且這些 $2n$ 個紅色小方格不會包

含4個形成田字形的紅色小方格, 所以新添的2個紅色小方格必須同時加到圖六 c 或 d 中的與 A_1 或 A_{k+1} 相鄰的虛線方格上。

這時所有的 A_i, $1 \le i \le k+1$ 形成一個矩形, 另外每一個紅色小方格 B_j, $1 \le j \le k$ 獨自形成一個矩形, 所以這些 $2k+2$ 個紅色小方格總共被分割成 $k+1$ 個矩形。

從上述論證, 由數學歸納法得證在一個很大的棋盤上, 其中有 $2n$ 個連通小方格被塗上紅色, 則可以將這 $2n$ 或 $2n-1$ 個紅色格子分割爲 n 個矩形。

(6) 假設一個凸多面體有個 $10n$ 面, 求證其中至少有 n 個面, 它們的邊數都相 同。(八分)

小君: 這一題太難了, 完全沒有概念去找解答。

小承: 多面體的公式你聽過那些呢?

小君: 我聽過尤拉公式:

$$v - e + f = 2 \tag{1}$$

其中 v, e 及 f 代表多面體中頂點的總個數, 邊的總個數及面的總個數。

小承: 很好, 其中 e, v, f 之間有什麼關係呢?

小君: 喲! 我知道一個公式:

$$\sum_{i=1}^{v} \deg(v_i) = 2e \tag{2}$$

其中 $\deg(v_i)$ 代表以頂點 v_i 爲端點的邊之總個數, 或者說是和頂點 v_i 相鄰的邊之總個數。

小承: 很好! 你知道爲什麼嗎?

小君: 不知道。

小淳: 我知道, 因爲每個邊都有二個端點, 所以計算與每個頂點相鄰的邊之總和時相當於每個邊都算過兩次。

小承: 很好, 從這個公式 (2) 討論多面體時, 我們可以推到

$$\frac{2}{3}e \ge v \tag{3}$$

你知道爲什麼嗎?

小淳: 因爲多面體每個頂點至少與三個邊相鄰, 否則就不成立體, 而是在一個平面上了。所以每個 $\deg(v_i) \ge 3$, 也就是 $2e = \sum_{i=1}^{v} \deg(v_i) \ge 3v$。

小承: 非常好。同理, 你也可以推導出 e 與 f 的關係啦!

小淳: 嗯, 由於每條稜 (邊) 都恰屬於多面體的兩個面, 所以

$$\sum_{i=1}^{f} f_i = 2e \tag{4}$$

同理的每個面至少有3個邊, 所以每個 $f_i \geq 3$, 也就是 $2e = \sum_{i=1}^{f} f_i \geq 3f$。

$$f \geq \frac{2}{3}e \tag{5}$$

小君: 棒極了。這一題我們並不需要公式 (4)。由 (1) 及題目的敘述可得到

$$2 = v - e + 10n$$

由 (3) 我們可得到

$$\begin{aligned} 2 \;&\leq\; \frac{2e}{3} - e + 10n = 10n - \frac{e}{3} \\ &\Longrightarrow 10n - 2 \geq \frac{e}{3} \end{aligned}$$

因此我們得到

$$30n - 6 \geq e \tag{6}$$

如果 $10n$ 個凸多面體沒有相同邊數的 n 個面, 由於每個面至少有3個邊, 則這 $10n$ 面所包含的邊數之總和至少 $\geq (n-1)(3+4+\ldots+12) + 13 \cdot 10 = 75n + 55$, 由公式 (4), 我們有 $2e \geq 75n + 55$, 即 $e \geq 37.5n + 27.5$。這與公式 (6) 不合。所以至少有 n 個面, 它們的邊數都相同。

誌謝：本篇文能順利出稿, 作者們要感謝劉江楓, 徐以超博士及白國燈的建議及提供答案, 同時也謝謝閱卷的教授、老師們提供學生答案資料, 同時也謝謝陳寶鳳女士幫忙打字。

—本文作者葉均承就讀於北一女中一年級、葉永南爲中央研究院數學所研究員, 孫文先爲九章出版社負責人—