托勒密(Ptolemy) 定理與 “三弦定理”的關係

樂嗣康

古希臘天文學家、數學家托勒密 (Ptolemy, 約公元90-168年) 曾發現一個極爲著名的定理。即在平面內有四點, A, B, C, D 構成一個凸四邊形, 則必有下列的結論:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq BD\cdot AC.$$

當四點構成一個圓內接四邊形時, 則

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot AC.$$

這就是著名的托勒密定理, 如圖1。

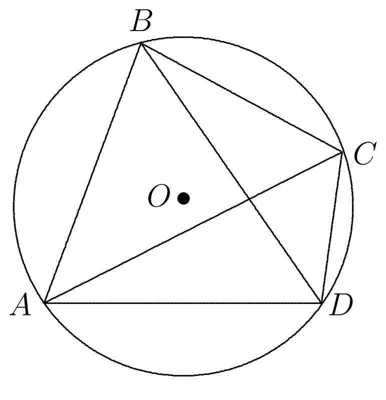

圖1

18世紀著名的瑞士數學家尤拉 (又譯爲歐拉, Euler, 1707-1783年) 曾提出與托勒密定理相類似的定理, 即

若 A, B, C, D 爲一直線上順次四點, 則

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot AC.$$

世人稱這個定理爲尤拉定理。

我們若將圓的半徑看成可以無限增大, 當半徑趨向無限大時, 這時, 托勒密定理中的共圓四點 (即圓內接四邊形的四個頂點), 可以看成一條直線上的四點, 圓轉化成直線。顯然, 尤拉定理就成爲托勒密定理的特例了。

我們若將上述的命題置於球面上來看, 球面上的直線是一個大圓, 也就是說是封閉的。由此, 也可以淸楚地看到尤拉定理與托勒密定理的統一, 是直線與圓的統一。

現在舉一個例子:

設 $ABCD$ 爲圓內接凸四邊形, 則

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA},$$

如圖2

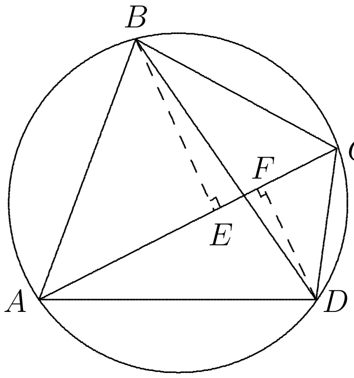

圖2

證: 設 $ABCD$ 凸四邊形的外接圓半徑爲R, 作 $BE\perp AC$ 交 AC 於 E, 作 $DF\perp AC$ 交 AC 於 F, 如圖2,

$$\begin{aligned}
&\because AC(AB\cdot BC+CD\cdot DA)\\
&=AC(2R\cdot BE+2R\cdot DF)\\
&=2R\cdot AC(BE+DF)\\
&=2R(AC\cdot BE+AC\cdot DF)\\
&=2R(2\int_{\triangle ABC}+2\int_{\triangle ACD})\\
&=4R\cdot\int_{ABCD}.
\end{aligned}$$

同理, $BD(DA\cdot AB+BC\cdot CD)=4R\cdot\int_{ABCD}$。

$$\begin{aligned}
&\therefore AC(AB\cdot BC+CD\cdot DA)\\
&=BD(DA\cdot AB+BC\cdot CD).
\end{aligned}$$

但 $BD\neq 0$, $AB\cdot BC+CD\cdot DA\neq 0$,

$$\therefore \frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}$$

得到了證明。

同樣, 我們可以將 $ABCD$ 的外接圓半徑趨於無窮大 (即這時 $\angle B\to 180^\circ$, $\angle C\to 180^\circ$, $\angle A\to 0^\circ$, $\angle D\to 0^\circ$) 這時凸四邊形 $ABCD$ 已經轉化爲在一直線上順序之四點 A, B, C, D。此時, 其結論仍舊不變, 當然, 我們也可以直接把它證明。

由此, 我們可以導出一個新命題 (定理):

若 A, B, C, D, 爲一直線上順序的四點, 則

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}.$$

當然, 我們也可以說, 若將圓的半徑趨於無限大, 則後面的新命題 (定理) 就是前面定理的特例。

下面我們再舉一個例子 (亦即不久前在浙江日報刊登的遼寧省侯明輝老師發現的“三弦定理”

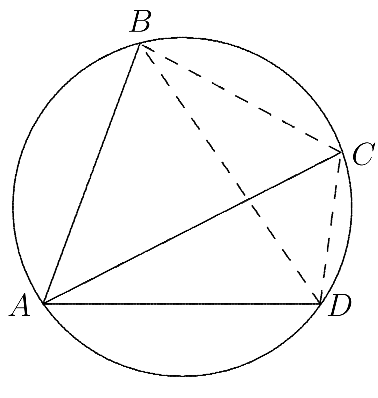

圖3

如圖3, 設 A 爲圓 O 的圓周上一點, 過

A 任作三弦 AB, AC, AD, 則

$$\begin{aligned} & AC\cdot\sin\angle BAD \\ =\ & AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle BAC。\end{aligned}$$

很明顯, 這是將托勒密定理中的邊與邊之間的關係轉化爲邊與角之間的關係。

事實上, 我們只要應用托勒密定理來證即可得到這個“三弦定理”。

證: 既然有過 A 點的三弦 AB, AC, AD, 則連結 BC、CD, 必得到一個圓內接四邊形 $ABCD$, 如圖3。

又 $\because \triangle ABD$, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ 都內接於同一個圓。設該圓的半徑爲 R, 則應用正弦定理即可得到

$$\begin{aligned} & AB\cdot CD+AD\cdot BC \\ =\ & AB\cdot 2R\cdot\sin\angle CAD \\ & +AD\cdot 2R\cdot\sin\angle BAC \\ & AC\cdot BD=AC\cdot 2R\cdot\sin\angle BAD \end{aligned}$$

由托勒密定理知,

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD。$$

$\therefore 2R\cdot AB\sin\angle CAD+2R\cdot AD\cdot\sin\angle BAC = 2R\cdot AC\cdot\sin\angle BAD$。即

$$\begin{aligned} & AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle BAC \\ =\ & AC\cdot\sin\angle BAD \end{aligned}$$

於是得出了“三弦定理”, 並得到了證明。

所以可以說, “三弦定理”是一個新命題(定理), 也是托勒密定理的一個推論。

“三弦定理”的逆命題也是可以證明的。

如果有同一頂點的三條線段 AB, AC, AD, 它們的夾角分別爲 $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle BAD$, 且具有下列關係: $AC\cdot\sin\angle BAD = AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle BAC$, 則 A, B, C, D, 這四點必共圓。也即線段 AB, AC, AD 爲同一圓上且有公共頂點 A 的三條弦。

現在來證明“三弦定理”的逆命題。

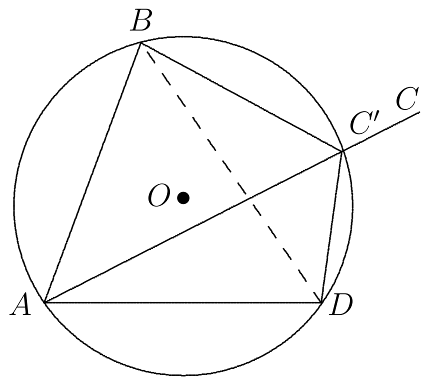

圖4

如圖4, 有公共端點 A 的三條線段 AB, AC, AD, 且它們的長度與相互間的夾角具有下列關係:

$$\begin{aligned} & AC\cdot\sin\angle BAD \\ =\ & AB\cdot\sin\angle CAD+AD\cdot\sin\angle BAC. \end{aligned}$$

則 A, B, C, D 四點共圓。

證: 過不在一直線上的三點 A, B, D 作一圓 O, 交 AC(或延長線上) 於 C' 點, 並設圓 O 的半徑爲 R, 連結 BC', DC', 構成一個圓內接四邊形 $ABC'D$, 於是, 由“三弦

定理”可得,

$$AC' \cdot \sin\angle BAD$$
$$= AB \cdot \sin\angle C'AD + AD \cdot \sin\angle BAC'$$

但已知

$$AC \cdot \sin\angle BAD$$
$$= AB \cdot \sin\angle CAD + AD \cdot \sin\angle BAC。$$

而 A, C, C' 共線,

$$\therefore \angle BAC = \angle BAC', \angle CAD = \angle C'AD$$
$$\therefore AC' \cdot \sin\angle BAD = AC \cdot \sin\angle BAD.$$
$$\therefore AC' = AC, \quad 即 C' \equiv C.$$

但 A, B, C', D 共圓, $\therefore$ A, B, C, D 共圓。這就是說, AB, AC, AD 爲過同一頂點 A 在圓 O 上的三條弦, 得到了證明。

由此可知, “三弦定理”的逆定理也是存在的。

當然, 我們若把“三弦定理”當作原始的定理則也可以推出托勒密定理。後者同樣可以成爲前者的推論, 然而托勒密定理發現於公元後二世紀, 距今已有一千八百多年, 因而我們只能說“三弦定理”是托勒密定理的推論。由於“三弦定理”敍述簡明, 且在計算上便於應用, 稱它爲三弦定理也是合乎情理的。正像托勒密定理與尤拉定理的關係相類似。

以上只是我個人的一點看法, 不知妥當否?

—本文作者任教於中國寧波大學—