勾股數與張角長方形

王文甫・鄧仲仁・顏士傑・羅春光

勾股定理 (又稱畢氏定理) 說明直角三角形 △ 的邊長 a, b, c 必滿足以下關係

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

在整數論中, $(a,\ b,\ c)$ 是爲以上方程式正整數解 (即勾股數) 若且唯若存在正整數 $k, m, n (m > n)$ 使得

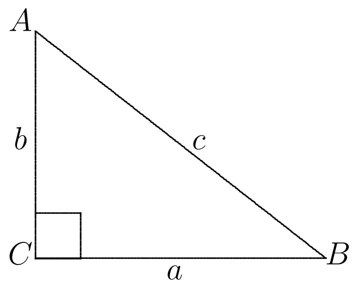
$$(a,b,c) = k(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) \text{ 或 } k(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2).$$

但有關 m, n 兩數的幾何意義, 則似乎從未有文獻提及。我們證明了 $m,\ n$ 實爲 $\triangle ABC$ 的某一「張角長方形」的邊長, 並重新證明以上定理。並且探討「張角長方形」與直角三角形的關係。此關係可推廣至一般三角形。

一. 前言

讓我們從勾股定理開始。設 a, b, c 爲三角形 $\triangle ABC$ 的邊長 (見圖一), 則 $\angle C$ 爲直角若且唯若

$$c^2 = a^2 + b^2$$



圖一

又若邊長 a, b, c 皆爲正整數, 則稱 (a, b, c) 爲勾股數 (又稱畢氏三元數, Pythagorean triple), 例如 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), ... 等等。對於勾股數, 已知有以下的刻劃 (見 [1.]):

定理1: 三元數 $(a,\ b,\ c)$ 爲勾股數, 若且唯若存在正整數 $k,\ m,\ n,\ m > n$, 使得

$$(a,b,c) = k(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) \text{ 或 } k(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2) \quad (1)$$

先定義 $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n\}$ 表 $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 等整數的最大公因數。又 $x|y$ 表整數 y 可被 x 整除。定理1的證明依賴於以下定理。

定理2 [1,2]: 設 a, b, c 均爲正整數, 則 (a, b, c) 爲勾股數, a 爲偶數且 a, b, c 互質 (即 $\{a, b, c\} = 1$) 若且唯若存在正整數 m, n 使得

$$(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2) \quad (2)$$

其中

$$m > n > 0, \quad \{m, n\} = 1, \quad 且 \quad m, n 爲一奇一偶。 \quad (3)$$

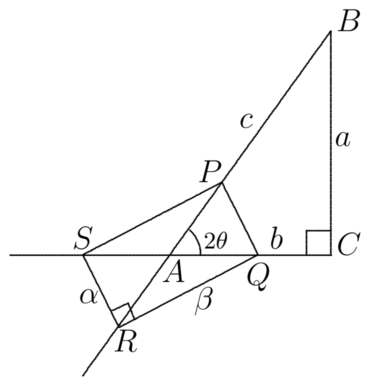
定理1, 2爲初等數論兩個基本又深刻的定理, 尤其是定理2, 對邊長 (a, b, c) 與整數 m, n 的要求都很細緻。定理2的證明應用到整數論中很多基礎的知識, 並需要一個重要的引理 (見 [1, p.87]和 [2, p.40]), 即對於整數不定方程 (diophantine equation) $uv = w^2$ 在 u, v 互質的條件下, 通解是 $u = m^2$, $v = n^2$, $w = mn$, 其中 m, n 爲正整數, 且 $m > n$。

可是 m, n 兩個正整數有甚麼幾何意義? 則似乎從未有文獻提及, 我們證明了 m, n 實爲某一「張角長方形」的邊長, 並對定理1給出一個「幾何」的證明。

我們將在第二節中介紹張角長方形, 並重新證明定理1。在第三節中我們將探討一般三角形的邊長和其「張角三角形」之間的關係。

二. 張角長方形

若將直角三角形 $\triangle ABC$ 中的邊 BA 和 CA 延長, 使得 $RAPB$ 共線; $SAQC$ 共線, 且 $RA = AP$, $SA = AQ$, 這樣 $PQRS$ 必爲一長方形 (見圖二)。我們稱長方形 $PQRS$ 爲三角形在 $\angle A$ 的 張角長方形 (rectangle at subtending angle)。設此長方形的邊長爲 α 和 $\beta (\alpha < \beta)$。並設 $\angle BAC = 2\theta$。



圖二

則有 $\tan\theta = \frac{\alpha}{\beta}$, 再利用 tangent 函數的倍角公式:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta},$$

知

$$\frac{a}{b} = \tan 2\theta = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \quad (4)$$

其中 $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$。簡化後得一條二次方程式

$$a\gamma^2 + 2b\gamma - a = 0.$$

因此

$$\gamma = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{-2b \pm 2c}{2a},$$

其中因 γ 爲正數, 負根不合。故

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma = \frac{c - b}{a}.$$

我們已證明了以下定理的第一部分:

定理3: 設 $\triangle ABC$ 爲直角三角形, 其中 $\angle C$ 是直角, a, b, c 爲其邊長, 且 α, $\beta(\alpha<\beta)$ 爲 $\angle A$ 之某一張角長方形的邊長。則

(i) $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c-b}{a}=\frac{a}{c+b} \tag{5}$$

(ii) 存在實數 t 使得

$$(a,b,c)=t(2\alpha\beta,\beta^2-\alpha^2,\beta^2+\alpha^2).$$

證明:

(i) 上面已討論過第一個等式, 第二個等式再利用勾股定理即可推出。

(ii) 從 (4), 因 $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}$,

$$\frac{a}{b}=\frac{2\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}$$

設 $a=2\alpha\beta t$ (t 爲正實數), 則 $b=(\beta^2-\alpha^2)t$, 且

$$\begin{aligned}c^2&=(2\alpha\beta t)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2t^2\\&=(\beta^2+\alpha^2)^2t^2\end{aligned}$$

因此 $c=(\beta^2+\alpha^2)t$。故 (ii) 成立。

從定理3得知張角長方形邊長的比例決定了相關直角三角形邊長的比例, 因爲從 (ii) 有

$$a:b:c=2\gamma:1-\gamma^2:1+\gamma^2 \tag{6}$$

反過來則更明顯了。對照幾個基本的直角三角形; 在此, 設對應 $\angle A$ 的張角長方形之邊長爲 α_A 和 β_A; 而對應 $\angle B$ 的則爲 α_B 和 β_B

例1: 若 $(a,\ b,\ c)$=$(4,\ 3,\ 5)$, 則 $\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha_B}{\beta_B}=\frac{1}{3}$。

例2: 若 $(a,\ b,\ c)$=$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$, 則 $\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{\alpha_B}{\beta_B}=\sqrt{2}-1$。

例3: 若 $(a,\ b,\ c)$=$(12,\ 5,\ 13)$, 則 $\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{2}{3}$, $\frac{\alpha_B}{\beta_B}=\frac{1}{5}$。

例4: 若 $(a,b,c)=(24,7,25)$, 則 $\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{3}{4}$, $\frac{\alpha_B}{\beta_B}=\frac{1}{7}$。

從定理3容易得到以下推論。

推論4: 設 $\triangle ABC$ 爲一直角三角形, a, b, c 爲其邊長; 且 α, $\beta(\alpha<\beta)$ 爲 $\angle A$ 之某一張角長方形的邊長。則 $(a,\ b,\ c)$ 與某一組勾股數成正比若且唯若 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是一有理數。

我們可以著手去重新證明定理1。先來一個簡單的引理。

引理5: 若 $(a,\ b,\ c)$ 爲勾股數, 且 a, b 兩數中最少有一個是偶數。設 a 爲偶數, 則 b, c 的奇偶性質相同。

證明: 假設 a, b 皆爲奇數, 令 $a=2x+1$, $b=2y+1$, x, y 皆爲正整數。由勾股定理知

$$\begin{aligned}c^2&=(2x+1)^2+(2y+1)^2\\&=4(x^2+x+y^2+y)+2\end{aligned}$$

因此 c^2 必爲偶數, 即 c 必爲偶數。令 $c=2z$, 則 $c^2=4z^2$, 是4的倍數, 這與上式矛盾。所以 a, b 中最少有一個是偶數。

若 a 爲偶數, 則從勾股定理知 b, c 的奇偶性質相同。

定理1的證明: 若 (a,b,c) 滿足 (1), a, b, c 皆爲正整數, 且直接驗算知 (a,b,c) 滿足勾股定理。

設 (a,b,c) 為勾股數, 且 a 為偶數, 又設 $d=\{a,c-b\}$。令

$$\alpha=\frac{c-b}{d},\qquad \beta=\frac{a}{d}$$

則 α, β 均為正整數, $\alpha<\beta$, 且滿足 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c-b}{a}$。此說明 α, β 乃某一張角長方形的邊長。這樣, $2\alpha\beta=\frac{2a(c-b)}{d^2}$; 又

$$\beta^2-\alpha^2=\frac{a^2-(c^2-2bc+b^2)}{d^2}=\frac{2b(c-b)}{d^2}.$$

同理,

$$\beta^2+\alpha^2=\frac{2c(c-b)}{d^2}$$

因此, 勾股數

$$(a,b,c)=\frac{d^2}{2(c-b)}(2\alpha\beta,\beta^2-\alpha^2,\beta^2+\alpha^2). \quad (7)$$

最後, 讓我們說明 $t=\frac{d^2}{2(c-b)}$ 確實是一整數。首先, 由於 $d=\{a,c-b\}$, 有 $d^2=\{a^2,(c-b)^2\}$。另外, 從引理5知, $c+b$ 和 $c-b$ 均為偶數。因此 $2(c-b)|(c-b)^2$。又

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$$

得 $2(c-b)|a^2$。所以 $2(c-b)$ 是 a^2 和 $(c-b)^2$ 的公因數, 即可推論出 $2(c-b)|d^2$, 即 t 為整數, 因為 d^2 是兩者的最大公因數。

至此, 我們確定定理1的 m, n 實為 $\angle A$ 之某一張角長方形的邊長 β, α。讓我們將 α, β 對應之勾股數列表如下 (參考 [1, p.90]):

α	2	3	4	5	6	7
1	(4,3,5)	(6,8,10)	(8,15,17)	(10,24,26)	(12,35,37)	(14,48,50)
2		(12,5,13)	(16,12,20)	(20,21,29)	(24,32,40)	(28,45,53)
3			(24,7,25)	(30,16,34)	(36,27,45)	(42,40,58)
4				(40,9,41)	(48,20,52)	(56,33,65)
5					(60,11,61)	(70,24,84)
6						(84,13,85)

三. 一般情況

若 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, 而是一任意三角形, 這時, 張角長方形的邊長比 $\frac{\alpha}{\beta}$ 和三角形的邊長又有什麼關係呢? 首先, 設 α_A, β_A 是對應於 $\angle A$ 之某一張角長方形的邊長 (見圖三), 又 α_B, β_B 對應於 $\angle B$; α_C, β_C 對應於 $\angle C$, 又令

$$\gamma_A=\frac{\alpha_A}{\beta_A},\quad \gamma_B=\frac{\alpha_B}{\beta_B},\quad \gamma_C=\frac{\alpha_C}{\beta_C}$$

定理6: 設 $\triangle ABC$ 為一任意三角形, 其邊長為 a, b, c。則

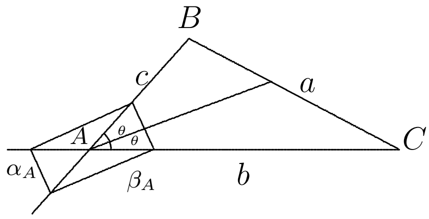
(i) $\gamma_A=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{s(s-a)}}=\frac{|\triangle ABC|}{s(s-a)}$, 其中 $|\triangle ABC|$ 代表$\triangle ABC$ 的面積, $s=$

$\frac{1}{2}(a+b+c)$。

(ii) $a : b : c = 1-\gamma_B\gamma_C : 1-\gamma_A\gamma_C : 1-\gamma_A\gamma_B$

(iii) $\gamma_A\gamma_B+\gamma_B\gamma_C+\gamma_A\gamma_C=1$

(iv) $\gamma_C=\frac{1-\gamma_A\gamma_B}{\gamma_A+\gamma_B}$



圖三

證明: 由於三角函數的半角公式 (參考圖三),

$$\gamma_A=\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

利用餘弦定理,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_A}{\beta_A}&=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}},\\&=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c+a)(b+c-a)}},\\&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{s(s-a)}},\\&=\frac{|\triangle ABC|}{s(s-a)},\end{aligned}$$

因爲從 Heron 公式,

$$|\triangle ABC|=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

同理

$$\gamma_B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\gamma_C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

因此

$$\gamma_A\gamma_B=\frac{s-c}{s}=1-\frac{c}{s},$$

又

$$\gamma_B\gamma_C=1-\frac{a}{s},\quad \gamma_A\gamma_C=1-\frac{b}{s}.$$

所以

$$\begin{aligned}&a:b:c\\=\,&1-\gamma_B\gamma_C:1-\gamma_A\gamma_c:1-\gamma_A\gamma_B.\end{aligned}$$

並且

$$\gamma_A\gamma_B+\gamma_B\gamma_C+\gamma_A\gamma_C=1.$$

從而得到

$$\gamma_C=\frac{1-\gamma_A\gamma_B}{\gamma_A+\gamma_B}.$$

證畢。

四. 結語

本文中一些等式並不陌生, 例如定理 6(iii), 用另一方式表達, 即

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\\\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1.$$

此恆等式在高中參考書上是常見的。但本文卻將這些涉及半角的恆等式賦予幾何意義,亦即賦予生命。

本問題乃英國數學史家 Ivor Grattan-Guinness 於1995 年在國立台灣師範大學舉行的一個國際數學史研討會中提出的。他的兩篇論文考慮了 $\alpha : \beta = 1 : n$ 的情況,並爲本文中定理3和推論4, 提供一個幾何的證明。有趣的是 Grattan-Guinness 發現與邊長3、4、5 的直角三角形對應之張角長方形爲中世紀教堂建築的「秘方」, 其作用跟黃金分割比例相似, 但引述的書籍卻不多。誠如他說, 本問題簡單有趣, 在文化上和教育上的價值應受肯定。

感謝 Grattan-Guinness 將他的論文寄給我們, 也感謝中山大學蔡志賢教授對本文的興趣和指正。本文源於鄧仲仁和顏士傑在八十四學年度的高雄區高中數學科學習成就優異學生輔導實驗計劃內一個暑期研究計劃的成果報告, 感謝國科會與教育部對該計劃的支持。

參考文獻

1. 潘承洞、潘承彪, 初等數論, 北京大學出版社, 1994。
2. 閔嗣鶴、 嚴士健, 初等數論, 凡異出版社, 1993。
3. I. Grattan-Guinness,“Ad quadratum” and beyond: Right-angled triangles generate all rectangles with sides in integral ratio, Zentrablatt D. Math. (1995) no.4, 138-139.
4. I. Grattan-Guinness, A portrayal of right-angled triangles which generates rectangles with sides in integral ratio, Math. Gazette, 84 (2000) 66-69.

—本文作者王文甫任教於高雄縣燕巢鄉明陽國中, 鄧仲仁和顏士傑分別是陽明大學醫學系和交通大學資訊工程系的學生, 羅春光任教於中山大學應用數學系—