射影平面六講 — 第五講

王九逵

從 $\mathbb{P}$ 到本身的一一對應, 若能把共線的點對應成共線的點, 這對應便叫作 射影變換 (projectivity 或 collineation)。在一個射影變換之下, 共點的線顯然也對應成共點的線。所以射影變換的對偶觀念便是它本身。

首先我們討論一個代數的引理和兩個作圖題, 以備後用。代數的引理是:

引理: 實數體 $\mathbb{R}$ 上的自同構 (automorphism) 只有恆等對應 (identity mapping)。

證明: 令 φ 爲實數體 $\mathbb{R}$ 上的自同構。因 $\varphi(1) = 1$, 而且 φ 保持四則算術運算的結果, 所以若 x 爲一有理數, 則 $\varphi(x) = x$。

若 x 爲正數, 則有 $y \in \mathbb{R}$ 使 $x = y^2$。於是 $\varphi(x) = \varphi(y)^2$ 仍然是一個正數。所以 φ 保持實數的大小次序。

設 $S \subset \mathbb{R}$ 爲一有上界的集合, s 是 S 的上確界 (supremum), 則 $\varphi(s)$ 必定也是集合 $\varphi(S)$ 的上確界。但是每一個實數 x 都是小於它的所有有理數所形成的集合的上確界。所以 $\varphi(x) = x$ 每個實數 x 都成立。

要講的兩個作圖題如下:

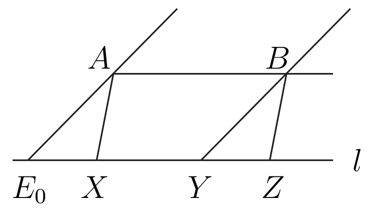
設 E_0, E_1, I, X 及 Y 爲 $\mathbb{P}$ 中一直線 l 上的五點。設

$$\xi = \text{℞}(E_0, E_1, I, X),$$
$$\eta = \text{℞}(E_0, E_1, I, Y).$$

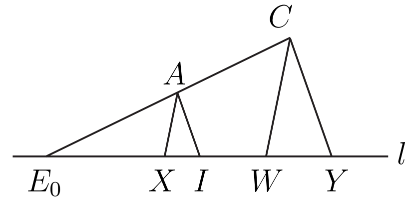
我們的目標是利用直尺作出兩個點 Z 和 W 使

$$\text{℞}(E_0, E_1, I, Z) = \xi + \eta,$$
$$\text{℞}(E_0, E_1, I, W) = \xi\eta.$$

這裡所說的直尺和歐氏幾何中的直尺略有不同, 是指能畫出射影空間中的直線的工具。

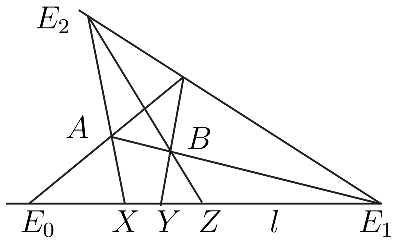


圖一

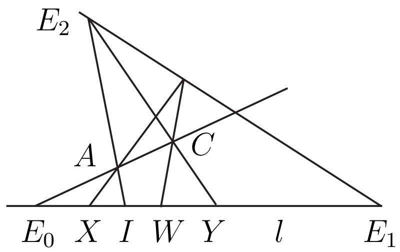


圖二

先考慮 E_0, E_1, I 的齊次座標分別爲 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(1,1,0)$ 的情形。在 l 以外選一點 A。畫 $\triangle AE_0X$。畫直線 AB 平行於 l 及直線 YB 平行於 E_0A。設兩線的交點爲 B。畫 BZ 平行於 AX 交 l 於 Z, Z 便是所求的點。(請參看圖一)。再者, 過 Y 做 AI 的平行線, 交直線 E_0A 於 C。W 便是過 C 平行於 AX 的直線和 l 的交點。(請參看圖二)。這兩項作圖的證明只用初等幾何, 故略之。



圖三



圖四

對一般情形, 我們把以上想成 $\mathbb{P}$ 的射影座標系 (E_0, E_1, E_2, U) 下的作圖。把通過某點 P 作平行於某直線 m 的作法改成連接 P 和 m 與 E_1E_2 的交點。這樣便可以只用直尺作出 Z 和 W 了。(請參看圖三和圖四)。這作法成功的證明和我們給的 Pappus 定理的證明類似。

有了這些準備以後, 我們可以證明射影變換的一個重要的性質了, 便是它們保持叉比:

定理 1: 設 π 爲 $\mathbb{P}$ 上的射影變換, E_0, E_1, I, X 爲$\mathbb{P}$ 中共線的四點。則有

$$\begin{aligned}&\text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(X))\\&=\text{℞}(E_0,E_1,I,X).\end{aligned}$$

證明: 設 E_0, E_1, I 及 X 所在的直線爲 l。不失一般性, 我們假定 E_0, E_1 和 I 兩兩相異。在 l 上建立射影座標系 (E_0, E_1, I)。對任意實數 x 定義 $P(x)$ 爲 l 上以 $(1,x)$ 爲射影座標的點。於是有 $\text{℞}(E_0,E_1,I,P(x)) = x$。經過射影對應 π, $\pi(E_0)$, $\pi(E_1)$, $\pi(I)$ 和 $\pi(P(x))$ 四點仍共線。定義函數

$$\varphi(x) = \text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(P(x))).$$

顯然 $\varphi(1) = 1$。上文的圖三便是從 $P(x)$ 和 $P(y)$ 畫出 $P(x+y)$ 的作圖。因在作圖的過程中只用到直尺, 所以經過 π 的對應,

$$\begin{aligned}&\text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(P(x+y)))\\&=\text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(P(x)))\\&\quad+\text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(P(y))),\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

用同樣的方法我們也可以得到

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

換言之, φ 是 $\mathbb{R}$ 上的自同構。從引理知 $\varphi(x) = x$; 即

$$\begin{aligned}&\text{℞}(\pi(E_0),\pi(E_1),\pi(I),\pi(P(x)))\\&=\text{℞}(E_0,E_1,I,P(x)).\end{aligned}$$

下定理及其證明聯繫射影座標系和射影變換兩個觀念:

定理 2: 在 $\mathbb{P}$ 中取兩個含四點的集合

$$\{D_0, D_1, D_2, U\} \quad 和 \quad \{E_0, E_1, E_2, I\}.$$

假定在每個集合內都沒有三點共線。則有且僅有一個 $\mathbb{P}$ 的射影變換 π 使

$$\begin{aligned} &\pi(D_i) = E_i, \quad i = 0, 1, 2, \\ &\pi(U) = I. \end{aligned} \tag{1}$$

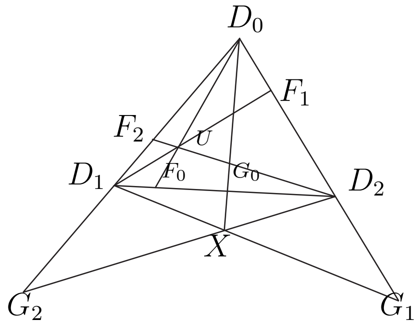
證明: π 可以用下法定義: 建立射影座標系

$$(D_0, D_1, D_2, U) \quad 和 \quad (E_0, E_1, E_2, I).$$

設 $X \in \mathbb{P}$, $(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$ 爲 X 關於射影座標系 $(D_0,\ D_1,\ D_2,\ U)$ 的射影座標。令 $\pi(X)$ 爲關於座標系 $(E_0,\ E_1,\ E_2,\ I)$ 以 $(\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$ 爲射影座標的點。這樣定義的 π 顯然是滿足 (1) 式的射影變換。

以下證明這射影變換的唯一性。設 ψ 爲另一滿足 (1) 式的射影變換。設 D_1D_2 和 D_0U 二直線的交點爲 F_0, D_2D_0 和 D_1U 的交點爲 F_1, D_0D_1 和 D_2U 的交點爲 F_2。則 $\pi(F_0) = \psi(F_0)$, $\pi(F_1) = \psi(F_1)$, $\pi(F_2) = \psi(F_2)$。由定理 1, 若 X 爲直線 D_1D_2 上的一點, 則

$$\begin{aligned} &R_X(E_1, E_2, \pi(F_0), \pi(X)) \\ = &R_X(E_1, E_2, \psi(F_0), \psi(X)). \end{aligned}$$



圖五

所以 $\pi(X) = \psi(X)$。同理 $\pi(X) = \psi(X)$ 對直線 D_2D_0 及直線 D_0D_1 上的任一點 X 均成立。

現設 X 爲 $\mathbb{P}$ 不在三直線 D_1D_2, D_2D_0 和 D_0D_1 上的一點。令 G_0 爲 D_0X 和 D_1D_2 二直線的交點。則 $\pi(G_0) = \psi(G_0)$。同理 若 G_1 和 G_2 分別爲二直線 D_1X, D_2D_0 的交點及二直線 D_2X, D_0D_1 的交點, 則亦有 $\pi(G_1) = \psi(G_1)$ 和 $\pi(G_2) = \psi(G_2)$。茲因 $\pi(X)$ 爲連接 E_i 和 $\pi(G_i)$ 的直線及連接 E_i 和$\psi(G_i)$ 的直線的交點, $i = 1,\ 2,\ 3$, 而且這交點是唯一的, 所以我們得到了 $\pi(X) = \psi(X)$.

設 π 爲 $\mathbb{P}$ 上的射影變換, $(D_0,\ D_1,\ D_2,\ U)$ 爲 $\mathbb{P}$ 的齊次座標系, E_0, E_1, E_2, I 爲 D_0, D_1, D_2, U 在對應 π 下的像, ε_0, ε_1, ε_2, ι 爲 E_0, E_1, E_2, I 的齊次座標向量, 其中 $\iota = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. 設 $X \in \mathbb{P}$, 向量 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ 爲 X 的齊次座標向量, E 爲以 ε_0, ε_1 和 ε_2 爲列座標的方陣, 則

$$\xi E = \xi_0\varepsilon_0 + \xi_1\varepsilon_1 + \xi_2\varepsilon_2, \tag{2}$$

爲像點 $\pi(X)$ 的齊次座標向量。

Alias 和 alibi 是法律上在偵查犯罪時常用的兩個拉丁字。前者可以直譯爲「別名」, 指當事人的化名。後者可以直譯爲「別地」, 指當事人在案發時所出現的另一現場, 即所謂「不在場證明」。這兩個名詞常被幾何學家借用。例如一點的射影座標爲它的 alias, 在射影變換下它的像是它的 alibi。上面的討論說明二者的理論其實是互補的。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—