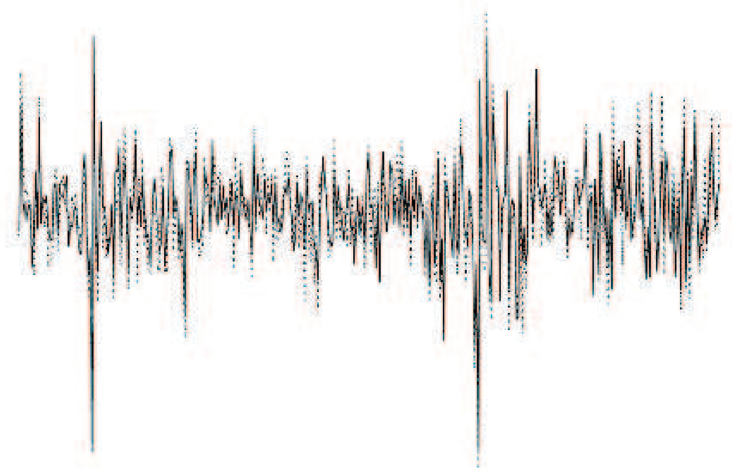
布朗運動: 從物理學到財務學

陳仁遠

理論物理學的觀念應用於財務分析, 最早可追溯至1900年法國學者 Bachelier。他認爲股票價格的波動, 類似物理學的布朗運動。因此, 布朗運動的數學性質, 可應用於股市分析。此一想法, 在財務學界延用至今。例如一個以芝加哥大學商學院教授爲首的研究群所發展的資本市場理論, 即是以此觀察爲基礎。該資本市場理論後來對財務分析的影響至爲深遠。[圖一]爲史坦普500指數日報酬率資料與布朗運動的比照圖。史坦普500之日資料取自 yahoo.com , 期間爲2000年一月一日至2000年十二月三十一日。布朗運動模擬是根據股票指數之日變異數模擬而成。我們由 [圖一]可見, 股票之日報酬率變動與布朗運動實無大異。



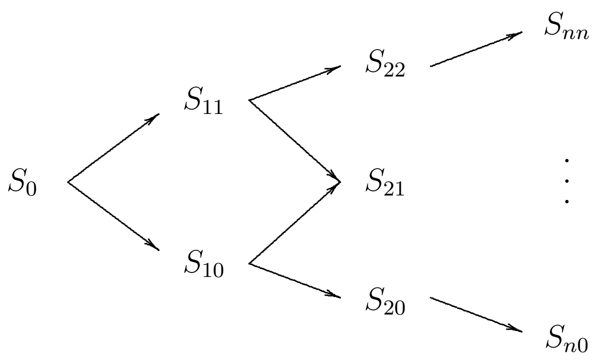
圖一

上世紀八零年代末期, 基於混沌理論的分析模型開始引入財務學[1]。 此領域的學者認爲股市並非一理性市場, 故布朗運動不足以解釋很多市場現象。反之, 混沌理論是一種亂中有序的物理行爲, 比較適合財務分析。由此之後, 許多自然科學的觀念亦陸續引進財務領域。例如九零年初期, 有類神經網路, 而到上世紀末, 基因理論則有取代之勢。這些先進的理論: 第一, 尙未完

[1]諸位如看過電影侏儸紀公園, 當對那位舉止怪異的數學家不陌生。

全成熟(爲時甚短); 第二, 不若布朗運動的簡明易懂; 第三, 財務學界的接受度尚待考驗, 故本文以介紹布朗運動的應用爲主。

一元的布朗運動在財務學上稱「隨機漫步」, 類似統計上的二項分配, 亦類似生產管理上的結構樹分析。我們且看下面的圖示:



其中 S_0 爲今日股價, S_{ij} 爲 i 日於 j 點的股價。布朗運動 (或隨機漫步) 的解釋如下: 以今日股價爲基準, 下期 ($i=1$) 的股價可「漫步」至 S_{11} 或 S_{10} 。若下期股價爲 S_{11} , 則兩期後之股價爲 S_{22} 或 S_{21} 。但若下期股價爲 S_{10} , 則兩期後之股價爲 S_{21} 或 S_{20} 。依此類推, 我們可於 n 期後有 $S_{n0}, S_{n1}, \ldots$, 到 S_{nn} 這麼多的可能價格。其可能機率爲:

$$P_{nj} = C_j^n p^j (1-p)^{n-j} \qquad \text{(式一)}$$

令 0 到 n 的總距離爲 t , 則每期的長度爲 $\frac{t}{n}$, 當 t 固定而 $n \to \infty$ 時, 我們可得到S_t 與 S_0 的關係如下:

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t] \qquad \text{(式二)}$$

其中 μ 及 σ 爲參數, B 爲布朗運動。由於指數項的第二項爲隨機積分, 故 S_t 爲一隨機値。布朗運動雖爲英國植物學家布朗於1827年發現[2], 但其數學性質乃是數學家維納 (Wiener) 所建立。故今日我們亦稱布朗運動爲「維納過程」。布朗運動 (或維納過程) 有下列重要的性質:
(1) $dB \sim N(0, dt)$ 此性質說明布朗運動的全微分是一常態分配 (亦稱高斯分配), 其均數爲0, 變異數爲 dt (時間的微分);(2) $(dB)^2 \sim dt$ 此一性質涉及隨機微積分,(stochastic calculus) 實際的證明頗爲複雜, 最具代表性的著作是日本數學家伊籐 (Ito) 的博士論文 (有英譯本)。故我們亦稱爲伊籐微積分 (Ito calculus) 。

[2]布朗運動一說是由大科學家愛因斯坦在1905年所提出。

若將 S_t 對 S_0 作微分, 我們可得

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma(dB_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(dB_t)^2] \\ &= S_t[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma(dB_t) + \frac{\sigma^2}{2}dt] \\ &= S_t[\mu dt + \sigma dB_t] \end{aligned} \qquad \text{(式三)}$$

式中的第一行僅是簡單的微積分數鍊法則 (chain rule), 然而其最尾項則是一般微積分所無。此項稱爲「伊籐調整項」(Ito adjustment), 是隨機微積分中的特殊處理, 乃由伊籐博士所提的數學定理而得。第二行將 $\frac{1}{2}\sigma^2(dB_t)^2$ 設成 $\frac{\sigma^2}{2}dt$ 是根據上述之布朗運動的數學性質 (即 $dB^2 \sim dt$)。第三行則由第二行簡化而成。

(式三) 可提供 dS_t 的一些數學性質。譬如dS_t 的均數爲:

$$E(dS_t) = S_t\mu dt$$

因爲 $E(dB_t) = 0$ 。dS_t 的變異數 (方差) 爲:

$$\operatorname{Var}(dS_t) = S_t^2\sigma^2\operatorname{Var}(dB_t) = S_t^2\sigma^2 dt$$

亦因爲 $\operatorname{Var}(dB_t) = dt$。

任何財務資產, 只要與股價有關, 均可應用上述例子。例如近來風行台灣的認購權證, 以及即將全面開放的期貨。認購權證爲一衍生性資產。亦即其價格波動, 是股價運動的函數。同時權證有一定的到期日, 故我們可將權證寫爲股價與期間的函數。權證價格可計算如下:

$$C(S_0, 0) = E[e^{-\int_0^T \mu dt}C(S_T, T)] \qquad \text{(式四)}$$

式中 $E(\cdot)$ 爲期望值。爲求解, 我們須應用科默哥若夫 (Kolmogorov) 定理, 即權證價格須滿足以下的偏微分方程:

$$\frac{\partial C}{\partial S}\frac{E[dS]}{dt} + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\frac{\operatorname{Var}[dS]}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} = \mu C \qquad \text{(式五)}$$

此方程式之解, 爲物理學中熱力學方程式之一特例, 故有現成的解可用。偏微分方程式須有足夠的邊際條件, 才有唯一解。以上之偏微分方程式, C 對 S 微方 2 次, 對 t 微分一次, 故其邊際條件須有兩個來自 S , 一個來自 t , 才會有唯一解。以權證而言, 兩個來自 S 的邊際條件爲當 S 爲0時, 和當 S 爲 時。一個來自 t 的邊際條件爲當 $t = T$ 時, 即當權證到期時。C 必須在這三個邊際條件上作好定義, 才能求得偏微分方程的唯一解。

茲舉一例供讀者參考。令

$$E(dS) = \operatorname{Var}(dS) = 0$$

則 (式五) 可大爲簡化:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mu C \tag{式六}$$

此微分方程式爲一階方程, 極易解得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{C} &= \mu \partial t \\ \partial \ln C &= \mu \partial t \\ \ln C &= \mu t + k \\ C &= e^{\mu t + k}\end{aligned}$$

因爲此微分方程仍需一邊際條件, 令其爲 $C_T = 1$, 如此一來

$$\begin{aligned}C_T &= e^{\mu T + k} = 1 \\ \text{故 } k &= \ln 1 - \mu T = -\mu T \\ \text{代回 } C &= e^{\mu t - \mu T} \\ &= e^{-\mu (T-t)}\end{aligned}$$

此即著名的未來值折現公式。我們可將此公式略作一般化。令 $E(dS) = \mu S dt$ 且 $\mathrm{Var}\,(dS) = \sigma^2 S^2 dt$ (如 (式三)), 則我們可對當今台灣衍生商品市場極爲熱門的權證加以訂價。首先,(式五) 可寫成:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} = \mu C \tag{式七}$$

首先, 我們需認知(式七) 乃一偏微分方程, 不同於(式六) 的普通微分方程。偏微分方程需先分解成普通微分方程(單變數) 後才可求解。物理學上的偏微分方程有解的並不多。著名的有熱傳導方程 (Heat Equation) 與波傳導方程 (Wave Equation) 。故吾人如欲解偏微分方程, 最佳的方法是作變數變換, 再套入熱傳導方程或是波傳導方程求解。在此, 我們先看偏微分方程的一般解法。欲將一個偏微分方程分解成普通微分方程, 通常先假定 (猜想) 一個解的一般式。舉例而言, 欲解下列偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{式八}$$

可先令(猜想)

$$u = f(t)\nu(x)$$

然後針對 x 與 t 微分:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu(x)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)\frac{d\nu(x)}{dx}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)\frac{d^2\nu(x)}{dx^2}$$

代回原式 (式八)

$$\nu(x)f'(t) = h^2 f(t)\nu''(x)$$

改寫:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = h^2\frac{\nu''(x)}{\nu(x)} \equiv k \qquad \text{(式九)}$$

如此一來,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = h$$
$$h^2\frac{\nu''(x)}{\nu(x)} = k$$

爲二個普通微分方程, 可分別解之得

$$f(t) = c_1 e^{kt}$$
$$\nu(x) = e^{h^2\beta^2 t}(a\cosh\beta x + b\sinh\beta x)$$

式中 β, a, b , 爲任意常數。欲解此常數值, 我們需要邊際條件。(式八) 對 x 偏微分兩次, 故需 x 的兩個邊際條件, 對 t 微一次, 故需對 t 的一個邊際條件。有了此三條件之後, 讀者可仿 (式六) 的解法, 解出 β, a, b 。

回到 (式七), 此方程無法直接求解, 但可透過變數變換解得:

$$C(S,t) = e^{-\mu(T-t)f(x,\tau)}$$

其中

$$x = \frac{2}{\sigma^2}[\mu - \frac{\sigma^2}{2}][\ln\frac{S}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$$
$$\tau = \frac{2}{\sigma^2}[\mu - \frac{\sigma^2}{2}](T-t) \qquad \text{(式十)}$$

式中 T 爲權證到期日 (t 的邊際條件), K 爲權證的履約條件。在到期日時 (T), 權證 C 有一定的金錢收入, 此爲 t 的邊際條件。在 S 方面, 兩個邊際條件分別爲 $S=0$ (此時 $C=0$), 與 $S\to\infty$ (此時 $C\to\infty$)。由邊際條件可知, 權證的求解並不容易, 即使作了變數變換, 仍然存在許多技術問題。此待有興趣的讀者繼續研讀有關權證的書籍。

接下來, 我們來談布朗運動的另一個科默哥若夫定理應用, 將此定理試用於期貨之上。期貨價格可表示為

$$F(S_0,0)=E(F(S_T,T)) \qquad \text{(式十一)}$$

此價格滿足下列偏微分方程:

$$\frac{\partial F}{\partial S}\frac{E(dS)}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\frac{\mathrm{Var}\,(dS)}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \qquad \text{(式十二)}$$

此式與(式五) 不同之處在於右方為 0, 此乃因為 (式十一) 沒有指數函數的緣故。期貨的邊際條件與權證類似, 在 t 方面為到期日的現金收入, 在 S 方面為 $S=0$ $(F=0)$, 與 $S\to\infty$ $(F\to\infty)$。

結論:

在本文中, 我們提及如何運用科默哥若夫定理來分析權證與期貨。財務學中其它許多相關領域, 如股票分析, 多期的資本資產訂價模式 (適用於股票, 由 Merton 於 1973 年提出), 利率與債券訂價模式 (由 Vasicek 與 Cox, Ingersoll, Ross 在 1977 先後提出), 現金或有信用分析 (應用於倒帳風險), 及流動性分析等, 均可由布朗運動之數學性質來進行分析工作, 導出頗有意義的結果。

—本文作者任教於美國羅格斯大學財務金融學系 —