財務數學(上)

陳　宏・郭震坤

一. 前言

在短短的四分之一世紀中, 能夠發展出一支影響廣泛的應用數學嗎? 不必懷疑, 有此看法的數學家不乏其人。財務數學 (Financial Mathematics , 或稱「金融數學」) 雖然可說是科學在廿世紀加速演進的結果, 但事實上它是特殊時代背景下, 機運、努力、加上非凡才情的產物。

雖然財務數學的歷史與實際應用可以回溯到更為久遠之前, 例如從十七世紀法國數學家 B. Pascal 與 P. Fermat 創立系統性的方法以計算未來事件發生的機率開始, 但財務數學的理論核心可說直到 1973 年才出現。這一年 F. Black 與 M. Scholes 出版了他們著名的「或有求償權」(contingent claims) 定價公式, 連同交易避險策略、以及或有求償權之價值所遵循的偏微分方程式, 可謂財務數學的濫觴。

Black 與 Scholes 如何在歷經種種困難之後, 發表他們的經典之作, 已經成為現代學術傳奇精彩的一章 (見 Black (1989) 的自述)。同年, R. Merton (1973) 亦導出同一公式, 並加以延伸。為表彰他們的傑出貢獻, 1997 年諾貝爾經濟學紀念獎頒予 Scholes 與 Merton 兩位 (Black 已不幸於 1995 年早逝)。這些貢獻不僅是在學術的創新與發展上, 更在人類經濟活動的拓展上, 直接或間接地創造了龐大的經濟產值。

或有求償權又稱衍生性金融證券 (Financial Derivative Securities)。其中兩種最基本的衍生性金融證券是期貨 (Futures) 與選擇權 (Options):

— 期貨是一個買賣契約, 買賣雙方約定在未來某日將交易一種約定商品, 且價格事先約定;
— 選擇權亦是一個買賣契約, 買方在付出一筆權利金之後, 具有在未來某日以約定價格購買 (此種選擇權稱為「歐式買權」(European call options)), 或出售 (此種選擇權稱為「歐式賣權」(European put options)) 一種約定商品的權利。

以上契約中的約定商品稱為衍生性金融證券的「標的資產」(underlying assets)。它們可能是個別公司的股票、股價指數、利率、外匯等金融商品, 或是黃金、白銀、棉花、金屬等一般商品。衍生性金融證券的價值即由標的資產的價值變動衍生而來。

在現代市場經濟中, 公司或家計單位常需要選擇可以承擔的風險水準。選擇權由於其契約設計的特性—有權利, 而無義務, 在未來以約定價格購買或出售一種約定商品—乃是極為有效

的避險工具。但其前提是選擇權必須能夠正確地定價, 以作爲市場買賣的參考, 否則這個市場就無法形成, 或擴大發展。

Black , Merton 與 Scholes 的選擇權定價公式不僅讓投資者每日在選擇權市場有交易的依據, 它在評定公司股權、投資計劃的策略、保險契約、與保證契約等之價值, 亦是良好的工具。而其推導方法所應用的隨機微積分更爲財務學引進了新的研究利器。

此外, 財務理論亦如其他經濟理論, 須由解釋實際資料的能力來驗證。選擇權定價理論在實證方面得到很大的肯定。公認不只在財務學方面, 且在所有經濟學領域中, 它都是最成功的。

對於衍生性金融證券的定價, 事實上 1900 年法國數學家 Louis Bachelier 在其博士論文中已作了初步嘗試。雖然後來者對股價與利率的運動有較佳的描述, 但基本上對「風險貼水」(risk premium) 未能作適當的處理, 以致未能有所突破。

以股票作爲標的資產的選擇權 (稱「股票選擇權」) 爲例, 由於股價的運動是隨機的, 股價波動的風險要投資者承擔就須給予適當的報酬, 這種報酬就是風險貼水。評價選擇權須要有正確的風險貼水, 但雖然理論上對風險貼水可予以嚴謹的定義, 在實務中卻幾乎不可能觀察到它。Black , Merton 與 Scholes 的主要貢獻就是指出選擇權定價時, 不必用到風險貼水。並非風險貼水消失了, 而是它已經存在現有的股價中。而可觀察到的現有股價是選擇權定價公式中的一個重要元素。

隨著時間作隨機變動的股價在數學上可用一種隨機過程 (stochastic process) 來描述。隨機過程討論隨機變數 X_t 在一段期間的行爲。時間 t 及隨機變數值 X_t 均可爲連續性或離散性。例如 Black , Merton 與 Scholes 採用了「布朗運動」(Brownian Motion) 來描述股價動態, 它是一種馬可夫過程。所謂馬可夫過程是指, 當給定 X_s, $s \leq t$時, 對 X_τ, $\tau \geq t$, 的影響, 僅依賴 X_t , 而不依賴任何 $X_u, u < s$。

接下來他們應用了一個「動態避險」(dynamic hedging) 的觀念。若股價上升$2時, 買權的價值會伴隨上升$1, 則若一個投資者擁有一股, 可賣兩個買權來消除股價漲跌的風險 (股價上升$2, 其買權部位則下降$2), 這樣的「投資組合」(portfolio) 雖然其中的個別證券均有風險, 但卻形成一個無風險組合, 不論股價上漲或下跌, 組合的價值不變。一般而言, 隨著選擇權到期日愈來愈近, 股價與選擇權價值的關係會變動, 因此股票與買權的相對數量須作調整, 以維持組合的無風險性質, 這就是動態避險。動態避險是選擇權定價理論的核心, 再加上依定義, 無風險組合應該賺取無風險報酬率的條件, 可導出買權價值所須遵循的偏微分方程式。再依買權到期時的邊界條件 (boundary condition), 解之可得下列歐式股票買權的價值公式:

$$S_0\Phi(y) - Ke^{-rT}\Phi(y - \sigma\sqrt{T}), \tag{1}$$

此公式顯示若買權只能在到期時被執行, 買權價值是預期股價 (第一項) 減去預期成本 (第二項) 之差, 細節請參看式 (7) 及伴隨的討論。

商業銀行與投資銀行應用選擇權評價公式, 爲其所銷售的衍生性金融商品 (稱爲「櫃檯市場商品」(over the counter products), 以有別於「交易所交易的商品」(exchange-traded products)) 定價, 其自身所產生之風險暴露則到期貨或選擇權等金融市場去避險。

1973 年芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 開始交易。因此, 正如歷史上許多經典理論的問世, Black , Scholes 及 Merton 的研究超越他們的時代。到 1979 年 Cox, Ross 與 Rubinstein (1979) 以「二項式模型」(Binomial Model) 顯示基本的無套利論點, 使 Black , Scholes , 及 Merton 的創新思惟的重要性更淸楚的呈現, 許多後來在市場推出的或有求償權之定價均以之爲基礎。

1979 年, Harrison 與 Kreps (1979), 及後來 Harrison 與 Pliska (1981) 對鞅論 (martingale)、隨機積分、與套利的研究, 使這些財務模式與相關數學的連結更爲明確。自此以後財務數學發展迅速, 且與市場的高速成長相呼應。時至今日, 理論愈趨成熟, 且具有無可挑戰的重要性, 更已簡化到可以教給國際企業、財務金融、經濟、資訊、數學、物理、統計、與工程等各學術領域的學生, 成爲現代應用數學重要的一環。財務數學本身原具有「科際整合」(interdisciplinary) 的特性。

在第二節中, 將用二項式模型來描述股票市場價格的波動, 討論歐式買權 (European call option) 定價的一個方法, 並說明如何進行動態避險。另藉由回顧買權 (lookback call option) 的討論, 說明雖然二項式模型定價方法有效易懂, 但在計算上可能遭遇極大的困難, 所以須要數値近似法及解析法來克服之。第三節修正第二節中的離散時間模型, 引進兩個連續時間模型, 來描述股票市場價格的波動及其歐式選擇權之定價, 並比較離散與連續時間模型的相關性。第四節以差分及微分方程式進一步說明離散與連續時間模型的連結。第五節爲簡單結論。

二. 股票市場價格的離散模型

本節使用二項式模型來描述股票市場價格隨著時間的動態變化, 以解釋選擇權 (option) 的定價方法, 其間並說明如何使用無風險債券來進行動態避險。二項式模型是一種離散時間模型 (discrete time model), 因離散時間模型與股票市場實務有相當差異, 而比較合理的股價波動模型是將交易時間視爲連續性變數的模型, 所以接下來將使用離散逼近連續的傳統方法, 修正離散時間模型, 使其較能反映市場股價變動的實況。並希望在這個帶入連續時間模型的過程中, 顯示爲何需要引進積分理論、偏微分方程、鞅論、及隨機積分等較高層的數學架構及工具, 也希望能說明電腦模擬及數値計算的重要性。

但在本文中的主要部分, 將只使用到多元一次聯立方程組解的相關知識、微積分層次的極限概念、和隨機變數。隨機變數與一般所熟悉的函數有密切的關係。如果將周遭世界所發生的

事物都視爲某種因果關係所造成, 這種因果關係可以藉由數學中的函數 $y = f(x)$ 來表示。在這裡 y 是果, 而 x 是因。而當你知道因及 f 時, 你就可以知道果了。隨機變數一般以 $X(w)$ 來表示, 這可看出 $X(w)$ 與 $f(x)$ 的對應關係, 所以隨機變數是一個函數。只是隨機變數中的 w 並未加以指定, 這是因爲 w 不被觀察到或其中有一部分不被觀察到。舉例來說, 當我們投擲骰子時, 可觀察到出現的數字 (這是函數中的 y), 但當再次用「同樣」的方式來投擲骰子時, 卻常出現與上次不同的數字。這可以採用一種不違反因果關係的想法來解釋: 擲骰子者雖試著用「同樣」的方式 (w) 再次投擲骰子, 但實際上他這兩次擲骰子的 w , 其實並不相同 (只是他認爲是相同的), 或是說有部分的 w 並未與前次投擲時的 w 相同。

以下將探討三個例子, 第一個例子是取材於 Harrison 與 Kreps (1979) 文中第四節的例子。在這個例子中, 談到三種證券: 甲公司股票、乙公司股票及一債券, 各以符號 $S_1(w;t)$、$S_2(w;t)$、及 $S_0(w;t)$ 代表 t 時點時的價格。爲簡化與方便討論起見, 我們僅考慮三個時間點 $(t = 0, 1, 2)$, 並假設債券不支付利息。在這個例子中, 將呈現四個概念: 衍生性金融產品 (derivative)、選擇權、選擇權定價 (pricing) 的基本想法、及動態避險。第二個例子取材於 Cox , Ross 與 Rubinstein (1979) 這篇文章所提出的二項式模型, 目的在於說明如何將第一個例子中動態避險的想法應用在較接近於現實的例子中。其中債券每期支付利息。第三個例子是探討「回顧買權」(lookback call option) 的定價問題, 目的在於說明解第二個例子中的方法雖然可以定出價格, 但在實務上可能會遭遇計算執行的困難。這個困難的解決之道將在下節討論。

例一. Harrison 與 Kreps (1979) 文中的例子。

假設在時間 $t = 0$ 時, 某投資者計劃在時間 $t = 2$ 時, 擁有兩股甲公司股票及一股乙公司股票。此投資者可以考慮在時間 $t = 0$ 時, 如數購入兩股甲公司股票及一股乙公司股票, 保留到時間 $t = 2$; 或者他可以什麼也不做, 等到時間 $t = 2$ 時再以市價購買之。第一種作法可能因爲未來股價下跌, 投資者後悔預先購股。第二種作法則可能因爲未來股價上漲, 投資者後悔未預先購股。最後, 他選擇在時間 $t = 0$ 時, 購入一歐式買權, 此歐式買權允許此人在時間 $t = 2$ 時, 以時間 $t = 0$ 時所約定的計價方式來購買股票。市場股價跌, 他可放棄買權, 以市價購股; 市場股價漲, 則用約定的較低價格購股。換句話說, 買權使他規避了股價波動的風險。選擇權產生的原因就是因爲市場投資者需要這種產品來降低風險 (所謂「避險」(hedging))。另一方面, 投資者也會需要這種產品來在價格波動的市場中站在有利的地位, 以獲取最大的利潤 (所謂「投機」(speculation))。

而當一家公司提供這種產品時, 就需要對此產品定出正確的價格。若產品定價錯誤, 提供產品的公司就須擔心被投資者進行「套利」(arbitrage), 而造成財務上巨大的損失 (套利的一種

定義是指投資者不需投入任何資金就可獲利的情況)。所以在爲選擇權定價時, 必須考慮市場上投資者使用選擇權的這三種作法, 方能定出正確的價格。

現在假設某公司在時間 $t = 0$ 時出售一種歐式買權。該選擇權允許購買者在時間 $t = 2$ 時, 可用 14 元再加上在 $t = 0, 1, 2$ 這三個交易時間點以這兩種股票最低市價的兩倍, 購買兩股甲公司股票及一股乙公司股票。若於合約到期日 $t = 2$時, 兩股甲公司股票及一股乙公司股票之總價值超過 14 元再加上在這三個交易日中這兩種股票最低市價的兩倍, 該選擇權的持有人當然會去執行 (exercise) 這個選擇權, 以低於市價的價格買到股票。反之, 就不會去執行這個選擇權。所以這個選擇權在時間 $t = 2$ 時的市場價格, 若用數學符號來表示, 可以定義成

$$x(w) = \{2S_1(w,2) + S_2(w,2) - [14 + 2\min_{0\le t\le 2}\min(S_1(w,t), S_2(w,t))]\}^+.$$

在這裡當 $A > 0$ 時, $A^+ = A$; 不然, $A^+ = 0$。

對於這個衍生性商品或選擇權, 在考慮它的定價問題前, 我們先用下表來描述甲、乙兩公司股票市場價格的變動狀況, 以及此選擇權在時間 $t = 2$ 時的市場價格。

表一. 甲、乙公司股票價格與時間關係圖

$t=0$		$t=1$		$t=2$	股票價格路徑	$x(w)$
			↗	(14, 9)	w_1	5
		(11, 9)	⟶	(10,13)	w_2	1
	↗		↘	(10, 8)	w_3	0
			↗	(14, 9)	w_4	5
(10,10)	⟶	(11,10)	⟶	(10,13)	w_5	0
			↘	(10, 9)	w_6	0
	↘		↗	(12,10)	w_7	4
		(8,11)	⟶	(7,15)	w_8	1
			↘	(7,10)	w_9	0

在 [表一]中, w_1 代表甲公司股票由時間 $t = 0$ 到 $t = 2$ 的價格分別是10, 11, 14; 而乙公司則是 10, 9, 9, 所以 $x(w_1) = 5$。

現在應用動態避險的想法, 來決定此歐式買權在 $t = 0$ 時的價格。假設這個選擇權的價格定爲 π 元, 對出售選擇權的公司而言, 它的第一個想法是不要有風險。歐式買權的賣方爲預備買方的執行, 最好備有股票。因爲買方會在股價上漲時執行其買權, 若到時賣方才要在市場購股來應付, 就會吃虧。

在時間 $t=0$ 時, 賣方售出一個上述的歐式買權換取了 π 元, 但在時間 $t=2$時, 由於選擇權買方執行其權利, 它需要支付一個隨機的數額 $x(w)$, 而可能的取值是 0、1、4、5 (股票市價與執行價格之差)。但確切的取值與甲、乙公司股票價格於 [表一]所走的那一路徑有關。

雖然出售此選擇權的風險, 來自於公司無法掌握的未來股價變動, 但它可以使用手中現有的資產 π 來降低風險。當股票上漲時, 因到期時應付買方執行所需支付的金額可能較高, 顯然該多買股票; 反之, 則將資金投資債券 (如爲負值, 係代表向銀行借款)。現令 Δ_{t1} 及 Δ_{t2} 代表時間 $t(t=0,1)$ 時, 所擁有的甲、乙兩公司股票張數, 剩餘的錢就用來購買債券。如果能掌握到在時間 $t=2$ 時, 不管 w 爲何 (在這裡 w 係反應股票價格所走的路徑), 也就是不管任何情況發生, 選擇權賣方的資產完全與 $x(w)$ 相等, 賣方就可以完全避開風險。

以下我們來看這樣的想法是否行得通。在時間 $t=0$ 時, 出售選擇權的賣方所擁有的資產可由下式來表示:

$$\pi = X_0 = \Delta_{01}S_1(w,0) + \Delta_{02}S_2(w,0) + [\pi - \Delta_{01}S_1(w,0) - \Delta_{02}S_2(w,0)]。$$

到時間 $t=1$ 時, 所擁有的資產會隨著當時的股票價格而改變, 由 [表一]知 X_0 屆時可能的取值是: $\pi+\Delta_{01}-\Delta_{02}$ 、$\pi+\Delta_{01}$ 、及 $\pi-2\Delta_{01}+\Delta_{02}$; 而到時間 $t=2$ 時, 可能的取值是: $\pi+4\Delta_{01}-\Delta_{02}$ 、$\pi+3\Delta_{02}$ 、$\pi-2\Delta_{02}$ 、$\pi+4\Delta_{01}-\Delta_{02}$ 、$\pi+3\Delta_{02}$ 、$\pi-\Delta_{02}$ 、$\pi+2\Delta_{01}$ 、$\pi-3\Delta_{01}+5\Delta_{02}$ 、及 $\pi-3\Delta_{01}$ 。這就面臨到解三元一次方程組的問題。但此方程組中共有九個方程式, 我們不難由 [表一]發現這個方程組無解。在更一般的問題上, 由方程式論可推知大概是行不通的無解情況, 因爲方程式過多而未知參數太少。

但剛剛的說法並不完全正確, 因爲在時間 $t=0$ 時, 僅知道 $\{w_i\}$, $1 \le i \le 9$, 這其中之一會發生。而若令 $A_1=\{w:w=w_1,w_2,w_3\}$、$A_2=\{w:w=w_4,w_5,w_6\}$ 、$A_3=\{w:w=w_7,w_8,w_9\}$。則到時間 $t=1$ 時, 出售選擇權的公司已經知道A_1、A_2、A_3 三者之一會發生。而知道 A_i 之後, 又只有三種情況之一會發生。所以在時間 $t=1$ 時, 選擇權賣方掌握到的訊息較 $t=0$ 時爲多, 此時應該運用此資訊作一次資產組合的調整。

假設 A_1 發生, 此時出售選擇權換來的資產是 $\pi+\Delta_{01}-\Delta_{02}$, 令其爲 X_1。在這種情況之下, 我們知道到時間 $t=2$ 時, 與 A_1 眞正相關的股票路徑只有三條 (即w_1, w_2, w_3)。此時若調整資產組合使甲公司的股票張數爲 Δ_{11}, 乙公司的股票張數爲 Δ_{12}, 債券金額就成爲 $X_1-11\Delta_{11}-9\Delta_{12}$。爲能在無損失的條件下履行所售選擇權契約, X_1、Δ_{11}、及 Δ_{12} 需滿足下列三元一次方程組:

$$\begin{aligned}
14\Delta_{11}+9\Delta_{12}+[X_1(w)-11\Delta_{11}-9\Delta_{12}] &= 5,\\
10\Delta_{11}+13\Delta_{12}+[X_1(w)-11\Delta_{11}-9\Delta_{12}] &= 1,\\
10\Delta_{11}+8\Delta_{12}+[X_1(w)-11\Delta_{11}-9\Delta_{12}] &= 0。
\end{aligned}$$

此方程組的解是 $\Delta_{11}=1.2$、$\Delta_{12}=0.2$、及 $X_1=1.4$, 當 $w\in A_1$ 時。

如果用比較簡潔的方式來表達上述的過程, 因在時間 $t=2$ 時, 此時由出售選擇權所得而建立的資產值可表示爲

$$\Delta_{11}S_1(w,2)+\Delta_{12}S_2(w,2)+[X_1(w)-\Delta_{11}S_1(w,1)-\Delta_{12}S_2(w,1)],$$

而履行所售選擇權契約需要 $x(w)$。所以須解下列函數方程式

$$\Delta_{11}S_1(w,2)+\Delta_{12}S_2(w,2)+[X_1(w)-\Delta_{11}S_1(w,1)-\Delta_{12}S_2(w,1)]=x(w)$$

當 $w=w_1,w_2,w_3$ 時。

同理, 當 $w\in A_2$ 時, 我們須求上列函數方程式的解, 但 $w=w_4,w_5,w_6$。所求出的解是 $\Delta_{11}=1.25$ 、$\Delta_{12}=0$ 、及 $X_1(w)=1.25$。而當時, 所求的解是 $\Delta_{11}=0.8$ 、$\Delta_{12}=0.2$ 、及 $X_1(w)=1$ 。

下一步的問題是在問, 在時間 $t=0$ 時所組成的資產組合, 到時間 $t=1$ 時, 能否達到 1.4 、1.25 及 1, 當 $w\in A_1,A_2,A_3$ 時。再次我們得解一個函數方程式, 或下列三元一次方程組:

$$\begin{aligned}
11\Delta_{01}+9\Delta_{02}+[X_0(w)-10\Delta_{01}-10\Delta_{02}]&=1.4,\\
11\Delta_{01}+10\Delta_{02}+[X_0(w)-10\Delta_{01}-10\Delta_{02}]&=1.25,\\
8\Delta_{01}+11\Delta_{02}+[X_0(w)-10\Delta_{01}-10\Delta_{02}]&=1。
\end{aligned}$$

所求的解爲 $\Delta_{01}=1/30$ 、$\Delta_{02}=-3/20$ 、及 $X_0(w)=73/60$。在這裡 X_0 代表在時間$t=0$ 時, 公司配合出售此選擇權所組成的無風險資產組合, 在時間 $t=0$ 時的市場價格。

由上述得知該選擇權的定價應爲 73/60 元, 因爲經由動態避險, 賣方資產之價值在未來任何情況下, 均與所賣的選擇權之給付 (payoff) 相同, 則此資產的價值即爲該選擇權的價值。此外, 在時間 $t=0$ 時, 應該購入 1/30 張甲公司股票, 並「賣空」(short sale, 又稱融券, 借證券賣出, 未來再買來歸還之意) 3/20 張乙公司股票。接下來, 在時間 $t=1$ 時, 若觀察到事件 A_2 發生, 此時應該調整爲擁有 1.25 張甲公司股票, 及 0 張乙公司股票。其他情況依此類推。

例二. 二項式模型與歐式買權的定價

現在用 Cox, Ross and Rubinstein (1979) 這篇文章中所提出的二項式模型, 來探討歐式買權的定價問題及說明如何進行動態避險。此例中的歐式買權是指在時間點 $t=n$ 時, 持有者可以用預先約定的執行價格 K 來購買一特定的股票。若將該股票於時間 t 時的價格寫爲 $S_t(w)$, 這個選擇權在時間 $t=n$ 時的市場價格, 以數學符號來表示, 可以寫成

$$x(w)=[S_n(w)-K]^+.$$

在二項式模型中, 假設股價隨著時間的動態變化可由二項式分配來描述, 即每期股價的變化只能上漲或下跌某一比例, 並假設上漲或下跌的比例, 並不隨時間而變。所以

$$S_{t+1} = uS_t \text{ 或 } dS_t, \quad u > d,$$

而上漲或下跌所發生的機率分別爲 q 及 $1-q$。因此, 在時間點 t 時, $S_t(w)$ 的可能取值是

$$u^m d^{t-m} S_0, \quad m = 0, 1, \ldots, t+1,$$

其發生之機率爲 $C(t,m)q^m(1-q)^{t-m}$。由這些定義我們不難察覺到, $S_1/S_0,\ S_2/S_1,\ \ldots,$ S_n/S_{n-1} 的取值是 u 或 d , 而其發生的機率分別是 q 及 $1-q$, 在機率學中稱這是一種「隨機漫步」(random walk)。

接下來談到避險, 我們須引進一低風險或無風險的金融商品。在這裡我們考慮「無風險債券」, 其每期支付的利率固定爲 r 。顯然 $1+r$ 應該介於 u 及 d 之間。不然的話, 當 $d > 1+r$ 時, 表示在最壞的狀況下, 股票的獲利仍高於債券支付的利息, 所以當然該持有股票。由於無人願投資債券, 故債券會從市場消失。而當 $u < 1+r$ 時, 就只有債券會存在。顯然兩種情況均不符實際。

爲能避險, 由 [例一]中可看出, 應該依據股票價格的波動來動態調整股票及債券的持有量。假設在時間 $t=0$ 時, 出售一個歐式買權, 換取了 π (或 X_0) 元, 並用此資金開始一個包含股票及債券的投資組合。且採取一種「自我融資」(self-financing) 的策略, 就是一直到時間 $t=n$ 前, 都不再投入資金, 也不取出資金使用。在動態調整下, 若令於時間 t 時 ($t = 0, 1, \ldots, n-1$), 該投資組合的市場價值爲 $X_t(w)$ 元, 所持有的股票張數爲 $\triangle_t$, 則到時間 $t+1$ 時的債券總值就是

$$[X_t(w) - \Delta_t S_t(w)](1+r),$$

而股票總值是 $\Delta_t S_{t+1}(w)$, 其中 Δ_t 是在時間 $t-1$ 時所決定的。

因不再投入資金, 也不取出使用, 所以在時間 t 及時間 $t+1$ 點, 投資組合市場價值應滿足下式:

$$X_{t+1} = \Delta_t S_{t+1} + (1+r)(X_t - \Delta_t S_t) = (1+r)X_t + \Delta_t[S_{t+1} - (1+r)S_t]。$$

如果能找到投資組合$\{\ \Delta_0、\Delta_1、\ldots、\Delta_{n-1}\}$, 使得對所有的 $w, X_n(w) = x(w)$ 都成立。則該發行歐式買權的公司, 就可以完全避開風險。

現在依據 [例一]的方法, 由時間 $t=n$ 回溯算回去, 直到時間 $t=0$ 爲止, 以求函數方程式的解。假設在時間 $t=n-1$ 時觀察到的股票價格爲 S_{n-1} , 此時雖不知 S_n 爲何, 但 $S_n(w)$ 的取值只可能是 uS_{n-1} 或 dS_{n-1}; 同理 $x(w)$ 的取值只可能是 $[uS_{n-1}-K]^+$ 或

$[dS_{n-1}-K]^+$。現解函數方程式 $X_n(w)=x(w)$, 或求滿足下列二元一次方程組的 $X_{n-1}(w)$ 及 Δ_{n-1}:

$$
\begin{aligned}
(1+r)X_{n-1}(w)+\Delta_{n-1}[u-(1+r)]S_{n-1}(w)&=[uS_{n-1}(w)-K]^+,\\
(1+r)X_{n-1}(w)+\Delta_{n-1}[d-(1+r)]S_{n-1}(w)&=[dS_{n-1}(w)-K]^+.
\end{aligned}
$$

此方程組中的 $[uS_{n-1}-K]^+$ 及 $[dS_{n-1}-K]^+$ 是代表在時間 $t=n$ 時應有的資產總值, 以應付所售選擇權契約之需, 而避開所有的風險。此方程組的解是

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n-1}&=\frac{1}{S_{n-1}(w)}\frac{[uS_{n-1}(w)-K]^+-[dS_{n-1}(w)-K]^+}{u-d},\\
X_{n-1}(w)&=(1+r)^{-1}\Big\{\frac{(1+r)-d}{u-d}[uS_{n-1}(w)-K]^+\\
&\qquad+\frac{u-(1+r)}{u-d}[dS_{n-1}(w)-K]^+\Big\}.
\end{aligned}
$$

如將 $[(1+r)-d]/(u-d)$ 寫成 p (此處 $0<p<1$ 因 $u>1+r>d$), 則

$$
X_{n-1}(w)=(1+r)^{-1}\Big\{p[uS_{n-1}(w)-K]^++(1-p)[dS_{n-1}(w)-K]^+\Big\}. \tag{2}
$$

接下來考慮時間 $t=n-2$ 時, 此時觀察到的股票價格爲 S_{n-2}, 此時雖不知 S_{n-1} 爲何, 但 $S_{n-1}(w)$ 的取值只可能是 uS_{n-2} 或 dS_{n-2}。而要能履行所售選擇權契約所需, 所以在時間 $t=n-1$ 時, 依 (2) 可知所需資產 $X_{n-1}(w)$ 的取値爲

$$
\begin{aligned}
&(1+r)^{-1}\{p[uuS_{n-2}-K]^++(1-p)[duS_{n-2}-K]^+\}, \text{ 或}\\
&(1+r)^{-1}\{p[udS_{n-2}-K]^++(1-p)[ddS_{n-2}-K]^+\}.
\end{aligned}
$$

所以需解函數方程式 $X_{n-1}(w)=x(w)$, 或求滿足下列二元一次方程組之 $X_{n-2}(w)$ 及 Δ_{n-2}:

$$
\begin{aligned}
&(1+r)X_{n-2}(w)+\Delta_{n-2}[u-(1+r)]S_{n-2}(w)=\\
&\qquad\qquad(1+r)^{-1}\Big\{p[u^2S_{n-2}(w)-K]^++(1-p)[udS_{n-2}(w)-K]^+\Big\}\\
&(1+r)X_{n-2}(w)+\Delta_{n-2}[d-(1+r)]S_{n-2}(w)=\\
&\qquad\qquad(1+r)^{-1}\Big\{p[udS_{n-2}(w)-K]^++(1-p)[d^2S_{n-2}(w)-K]^+\Big\}.
\end{aligned}
$$

這組方程於型式上與時間 $t=n-1$ 時的方程組一樣, 所以

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n-2}=\frac{1}{S_{n-2}(w)}\frac{1}{u-d}\Big\{&(1+r)^{-1}(p[u^2S_{n-2}(w)-K]^++(1-p)[udS_{n-2}(w)-K]^+)\\
&-(1+r)^{-1}(p[udS_{n-2}(w)-K]^++(1-p)[u^2S_{n-2}(w)-K]^+)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$X_{n-2}(w)=(1+r)^{-2}\Big\{p^2[u^2S_{n-2}(w)-K]^+ + 2p(1-p)[udS_{n-2}(w)-K]^+$$
$$+(1-p)^2[d^2S_{n-2}(w)-K]^+\Big\}.$$

一般而言, 因將在時間 t 時所觀察到的股價爲 S_t, 所以 $S_{t+1}(w)$ 的取值只可以是 uS_t 或 dS_t, 而 $S_n(w)$ 的取值只可能是 $u^j d^{(n-t)-j} S_t$, 其中 j 的取值由 0 到 $n-t$。而要能應付所售選擇權契約之需, 在時間 $t+1$ 時, 依同理可知資產 $X_{t+1}(w)$ 所需的取值是

$$(1+r)^{-[n-(t+1)]}\sum_{k=0}^{n-t-1} C(n-t-1,k)p^k(1-p)^{n-t-1-k}[u^k d^{n-t-1-k}uS_t-K]^+, \text{或}$$
$$(1+r)^{-[n-(t+1)]}\sum_{k=0}^{n-t-1} C(n-t-1,k)p^k(1-p)^{n-t-1-k}[u^k d^{n-t-1-k}dS_t-K]^+.$$

在下式中, 將用 $X_{t+1}(w^u)$ 表前者, 而用 $X_{t+1}(w^d)$ 表後者。所以

$$X_t(w)=(1+r)^{-1}\Big\{pX_{t+1}(w^u)+(1-p)X_{t+1}(w^d)\Big\}$$
$$=(1+r)^{-(n-t)}\sum_{j=0}^{n-t} C(n-t,j)p^j(1-p)^{n-t-j}[u^j d^{n-t-j}S_t-K]^+, \tag{3}$$
$$\Delta_t=\frac{1}{S_t(w)}\frac{1}{u-d}[X_{t+1}(w^u)-X_{t+1}(w^d)]. \tag{4}$$

在推導 $X_t(w)$ 時, 使用了這個恆等式

$$C(n-t-1,k-1)+C(n-t-1,k)=C(n-t,k).$$

所以得出歐式買權的定價爲

$$X_0=(1+r)^{-n}\sum_{j=0}^{n} C(n,j)p^j(1-p)^{n-j}[u^j d^{n-j}S_0-K]^+. \tag{5}$$

當寫成這個型式後, $[u^j d^{n-j}S_0-K]^+$ 可視爲擁有歐式買權在時間 n 時, 該衍生性商品的可能取值, $C(n,j)p^j(1-p)^{n-j}$ 則是股票由時間 0 到時間 n 之間, 一共往上漲 j 次而往下降 $n-j$ 次的機率。透過這樣的解釋, 可借用機率學中期望値的符號來表示該定價。但請注意的是, 這裡的 p 並非二項式模型中, 相鄰時點之間股價上漲的機率 q。這說明了歐式買權定價者與購買者對股價上漲的機率 q 的看法並不須要一致, 而在實際情況下, 人們對股價上漲及下降的機率, 也大概不會一致。二項式模型只要求對 u 及 d 的取值要有共識。此外, 歐式買權的定價也不會因購買者之間有不同的風險偏好, 而有不同的定價。P 因此被稱爲「風險中立機率」(risk-neutral probability)(見註一), 因爲雖然歐式買權的投資者們對股價上漲的機率 q 的看法或有不同, 但對其定價卻是同意的。這就好像大家都處於風險中立的世界, 個人放棄自己的風險偏好, 以風險中立機率去定價。

在這個二項式模型中, 共有四個參數 u、d、r、q。在歐式買權的定價公式中, 並不與 q 有關。但在實際問題中, 債券的利率 r 應該與時間有關。當計算定價時, 如果在各個時間點的利率已知, 且以 r_j 表示時間點 j 的利率, 此時歐式買權定價公式中的 $(1+r)^n$ 可用 $\Pi_{j=0}^{n-1}(1+r_j)$ 來取代。而當參數 u 及 d 的取值與時間有關時, 如果在時間 $t = 0$ 時就已知其取值, 可將 $(1+r_j-d_j)/(u_j-d_j)$ 記為 p_j, 此時式 (5) 中的 $(1+r)^n$ 可用

$$\Pi_{j=0}^{n-1}(1+r_j)$$

來取代, 而 $C(n,j)p^j(1-p)^{n-j}$ 可用

$$\Pi_{\sum t_i=j}p_i^{t_i}(1-p_i)^{1-t_i}$$

來取代。注意這裏的 t_i 的取值是 0 或 1, 這代表在時間 n 時, 股票價格總共有 j 次的上漲及 $n-j$ 次的下降的所有可能的路徑。雖然 $C(n,j)$ 這條路徑都有 j 次的上漲及 $n-j$ 次的下降, 但因路徑不同, $\Pi_{\sum t_i=j}p_i^{t_i}(1-p_i)^{1-t_i}$ 的值會不同。所以每一路徑需個別計算, 這種計算可能需時甚久, 這個現象會在 [例三]中再作進一步的說明。

與波動有關的參數是 u 及 d, 顯然在計算定價時, 各個時點的波動設定不是一個簡單的問題。當將各時點的波動參數記為 u_j 及 d_j 時, 定價公式可以相對的修正。但在時間 $t=0$ 時, 並不知道 r_j、u_j 及 d_j, 這個問題相當複雜, 並不在這篇介紹性文章所討論的範圍。

在第參節中會考慮到 n 很大的情況, 在一些特定的條件下, 二項式模型所描述的股價波動, 與 Black and Scholes (1973) 的連續時間模型是一致的, 亦即該文中所導出的定價公式與式 (5) 是一致的。

例三. 二項式模型與回顧買權的定價

在本節中考慮一回顧買權, 該選擇權允許買方以簽約後到時間 $t = n$ 時為止的最低股價來購買股票。所以這個選擇權在時間 $t = n$ 時的市場價格, 可以寫成 $x(w) = S_n(w) - \min_{0\le j\le n} S_j(w)$ 。與歐式買權相同的地方是, 回顧買權只可以在時間 $t = n$ 時執行。但兩者有一個很大的差別, 就是回顧買權的市場價格與標的股價所走的特定路徑有關。

也就是說, 若在時間 $t = n$ 時的股價是 $u^jd^{n-j}S_0$, 歐式買權在時間 n 時的市場價格就是 $[u^jd^{n-j}S_0 - K]^+$。但對回顧買權而言, 卻不太一樣, 因為總共有 $C(n,j)$ 種路徑可到達 $u^jd^{n-j}S_0$ 這個股票價格。顯然其中很多條路徑所可達到的最小值是不一樣的。所以 $x(w)$ 會依據其路徑, 而有不同的取值, 雖然 $S_n(w)$ 的取值相同。

因在時間 $t = n$ 時方可執行此選擇權, 所以仍然可以用處理歐式買權的二項式模型來定價, 但須要對應調整方程組中的資產取值, 而其複雜度卻也增加了許多。舉例來說, 當 $n = 66$

時, 歐式買權的市場可能價格只有 67 種, 但回顧買權的可能價格, 卻可能達到 2^{66} (約 7×10^{19}) 種, 所以需調整式 (5)。

現在引進另一種思考來看歐式買權的定價。首先看 $\{X_t(w):t=0,1,\ldots,n\}$ 這個爲避險所組成的新金融產品的價值與時間的關係, 因爲

$$X_{t+1}=(1+r)X_t+\Delta_t[S_{t+1}-(1+r)S_t]\ ,$$

而在時間 t 時, X_t、r、Δ_t 是確知的, 所以在時間 $t+1$ 時, 其隨機變動僅僅是由 S_{t+1} 所造成的。我們不難得到 $\Delta_t[S_{t+1}-(1+r)S_t]$ 的可能取值爲

$$\begin{aligned}&(1-p)\{[uS_t-K]^+-[dS_t-K]^+\},\text{ 或}\\&p\{[uS_t-K]^+-[dS_t-K]^+\},\end{aligned}$$

而發生的「機會」分別是 p 及 $1-p$ 。在前述風險中立的世界裡, 任何資產 (或投資組合) 賺取無風險利率, 因此

$$\tilde{E}(X_{t+1}\mid X_t)=(1+r)X_t.$$

其中的期望值以風險中立的機率 p 及 $1-p$ 計算。當採用這個解釋時, 則因今天的價值是未來價值的折現值 (discounted value), 故

$$X_0=\tilde{E}\lfloor(1+r)^{-n}[S_n-K]^+\rfloor,$$

這裡的 $[S_n-K]^+$ 代表出售該歐式買權在 $t=n$ 時的金額化風險, 而 $(1+r)^{-n}$ 是將時間 n 時的風險金額轉化成時間 0 時的金額。應用此思考, 可馬上得到式 (5) 所定義的歐式買權價格。同理, 應用這個方法也可立即得出下列回顧買權的價格,

$$X_0=(1+r)^{-n}\sum_w p^i(1-p)^{n-i}[u^id^{n-i}S_0-\min_{0\le j\le n}S_j(w)],$$

這裡的 w 共有 2^n 種。若與歐式買權的價格公式相比較, 歐式買權求和的部份只需考慮 $n+1$ 種狀況, 這是因爲在時間 n 時, 股票價格爲 $u^jd^{n-j}S_0$ 的這 $C(n,j)$ 種股票價格路徑, 都有相同的 $[S_n(w)-K]^+$ 值。但在回顧買權卻是不一樣, 於本例中已提到當 $n=66$ 時, 回顧買權的計算需考慮約 7×10^{19} 種狀況, 如遭遇到更大的 n 時, 在計算上確實有其困難。

爲解決這個問題, 文獻上提出兩種解決方法。第一種方法是利用數值方法, 例如以電腦模擬的方式來求取近似解。其想法是模擬 $S_1/S_0,S_2/S_1,\ldots,S_n/S_{n-1}$ 隨機漫步多次 (可想成投擲 n 次正面出現的機率是 p 的錢幣), 依此得出股票價格所走的多次路徑, 並依之定出

$$(1+r)^{-n}[u^id^{n-i}S_0-\min_{0\le j\le n}S_j(w)]$$

的值, 再使用大數法則, 用平均值來求得 X_0 的近似值。而其標準差也可給出此近似值與 X_0 的可能差異幅度。有關這個方法的早期文獻請參考 Boyle (1977)。第二種方法是用連續時間模型來逼近離散時間模型, 將二項式模型改寫成 Black and Scholes (1973) 文中的連續時間模型, 再用解偏微分方程式的方式, 來解決二項式模型計算上所遭遇的困難。

截至目前, 我們只考慮歐式選擇權。此種選擇權合約是只可在合約終止日 (即第一節中的「未來某日」) 履行合約, 而在市場上有另一類型的選擇權, 這種合約允許在其終止日之前任何一天履行合約, 此種選擇權稱爲美式選擇權 (American option)。這種選擇權也具有回顧買權的特性, 即其定價是與路徑相關。直至今日, 一個快速且精確的解析定價公式, 仍是此領域工作者努力的方向。

参考文獻

1. F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 82 (1973), 637-659.
2. F. Black, How we came up with the option formula, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, 1989, 4-8.
3. P. P. Boyle, Options: A Monte Carlo approach, *Journal of Financial Economics*, 4 (1977), 323-338.
4. M. Brennan, and E. Schwartz, Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13 (1978), pp.461-474.
5. J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 6 (1979), 229-263.
6. J. M. Harrison, and D. M. Kreps, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, 20 (1979), 381-408.
7. J. M. Harrison and S. R. Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process*. Appl. 11 (1981), 215-260.
8. R. C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1973), 141-183.

—本文作者陳宏任教於國立臺灣大學數學系, 郭震坤任教於國立臺灣大學國際企業學系—