從用直線平分凸五邊形的面積談起

劉任昌

這篇文章的緣起, 是因爲筆者在網路 bbs 的數學討論群, 回答網友的問題:「如何在一凸五邊形內, 作一直線, 等分該五邊形面積?」筆者在網路上, 說明使用等面積轉換的過程, 以爲這個問題解答。但因網路不便於圖形說明, 且考慮到網路數學討論群上的問題, 往往會由其他網友重複提出, 因此筆者認爲, 如果這個問題可以藉由數學傳播的詳細圖解說明, 且經由數學傳播編輯群嚴密的檢視, 則以後筆者, 或其他同時閱讀過數學傳播的網路使用者, 再次碰到有人提出這個問題時, 就可以請網路討論者直接去參閱數學傳播季刊。

這篇文章是平面三角幾何學的應用, 適合高中生閱讀。

這篇文章是筆者個人利用過去數理訓練的解題應用, 並沒有去尋找參考資料, 所以, 這篇文章沒有列出任何參考文獻。

這篇文章是針對:「在一個凸多邊形上, 做一條直線, 將該多邊形等面積分開。」的問題, 用問答的方式, 循序漸進的由簡單到複雜, 歸納出一個通式解。

問題一: 在$\triangle ABC$上, 作出一條等面積分割線

這個問題容易, 只要畫出相對應於任意邊 (角) 的中線就可以, 如圖1中的 $\overline{AD}$ 或 $\overline{BE}$。

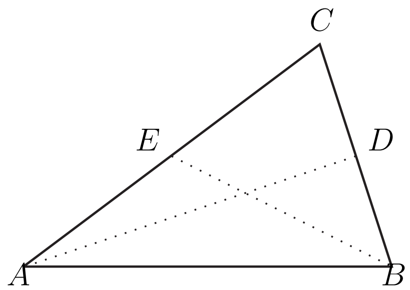

圖1

問題二: X為$\triangle ABC$邊上的任意點, 作一條過X點的等面積分割線

我們可以輕易的發現, 不管 X 在任何位置 (包括三角形內, 或三角形外), 都會存在一條將 $\triangle ABC$ 等面積分割的直線。如果 X 在 $\triangle ABC$ 邊上移動, 這相對應的等面積分割線也會移動。

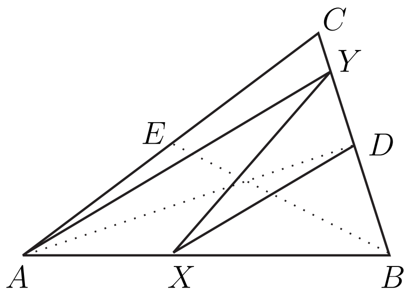

圖2

如圖2的$\triangle ABC$中, 中線之一的$\overline{AD}$已經將它等面積分割成兩個三角形。 我們再連$\overline{DX}$, 然後由A爲起點, 作出一條與$\overline{DX}$平行的 AY, 且與$\overline{BC}$相交於Y。因

$$\begin{aligned}&\triangle AXD\text{與}\triangle XDY\text{同底, 且高相等}\\ &\Longrightarrow \triangle AXD\text{面積}=\triangle XDY\text{面積}\\ &\Longrightarrow \triangle XBY\text{面積}=\triangle ABD\text{面積}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad=\triangle ABC\text{面積}\times\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

也就是說:$\overline{XY}$將$\triangle ABC$等面積分割了。

問題三: 作出凸四邊形$ABCD$ 的等面積分割線

在三角形的情況, 我們只要畫出任意一條中線, 就可以等面積分割該三角形。對於四邊形 (或其他 $n>3$ 的凸 n 邊形), 我們可以考慮先將它轉換成等面積的三角形, 以找出這個等面積三角形的中線。

如圖3的四邊形 $ABCD$ 中, 假設 $\triangle ABD$ 的面積大於 $\triangle CBD$ 的面積。我們先連 $\overline{BD}$, 再由 C 爲起點, 作出一條與 $\overline{BD}$ 平行的 CF, 且與 AB 相交於 F。因

$$\begin{aligned}&\triangle DBC\text{與}\triangle DBF\text{同底, 且高相等}\\ &\Longrightarrow\triangle DBC\text{面積}=\triangle DBF\text{面積}\\ &\Longrightarrow\triangle DAF\text{面積}=\text{四邊形}ABCD\text{面積}. \quad (1)\end{aligned}$$

然後在$\overline{AF}$上, 找出$\overline{AF}$的中點F', 因此而作出$\triangle DAF$的中線$\overline{DF'}$, 則

$$\triangle DAF'\text{面積}=\text{四邊形}ABCD\text{面積}\times\frac{1}{2}.$$

也就是說:$\overline{DF'}$將四邊形$ABCD$等面積分割了。

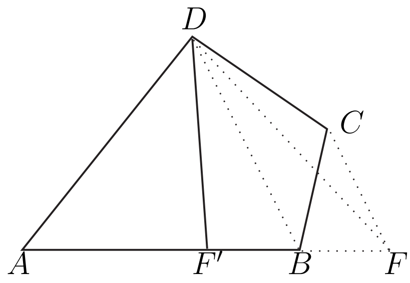

圖3

在圖3中, 假設 $\triangle ABD$ 面積大於 $\triangle CBD$ 面積的目的, 就是要確保 $\triangle AFD$ 的中線 DF' 落在 $\overline{AB}$ 線段上。萬一在作圖過程中, 發現 F' 點沒有落在四邊形內, 他的處理方法, 是後文圖5要討論的。

我們可以仿照問題二的作圖過程, 在 AF' 上任意選擇一點 H, 亦可作出等面積分割線通過 H。如圖4, 在 AF' 定出任意一點 H, 再於 $\overline{DC}$ 找出相對應的 I, 使得 $IDHF'$ 成爲一個梯形。

觀察圖4的四邊形$AHID$, 我們用類似於上述式 (1) 的推論,

$$\begin{aligned}&\triangle DHI\text{與}\triangle DHF'\text{同底, 且高相等}\\ &\Longrightarrow\triangle DHI\text{面積}=\triangle DHF'\text{面積}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \triangle DAF'\text{面積} = \text{四邊形}DAHI\text{面積}.$$

$$\Longrightarrow \text{四邊形}DAHI\text{面積} = \text{四邊形}ABCD\text{面積} \times \frac{1}{2}.$$

也就是說: $\overline{IH}$ 與 $\overline{DF'}$ 同樣都是四邊形 $ABCD$ 等面積分割線。

上面這個類似式 (1) 的「等面積轉換」步驟, 仍然要在後文一直被應用, 我們會提醒讀者, 但不再如上式般的詳細列出。

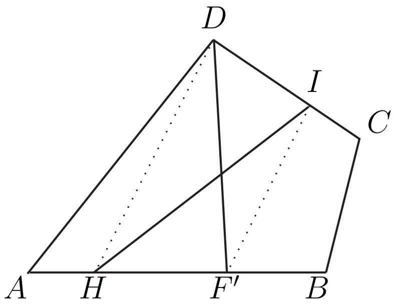

圖4

圖 4 的I或H中的一點 (也可能同時兩點), 可以分別和C或A重合, 這樣有助於我們作圖操作時的準確性; 更重要的是, 這樣方便我們進行更進一步的找出其他分割線, 這在後文其他凸多邊形的作圖時, 就可以應用。

基本原理

從以上的內容中, 我們已經可以歸納出尋找凸多邊型等面積分割線的原理了:

原理一: 任意凸 n 邊形是由 $n-2$ 個三角形所組成。

原理二: 兩個有共同邊的三角形: $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$, 可以用作圖法轉換成一個面積等於 $\triangle_1$ 面積與 $\triangle_2$ 面積和的大三角形 $\triangle$。

以上兩個原理都可以在歐氏平面上輕易得證, 我們不再這裡多做說明。但我們可以再用圖 3 的另一個方向, 來看上述兩個原理的應用, 即圖 3 是將四邊形$ABCD$先切割成: $\triangle ABD$與$\triangle BCD$; 而圖 5 是將四邊形$ABCD$先切割成: $\triangle ABC$與$\triangle ACD$。然後依照前面類似式 (1) 的步驟, 我們在圖 5 中, 得到:

$$\triangle BCE\text{面積} = \text{四邊形}ABCD\text{面積}.$$

在$\overline{EB}$上, 作出$\triangle BCE$的中線CE', 則

$$\triangle BCE'\text{面積} = \text{四邊形}ABCD\text{面積} \times \frac{1}{2}.$$

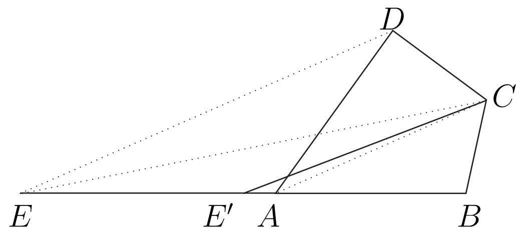

圖5

可是 $\overline{CE'}$ 超出四邊形 $ABCD$ 的範圍, 我們只好在圖 6 中, 再使用類似前述 (1) 的步驟, 作出梯形 $ACJE'$, 使得:

$$\text{四邊形}ABCJ\text{面積} = \triangle BCE'\text{面積} = \text{四邊形}ABCD\text{面積} \times \frac{1}{2},$$

即$\overline{AJ}$是四邊形$ABCD$的等面積分割線。

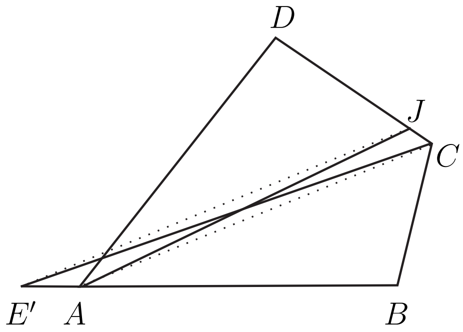

圖6

四邊形$ABCJ$是由$\triangle ABC$與$\triangle ACJ$組合而成, 所以上述步驟有可以讓我們歸納出:

原理三: 原理二的逆向操作亦成立。

這個原理也是可以很輕易的證明。

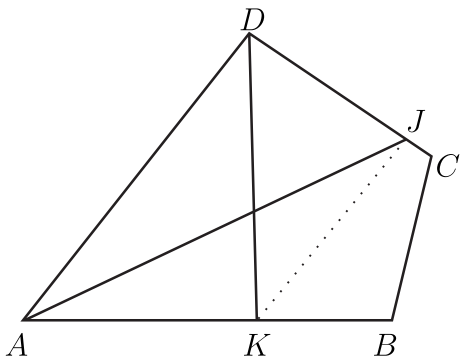

圖7

問題四: 找出凸五邊形$ABCD\ E$的等面積分割線

步驟如圖8所示: 將五邊形$ABCDE$轉換成等面積的$\triangle DRS$後, 找出$\overline{RS}$的中點T; $\overline{DT}$在該五邊形內, 所以, 它就是等面積分割線。

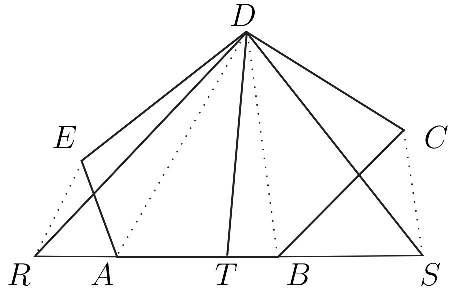

圖8

爲了畫出等面積分割線, 將原來圖形轉換成一個等面積的三角形是一個必經過程。在圖8中, 我們也可以將它轉換成爲以$\overline{BC}$(或其他任意邊) 爲固定邊線的鈍角三角形, 但以此過程找出的三角形中線, 就容易超出原圖形的範圍 (類似圖6) 的情形, 因而需要使用更多次類似式 (1) 的步驟, 才能找出原圖形第一條等面積分割線。在下一節的推廣說明中, 我們要使用這個過程, 但在實際操作上, 我們應該使用圖8的過程。

說明: 任意凸多邊形都可以用作圖法求得等面積分割線

對於任一凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 如圖9, 我們可以使用類似式 (1) 的原理, 將他轉換成圖 10 的等面積凸 $n-1$ 邊形 $R_1A_3A_4\cdots A_n$; 然後, 又可以轉換成等面積的凸 $n-2$ 邊形 $R_2A_4\cdots A_n$ 如圖11。

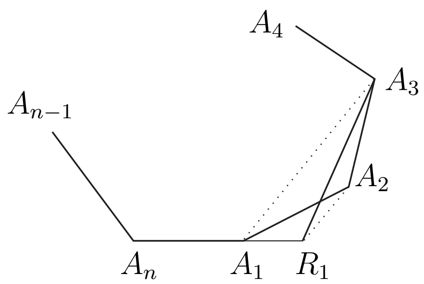

圖9

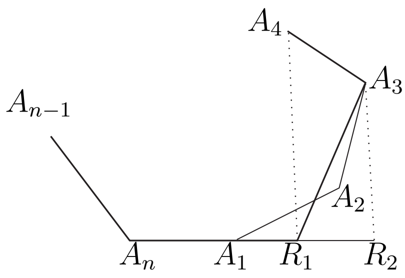

圖10

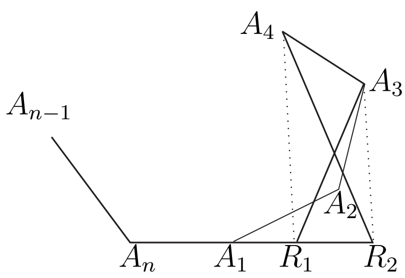

圖11

我們最後可以將它轉換成等面積的 $\triangle R_{n-3}\ A_{n-1}\ A_n$, 因而畫出此三角形的等面積分割線 LL_{n-3}; 以上的步驟是利用原理一與原理二完成的。接下來, 我們要逐步找出原來凸 n 邊型的等面積分割線。首先:

如果 LL_{n-3}在四邊形$R_{n-4}A_{n-2}A_{n-1}A_n$內, 則 $LL_{n-4}= LL_{n-3}$。

如果 LL_{n-3} 超出四邊形 $R_{n-4}\,A_{n-2}\,A_{n-1}A_n$ 的範圍, 就利用原理三, 得到四邊形 $R_{n-4}A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 的等面積分割線 LL_{n-4}, 過程類似圖6。

在接下來的一般化情形, 假設我們已經畫出凸$n-m$邊形$R_mA_{m+2}A_{m+3}\cdots A_n$等面積分割線$LL_m$, 我們接下來要找凸$n-m+1$邊形$R_{m-1}A_{m+1}A_{m+2}\cdots A_n$ 的等面積分割線LL_{m-1}。

如果 LL_m在凸$n-m+1$ 邊形 $R_{m-1}\,A_{m+1}A_{m+2}\cdots A_n$ 內, 則$LL_{m-1} = LL_m$。

如果 上述狀況不成立, 使用原理三, 將 LL_m 旋轉成LL_{m-1}, 如圖12 所所示, 使LL_{m-1} 位於$R_{m-1}A_{m+1}\,A_{m+2}\cdots A_n$的內部, 而畫出凸 $n-m+1$ 邊形等面積分割線。

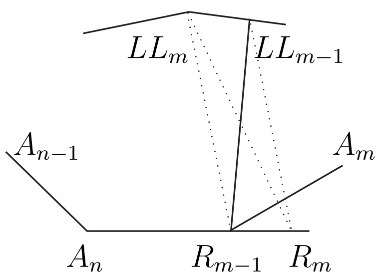

圖12

依照上述過程, 就可以得到凸 n 邊形的等面積分割線 LL_0。當然上面這個過程只是證明任意凸 n 邊形的等面積分割線存在的證明, 在實際需要作圖時, 因爲 $\triangle R_{n-3}A_{n-1}A_n$ 可能是一個極其扁平的鈍角三角形, 而是作圖過程容易有誤差。所以, 應該使用類似圖8的「左右開攻」過程, 將他轉換成一個較「類似於」於正三角形的等面積三角形, 當然, 這個過程所付出的代價是作圖的輔助線會複雜許多。

如果要找出通過特定點 X 的等面積分割線, 也是依照前面的原理, 將 LL_0 沿著邊, 逐步旋轉, 最後得到與 X 點重合的等面積分割線。

結論

上一節的內容, 等於是證明: 在歐氏平面上, 任意凸多邊形的等面積分割線, 可以藉由作圖法求得。實際上, 利用前文三個原理, 我們同樣可以用作圖法爲任意多邊形 (不需要是凸) 找到等面積分割線。

這個問題在實際生活上, 應用很廣, 例如: 兄弟二人要等面積分割一塊土地, 且此分割線要經過一個共用的井。只要利用我們這篇文章所說的方法, 就可以決定出這條分直線。

—本文作者爲國立臺灣大學財務金融系研究生—