里曼假設 — 價值百萬美元的數學謎題

余文卿

2000年五月, 筆者應邀參加美國伊利諾大學所舉辦的千禧年數論研討會; 會議期間, 從報紙得知英國的克雷數學研究所 (Clay Mathematics Institute) 在巴黎召開記者會, 提出數學上七大難題, 並提供美金一百萬元給解決其中問題之一的人。七題之中有兩題源自數論, 一是里曼假設 (Riemann Hypothesis), 是關於有名的里曼 Zeta 函數的零點位置問題, 另一是 Birch 與 Swinnerton-Dyer 猜測, 是關於附在代數曲線上之 Zeta 函數在1的取値與曲線上整數點之間的關係問題。

既然有人願意提供百萬美金做爲解題報酬, 自然突顯出問題的重要性與影響層面, 而有必要公開給有希望的數學界人士知道。爲此, 我們從網路上下載相關資料, 並譯成中文如下:

有些正整數具有不能分解成爲兩較小整數乘積的特有性質, 如 2, 3, 5, 7, ... 等等, 這些數稱爲質數; 它們在純數學與應用數學領域扮演著極重要的角色。這些質數在正整數中的分佈情形沒有規則可循; 然而德國數學家里曼 (G. F. B. Riemann, 1826-1866) 卻發現質數出現的頻率與一稱爲里曼 Zeta 函數 $\zeta(s)$ 的行爲有密切的關係。有名的里曼假設即斷言方程式

$$\zeta(s)=0$$

的“有趣”解都落在同一直線上。最先的 1,500,000,000 個解已驗證是對的。果眞能證明“有趣”解都是對的話, 將會揭開圍繞在質數分布定理周圍的秘密。(以上文字譯自 http://www.ams.org-claymath/prize_problems/)

1. 里曼 Zeta 函數

里曼假設的主角是里曼 Zeta 函數 $\zeta(s)$, 這函數是由級數所定義:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>1.$$

這級數在 $\operatorname{Re} s>1$ 時絕對收斂, 因而在滿足 $\operatorname{Re} s>1$ 的半平面上定義了一 s 的解析函數。另一方面, 算術基本定理 (Fundamental theorem of arithmetic) 告訴我們每一正整數 n 可分解成質因數的乘積, n^{-s} 必出現於無窮乘積

$$\begin{aligned}&(1+2^{-s}+2^{-2s}+\cdots+2^{-ks}+\cdots)\\ \cdot&(1+3^{-s}+3^{-2s}+\cdots+3^{-ks}+\cdots)\\ \cdot&(1+5^{-s}+5^{-2s}+\cdots+5^{-ks}+\cdots)\cdots\end{aligned}$$

$$=\prod_p (1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots+p^{-ks}+\cdots)$$
$$=\prod_p (1-p^{-s})^{-1},$$

其中 p 跑遍所有的質數。注意到出現在無窮乘積的每一因式 $(1-p^{-s})^{-1}$ 皆不爲零, 因而 $\zeta(s)$ 在 Re $s>1$ 時完全沒有零點。

定義 gamma 函數 $\Gamma(s)$ 爲

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \qquad \mathrm{Re}\, s>0.$$

這函數也是俗稱的階乘函數, 原因是對任意正整數 n

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

又對任意 Re $s>0$, 由部份積分可得出

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

這稱爲 $\Gamma(s)$ 的泛方程式。而可將 $\Gamma(s)$ 解析延拓到整個複數平面上。對 Re $s>-m$, m 是正整數, 可定義

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+m-1)}\Gamma(s+m)\\ &=\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+m-1)}\\ &\quad\cdot\int_0^\infty t^{s+m-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

對任意正整數 n, 透過變數變換得出

$$\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 t}dt=\pi^{-s/2}n^{-s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big).$$

因而由逐項積分得出

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)=\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}g(t)dt,$$

其中 $g(t)=\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$。透過 $g(t)$ 的轉換式

$$g\Big(\frac{1}{t}\Big)=\frac{1}{2}(\sqrt{t}-1)+\sqrt{t}g(t)$$

可得出 Re $s>1$ 時

$$\begin{aligned}&\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)\\ &=\frac{1}{s(1-s)}+\int_1^\infty (t^{\frac{s}{2}-1}+t^{\frac{1-s}{2}-1})g(t)dt\end{aligned}$$

上面的表現式並不局限於半平面 Re $s>1$, 而是定義在整個複數平面上, 而成爲這函數的解析延拓。且在這式子中, s 用 $1-s$ 代入後不變, 而有

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

這表示 $\zeta(s)$ 的値反應在 $\zeta(1-s)$ 上。現 $\zeta(s)$ 在 Re $s>1$ 沒零點的特質反應到 $\zeta(s)$ 在 Re $s<0$ 的取値。在 Re $s<0$ 時, $\Gamma(\frac{s}{2})$ 在 $s=-2,-4,-6,\ldots$ 有單極點 (simple pole), 致 $\zeta(s)$ 在這些點非得等於0才能抵消 $\Gamma(\frac{s}{2})$ 的極點, 因兩者乘積是解析函數。這些 $\zeta(s)$ 的零點稱爲顯然零點, 並非里曼假設有興趣的對象, 所謂的“有趣”零點是指落在 $0\le$ Re $s\le 1$ 區域內的零點, 而里曼假設可重述如下:

里曼假設: 若 $\zeta(s)=0$ 且 $0\le$ Re $s\le 1$, 則 Re $s=\frac{1}{2}$。

2. 質數分布定理

以 $\pi(x)$ 表示不超過 x 的質數個數。在一有名的論文中, 里曼提出了包括里曼假設在內的六個假設。在這些假設下, 里曼證明了質數分布定理

$$\pi(x)\quad\sim\quad\frac{x}{\log x}\quad\sim\quad Li(x)$$
$$=\int_2^x\frac{dt}{\log t}, \qquad x\to\infty$$

這六個假設除里曼假設外, 皆一一得到證明。而質數分布定理直到 1896 年才被 Hadamard 與 Poussin 兩人分別獨立得到證明, 並未用到里曼假設。就如 D. Hilbert 在巴黎數學會演說中所指出, 里曼假設等價於

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x), \quad x \to \infty$$

也等價於

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(n) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad N \to \infty$$

其中 μ 爲 Möbius μ-函數, 定義爲

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{若 } n = 1, \\ (-1)^r & \text{若 } n = p_1 p_2 \ldots p_r \text{爲相異} \\ & \text{質數乘積,} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

若一 Dirichlet 級數

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

的係數滿足

$$\sum_{n \le x} a_n \quad \sim \quad cx, \quad x \to \infty$$

則這級數在 Re $s > 1$ 收斂且

$$c = \lim_{s\to 1}(s-1)f(s).$$

反之, 若這級數在 Re $s > 1$ 收斂且 c 由上面極限得出, 則

$$\sum_{n \le x} a_n \quad \sim \quad cx.$$

現從 $\zeta(s)$ 的無窮乘積式

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}, \quad \text{Re } s > 1.$$

取對數微分得出

$$\begin{aligned} & -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\ &= \sum_p (\log p) p^{-s} (1-p^{-s})^{-1} \\ &= \sum_p (\log p)(p^{-s} + p^{-2s} + \cdots + p^{-ks} + \cdots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}, \end{aligned}$$

其中 $\Lambda(n)$ 的定義爲

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{若} n = p^k, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

因此

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \sim x, \quad x \to \infty;$$

這其實等價於質數分布定理, 亦即

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

3. 零點的分布

在目前爲止, $\zeta(s)$ 的有趣零點完全透過數值計算。R. S. Lehman 於1966年證明首先的2,500,000 $\zeta(s)$ 的零點滿足 $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $0 < \tau < 170,571.35$; 稍後於1979, R. P. Brend 擴展這結果到首先的 75,000,000個。把 s 表爲 $\sigma + i\tau$, 定義

$$\begin{aligned} N(T) &= \zeta(s) \text{ 在 } 0 \le \sigma \le 1, 0 < \tau < T \\ & \quad \text{的零點個數。} \\ N_0(T) &= \zeta(s) \text{ 在 } \sigma = \frac{1}{2}, 0 \le \tau < T \\ & \quad \text{的零點個數。} \end{aligned}$$

Mangoldt 證明

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}(\log\frac{T}{2\pi}-1)+O(\log T)$$

在假設里曼假設成立時, Littlewood 於1924年證明了

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}(\log\frac{T}{2\pi}-1)+o(\log T).$$

Hardy 於1914年首度證明有無窮多個零點落在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 的直線上, 而 A. Selberg 於1942年更證明

$$N_0(T)>AT\log T.$$

其中 A 是一正常數。因而

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{N_0(T)}{N(T)}>0.$$

Levinson 於1974年證明

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{N_0(T)}{N(T)}>\frac{1}{3},$$

表示至少有 $\frac{1}{3}$ 的零點全落在直線 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

4. 結語

懸賞解題在數學界並非創舉。在歐美的校園中, 時常有徵求解答的數學題貼在公布欄, 也附上代價。費馬最後定理被懸賞10萬馬克, 數學界的桂冠 Fields Medal 則頒給40歲以前有卓越成就的數學家。現有人爲一些問題而拋出重賞居心何在? 底下或許是一些可能理由:

- 左右未來數學研究方向。
- 開數學界玩笑, 取笑數學界的無能。
- 吸引更多人投入這些問題的研究。
- 陷害數學家, 使掉入死要錢的陷井裡。
- 掃除大型計劃中的障礙。

不管居心如何, 以金錢掛帥的研究導向並不足取。另一方面, 想想有多少數學名人皆費了一生心血而未解決的數學問題, 而且已懸疑了兩百多年, 值不值得去嘗試, 就有待自己的衡量了。

最後談到如何著手的問題。$\zeta(s)$ 只在 $s=1$ 有一單極點, 因而 $(s-1)\zeta(s)$ 是一全純函數, 而具有無窮乘積式:

$$\begin{aligned}&(s-1)\zeta(s)\\&=\frac{1}{2}e^{bs}\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})e^{s/\rho}\end{aligned}$$

其中 b 是一常數, 而 ρ 跑遍 $\zeta(s)$ 在 $0\le\sigma\le 1$ 的所有零點。很不幸的是, 這乘積式中的 ρ 沒有明顯的表現式, 致式子只有象徵性的意義, 而不能做實質的運算。其中的 gamma 函數也有乘積式:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n},$$

其中 γ 是 Euler 常數, 定義爲

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n).$$

這給人的感覺是: $\zeta(s)$ 仍是一捉摸不定的神秘函數。

参考文獻

1. H. Rademacher, Topics in Analytic Number Theory.
2. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Volumn I~III.

—本文作者任教於中正大學數學系—