做事馬虎的報應

蘇玉奇

摘要: 老師們在教授計數原理、包容互斥原理及排列組合、集合、機率等諸多題材上, 往往不得掌握其發展的主軸與主題的連貫性, 因此, 學生們對這幾個題材, 分開來各別地學習時毫無困難, 可是, 一旦遇到實際上的問題, 需要對這些觀念加以統合、應用的時候, 他們便會感到束手無策、力不從心了!

本文試圖以一個有趣的生活問題, 來引發對 Laplace 古典機率的計算。在計算的過程中, 我們自然而然的引導出計數原理 (乘法原理及加法原理)、包容互斥原理及排列組合、集合、機率等觀念, 並加以應用之。很適合將學或已學過排列組合、機率的中學生, 作一課前的預覽與課後的統整、思索。

一、新鮮人要注意的問題

某公司新進的業務人員乙, 白天受其主管某甲的指示, 要針對住在不同地址、擁有不同購買意願的五位客戶, a, b, c, d, e, 寫出內容相異的五封信[註1], 藉以招攬這五位客戶來採買公司所生產的一系列產品。

於是, 這位業務人員便利用當天晚上, 留在公司裡加班, 連夜的將這五封信的內容及五個信封上客戶的郵遞區號、住址、姓名都寫好, 可是偏巧不巧, 當他還來不及將信裝入信封時, 卻發生了全台灣的大停電[註2]。乙思及這幾日來受這些主管的頤指氣使, 又遭這般窘境, 轉念一想:「反正現在主管不在, 隨便裝一裝, 明天交給郵務同仁寄出去即可。」就這樣, 在一片漆黑的窘境下, 乙隨手將捉、摸到的一封信, 裝入隨手捉、摸到的一個信封[註3], 並用釘書機裝釘了信封口。完成了這五封信的裝釘工作之後, 乙便急忙的下班, 趕回去探視心愛的妻子。當然, 因爲停電讓打卡鐘失去了功能, 乙這天的加班費, 隔天又得向主管大費口舌一番!

但, 他萬萬沒有料到, 這五位顧客和主管甲的交情甚好, 當他們收到名字、內容都很怪異的信之後, 必然會向甲反應, 而依主管甲的“作人”(將該業務人員開除), “處事”(處罰業務人員在連續假日值班) 原則是這樣的: 假

如有三位以上 (包含三位) 的客戶向他 (甲) 反應, 收到莫名其妙的信, 那麼該業務人員鐵定被開除; 而如果有兩位以下 (i.e. 只可能零位或兩位, why?) 的客戶反應, 那麼乙便會被處罰在連續假日當中值班, 當然, 如果沒有客戶反應, 那麼乙便逃過一劫了!

現在就有一個問題要請問讀者了, 請問: 乙被開除的機率[註4] (Probability) 是多少? 被處罰在連續假日當中值班的機率又是多少? 而僥倖逃過開除、處罰報應的機率又是多少? 讀者如果已學過排列組合與機率, 至此應當停下來, 先自己想想看, 試著把這三個問題解決; 如未學過, 則請讀者邊看邊想, 有耐心地把它讀完、想完。

二、解決問題的探究

讓我們先來看看所有可能發生 (出現) 的結果[註5]。

第一種結果: 這五封信當中, 恰有兩封信裝錯。

第二種結果: 這五封信當中, 恰有三封信裝錯。

第三種結果: 這五封信當中, 恰有四封信裝錯。

第四種結果: 這五封信當中, 全部 (五封) 都裝錯。

第五種結果: 這五封信當中, 都沒有裝錯。

很顯然的, 當第一種結果發生, 乙頂多犧牲幾天的假期而已; 當第二、三、四種結果發生, 乙便難逃被開除的命運; 而當第五種結果發生時, 乙則若無其事地繼續他的工作。

接下來, 讓我們逐一的看看 (計算)[註6] 每一種結果各別有幾種不同的情形。

1. 這五封信當中, 恰有兩封信裝錯的情形有幾種?

要完成這樁"錯事"(我們可以稱它事件A), 需要經過兩道步驟 (steps), 首先, 由五封信任選 (取) 兩封 (來裝錯) 的情況有 $\frac{5\times4}{2!} = 10$ 種[註7], 在組合 (Combination) 裡, 我們習慣上用 C^5_2 來表示, C^5_2 唸作"C5取2", 意思為: 從五件完全相異物當中, 取出兩件為一組的情形有這麼多種。(請讀者參看註7)

其次, 在上述步驟中所選出的兩封信 (例如: 選出的信為 a 信及 b 信), 其裝錯的情形只有一種, 即 a 信裝入 b 信封, b 信裝入 a 信封。

故而, 完成這樁錯事有 $C^5_2\times 1 = 10$ 種不同的情形, 也就是說: 在隨機的將這五封信裝入五個信封裡的實驗中 (稱這個實驗為 S), 符合恰有兩封信裝錯 (稱它為事件 A) 的所有可能發生的結果有 $n(A) = 10$ 種 (個)[註8]。

又, 我們知道: 隨便地將這五封信, 裝入五個信封裡的所有可能發生的情形有$5\times4\times3\times2\times1 \equiv 5!$(讀作"5的階乘"), 也就是說: 在隨機地將這五封信裝入五個信封裏的實驗 (S) 中, 所有可能發生的不同結果有 $n(S) = 120$ 個。假設這120個結果 (outcome) 發生 (出現) 的機會是均等的, 而且這些結果彼此互相排斥 (disjoint), 即已知出現第一個結果的同時, 就不會出現第二個或

其它任一個的結果。由 Laplace(1749-1827) 古典機率[註9] 可知, 乙被處罰在連續假日當中值班的機率 (可能率) 是

$$\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{C_2^5\cdot 1}{5!}=\frac{\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 1}{5!}=\frac{1}{2!\cdot 3!}$$
$$=\frac{1}{12}\equiv P(A)$$

2. 這五封信當中, 恰有三封信裝錯的情形有幾種?

方法如1. 所述: 由五封信任選三封的情況有 $C_3^5=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot 4}{2!}=10$ 種[註10]; 而選出的三封信 (例如: 選出 a, b, c 這三封信) 皆裝錯的情形有:

n(三封信任意裝入三個信封裏)$-n$(三封信當中, 至少有一封信裝到正確的信封)[註11]

$$\begin{aligned}&=3!-\Big[C_1^3\cdot(3-1)!-C_2^3\cdot(3-2)!\\&\quad+C_3^3\cdot(3-3)!\Big]\\&=3!-(3!-3+1)\\&=3-1\\&=2\text{ 種}\end{aligned}$$

故而, 恰有三封信裝錯的情形有 $10\times 2=20$ 種。

3. 同理, 這五封信當中, 恰有四封信裝錯的情形有:

$$\begin{aligned}&C_4^5\Big\{4!-\Big[C_1^4\cdot(4-1)!-C_2^4\cdot(4-2)!\\&\quad+C_3^4\cdot(4-3)!-C_4^4\cdot(4-4)!\Big]\Big\}\\&=\frac{5!}{4!1!}\Big(4!-\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}\Big)\\&=5!\Big(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\Big)\\&=45\text{ 種}\end{aligned}$$

4. 同理, 這五封信當中, 恰有五封信裝錯的情形有:

$$\begin{aligned}&C_5^5\Big\{5!-\Big[C_1^5\cdot(5-1)!-C_2^5\cdot(5-2)!\\&\quad+C_3^5\cdot(5-3)!-C_4^5\cdot(5-4)!\\&\quad+C_5^5\cdot(5-5)!\Big]\Big\}\\&=44\text{ 種}\end{aligned}$$

第二、三、四種結果, 是彼此互斥的三個事件 (disjoint events), 即: 如果出現第二種結果的同時, 便不會出現第三或第四種結果。故而, 乙被開除 (稱它爲事件 B) 的機率爲:

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{n[(\text{恰有三封信裝錯})\text{ 或者}(\text{恰有四封信裝錯})\text{ 或者}(\text{恰有五封信裝錯})]}{n(\text{五封信任意裝})}\\&=\frac{n(\text{恰有三封信裝錯})+n(\text{恰有四封信裝錯})+n(\text{恰有五封信裝錯})^{\text{註}12}}{n(\text{五封信任意裝})}\\&=\frac{20+45+44}{120}\\&=\frac{109}{120}\end{aligned}$$

5. 第五種結果: 這五封信當中, 都沒有裝錯的情形有:

$$120-(10+20+45+44)=1 \text{ 種},$$

也就是說乙幸運的逃過被處罰或被開除 (稱它爲事件 C, 即這個實驗 S 中由事件 A, B 所剩下來的事件) 的機率爲: $P(C)=\frac{1}{120}$, 多麼的"不可能"呀!

三、小結語

所以, 這是奉勸諸君, 做任何事可都馬虎不得, 別以爲神不知、鬼不覺, 就可以胡亂、隨便的完成一件事, 到時候受到自然的機率所報應, 後悔可就莫及了!

四、延伸的問題

如果是 n 封 $(n\geq 2,\ n\in\mathbb{N})$ 不同的信, 隨機的放入 n 個信封裡, 求:

(1) 至少有一封信, 放對了信封的機率是多少?

(2) 沒有一封信放對了信封的機率是多少?

(3) 恰有兩封信, 放對了信封的機率是少? (亦即, 其餘的 $n-2$ 封皆放錯的機率是多少?)

答案應該由讀者自己去想出來! 不過, 爲了讓本文完整一點, 還是把答案揭曉如下:

$$(1)\quad \frac{C_1^n\cdot(n-1)!-C_2^n\cdot(n-2)!+C_3^n\cdot(n-3)!-\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n\cdot(n-n)!}{n!}$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$(2)\quad \frac{n!-[C_1^n\cdot(n-1)!-C_2^n\cdot(n-2)!+C_3^n\cdot(n-3)!-\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n(n-n)!]}{n!}$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$(3)\quad C_{n-2}^n\Big\{(n-2)!-[C_1^{n-2}\cdot(n-3)!-C_2^{n-2}\cdot(n-4)!+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-2}^{n-2}\cdot 0!]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n-2)!}\Big]$$

五、內文註釋

1. 根據這五位客戶的購買習性, 例如: 客戶 a 著重於產品的外表、整體造型, 客戶 b 偏重於產品的實用性、耐久性 ... 等等, 而寫出不同內容的五封信。
2. 據民國88年, 發生全台灣大停電的日數來推估, 一天當中, 遇到停電的機率約爲

$\frac{1}{30}$, 當然, 這個推論是有問題的, 讀者應當不難理解爲什麼有問題。

3. 假設隨手捉、摸到任一封信的機會均等。
4. 也有人翻譯作"或然率", 筆者自己比較喜歡譯作"可能率", 既白話又易"顧名思義", 而且"名符其實"。
5. 所有可能發生 (出現) 的結果所組成的群體 (集合) 稱爲樣本空間 (Sample space, S), 它常隨著試驗目的的不同而異。
6. 此即排列 (Permutation) 組合中, 最核心的觀念, "計數原理 (Counting principle) 當中的乘法原理 (Multiplicatioin rule)"的介紹與應用。
7. 5表示第一次選信, 有五封"候選信"可供選擇; 4表示第二次選信, 只剩下四封"候選信"可供選取; 除以 $2!(\equiv 2\times 1=2$, 唸作"2的階乘 (factorial)"), 表示選出的兩封信, 不計較它們被選出的先後次序, 即只選取而不排序, 此亦即組合的情形。$\frac{5\times 4}{2!}=\frac{5\times 4\times 3!}{2!\times 3!}=\frac{5!}{2!\times(5-2)!}\equiv C_2^5$, 又, 我們規定 $C_1^0\equiv 1=C_0^1=C_0^2=\ldots=C_0^n$, 讀者可以從這樣 (組合數) 的定義與規定, 推導出從 $n(n\in\mathbb{N}$或$0)$ 件相異物當中, 取出 $m(m\le n,\ m\in\mathbb{N})$ 個的情形, 共有 $C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 種不同的可能結果。
8. n 是 number(個數、自然數、幾個) 的簡記, $n(A)$ 是指隨某一種要求、條件A 而異的變數 (此即函數), 同樣的 $n(S)$ 是隨實驗 S 而異的變 (函) 數。
9. Laplace 古典機率是只考慮樣本空間中, 各基本事件出現的機會均等的情形。設某實驗 S 中, 所有可能發生的不同結果有 $n(S)$ 個 (稱實驗 S 爲有 $n(S)$ 個樣本點的樣本空間), 而這 $n(S)$ 個結果 (稱每一個結果爲一基本事件) 當中, 每一個結果發生的機會是均等的, 若 $A\subset S(A$ 是 S 的子集) 爲一事件, 則事件 A 發生的機率爲 $\frac{n(A)}{n(S)}\equiv P(A)$。
10. 由 $C_2^5=10=C_3^5$, 我們不難猜想 $C_m^n=C_{n-m}^n\,(m\le n)$, 並由組合數的定義及乘法滿足可交換律證明之。
11. 此即包容排斥原理 (Inclusive and exclusive principle, 也有人譯作排容原理或包容互斥原理): 設 $A_i\subset S$ $(i=1,2,\ldots n)$ 爲樣本空間 S 的任一子集 (即實驗 S 中的任一個事件), 則

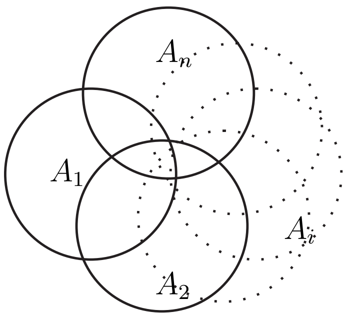
$$\begin{aligned}&n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\ =&\Big[n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_n)\Big]-\\ &\Big[n(A_1\cap A_2)+n(A_2\cap A_3)+\cdots\\ &+n(A_{n-1}\cap A_n)\Big]+\Big[n(A_1\cap A_2\cap A_3)\\ &+n(A_1\cap A_2\cap A_4)+\cdots+n(A_{n-2}\\ &\cap A_{n-1}\cap A_n)\Big]-\cdots+\cdots-\cdots\\ &+(-1)^{n+1}n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\end{aligned}$$

可由簡單的歸納法 (Induction) 證明之。或者我們也可由下列的 Venn's diagram (如圖一) 得到更直觀的證明, 其中 A_i 的圓面積大小代表集合 A_i 的元素個數, 而 $n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ 即 $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ 的外圍所構

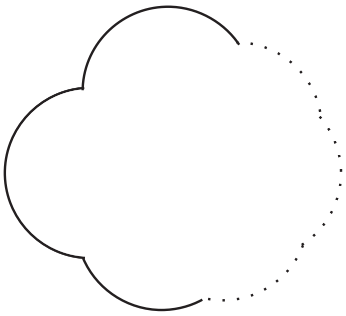
成的面積大小 (i.e. 此幾個集合的聯集的元素個數)(如圖二所示)。當 $n=3$, 則

$$
\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup A_3)\\
=&\Big[n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)\Big]\\
&-\Big[n(A_1\cap A_2)+n(A_2\cap A_3)\\
&+n(A_3\cap A_1)\Big]\\
&+\Big[n(A_1\cap A_2\cap A_3)\Big]
\end{aligned}
$$

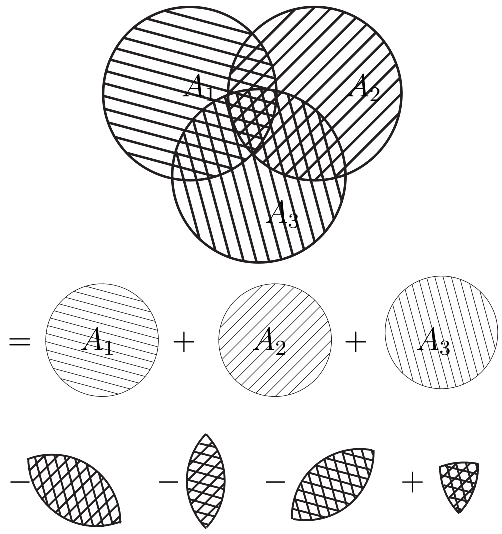
(如圖三面積所示)



圖一 Venn's diagram



圖二 $n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ 代表的意義



圖三 計算 $n(A_1\cup A_2\cup A_3)$ 的圖示法

此處 $i=a,b,c$, A_i 表示 i 封信正確地放入 i 信封裏的事件, 而至少有一封信裝入對應的信封的情形有:

$$
\begin{aligned}
&n(A_a\cup A_b\cup A_c)\\
=&\Big[n(A_a)+n(A_b)+n(A_c)\Big]-\Big[n(A_a\\
&\cap A_b)+n(A_b\cap A_c)+n(A_c\cap A_a)\Big]\\
&+n(A_a\cap A_b\cap A_c)\\
=&C_1^3\cdot(3-1)!-C_2^3\cdot(3-2)!\\
&+C_3^3\cdot(3-3)!
\end{aligned}
$$

- C_1^3: 三封任取一封來裝對
- $(3-1)!$: 其它兩封任意裝, 不管裝對或裝錯
- C_2^3: 三封信任取兩封來裝對
- $(3-2)!$: 剩下的一封必然裝對
- C_3^3: 三封皆取來裝對 (即三封皆裝對)
- $(3-3)!$: 僅有一種情形

12. 此即爲互斥事件的加法原理。

參考文獻

1. 高級中學基礎數學 (四), 國立編譯館出版。
2. 劉振乾及劉睦雄編著, 機率論導引, 水牛出版社出版。
3. 楊維哲教授編著, 機率論, 國立編譯館出版。
4. Ross, A first course in probability, furth edition.
5. M. Loéve, Probability theory, furth edition.

—本文作者目前從事科學普及的傳播工作—